第二章习题：积分理论

2023 年 7 月 4 日

1. (**Stein 中译本,P69,1**) 这一性质用于简单函数调整为"典范形式". 给定一个集族 $F_1,\cdots,F_n$，构造另一个集族 F_1^*，F_2^*，$\cdots$，F_N^*，其中 $N=2^n-1$，使得：$\bigcup_{k=1}^n F_k=\bigcup_{j=1}^N F_j^*$，$\{F_j^*\}$ 互不相交，且对每个 k，$F_k=\bigcup_{F_j^*\subset F_k} F_j^*$.

   证明. 考虑 2^n-1 个集合：
   $$F_1^\bullet\cap F_2^\bullet\cap\cdots\cap F_n^\bullet.$$
   其中，每个 $F_k^\bullet$ 可以是 F_k 或者 F_k^c（不允许全部是 F_k^c，因为这样的集合对构成 $\bigcup F_k$ 没有贡献，不予考虑）. 我们将这些集合定义为 $\{F_j^*\}_{j=1}^N$，下面验证它们满足题目要求的性质.

   首先这些集合互不相交. 然后，$\forall x\in F_k$，对 F_1 必有 $x\in F_1$ 或 $x\in F_1^c$，对 F_2 必有 $x\in F_2$ 或 $x\in F_2^c$，以此类推，最后得到 x 必然在某个 $F_1^\bullet\cap F_2^\bullet\cap\cdots\cap F_n^\bullet$ 之中，所以 $F_k\subset\bigcup_{F_j^*\subset F_k}F_j^*$，而右边显然是左边的子集，所以 $F_k=\bigcup_{F_j^*\subset F_k}F_j^*$. 不仅如此，这还说明了 $\bigcup_{k=1}^n F_k\subset\bigcup_{j=1}^N F_j^*$，但是，根据 F_j^* 的构造可知右边是左边的子集，所以 $\bigcup_{k=1}^n=\bigcup_{j=1}^N F_j^*$. □

2. (**Stein 中译本,P69, 题 2**) 类似于命题 2.5，证明：若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积，而且 $\delta>0$，则当 $\delta\to 1$ 时，$f(\delta x)$ 在 L^1 范数下收敛于 $f(x)$.

   证明. 此命题的证明完全类似于命题 2.5 的证明. 因为 L^1 空间中，紧支撑连续函数是稠密的，所以 $\forall\varepsilon>0$，对于 f，存在紧支撑连续函数 g，使得 $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$. 我们记 $f_\delta(x)=f(\delta x)$，$g_\delta(x)=g(\delta x)$.
   $$f-f_\delta=f-g+g-g_\delta+g_\delta-f_\delta.$$
   取 L^1 范数再利用三角不等式得到
   $$\|f-f_\delta\|_{L^1}\le\|f-g\|_{L^1}+\|g-g_\delta\|_{L^1}+\|g_\delta-f_\delta\|_{L^1}.$$
   为了估计这三项，我们先证明 Lebesgue 测度在伸缩下的相对不变性. 即：
   $$\delta^d\int_{\mathbb{R}^d}f(\delta x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x.$$
   为此，我们先对 χ_E，即可测集 E 的特征函数检验断言. 根据第一章习题 7 的结果，$m(\delta E)=\delta^d m(E)$，所以这个断言是成立的. 再由 Lebesgue 积分的线性性可知断言对于简单函数是成立

的. 对于非负可测函数 f，存在非负递增简单函数列逐点收敛于 f，所以断言对非负可测函数成立，进而对任何可测函数成立. 所以，对于足够接近 1 的 δ，我们有

$$\|g_\delta - f_\delta\|_{L^1} = \delta^d \|g - f\|_{L^1} < \delta^d \varepsilon < 2\varepsilon.$$

而因为 g 是连续函数且具有紧支撑，所以 g 有界而且 $g_\delta(x) \to g(x)(\delta \to 1)$ 逐点成立. 由有界收敛定理可知

$$\|g - g_\delta\| < \varepsilon, \quad \forall \text{足够接近 1 的 } \delta.$$

综上所述，对任何 $\varepsilon > 0$，存在 δ 足够接近 1，使得：

$$\|f - f_\delta\| \leq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.$$

所以，$f_\delta \to F$ 逐点成立（在 L^1 范数下）. □

3. (**Stein 中译本,P69, 题 3**) 假定 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上是可积的，并将它延拓至 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数. 证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

其中，I 是 $\mathbb{R}$ 中任何长度是 2π 的区间.

证明. 因为 I 是长度 2π 的区间，所以存在整数 k 使得 $I \subset (k\pi, (k+2)\pi) \cup ((k+1)\pi, (k+3)\pi)$. 由周期延拓以及 Lebesgue 积分的平移不变性（写成 f 与特征函数相乘的形式立刻看出）可知：

$$\int_{k\pi}^{(k+2)\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{(k+1)\pi}^{(k+3)\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x. \quad (*)$$

记两个开区间分别为 J_1 和 J_2，则 J_1, I 和 J_2 的区间端点将 $J_1 \cup J_2$ 分为五小段，分别记为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5，因为 I 的区间长度为 2π，所以 $S_1 + 2\pi = S_4$，$S_2 + 2\pi = S_5$，根据周期性，以及 Lebesgue 积分的平移不变性可知

$$\int_{S_1} f = \int_{S_4} f, \quad \int_{S_2} f = \int_{S_5} f.$$

依据 Lebesgue 测度对可测集的可加性，因为 $(k\pi, (k+2)\pi) = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$，$((k+1)\pi, (k+3)\pi) = S_3 \sqcup S_4 \sqcup S_5$，$I = S_2 \sqcup S_3 \sqcup S_4 = I$（事实上准确来说，两个区间至多有端点的差别，而这对积分没有影响），所以 $(*)$ 有如下分解：

$$\int_{S_1} f + \int_{S_2} f + \int_{S_3} f = \int_{S_3} f + \int_{S_4} f + \int_{S_5} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(x).$$

所以 $\int_I f = \int_{S_4} f + \int_{S_2} f + \int_{S_3} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f + \int_{S_3} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)$. □

4. (**Stein 中译本,P69, 题 4**) 假定 f 在 $[0, b]$ 是可积函数，且对于 $0 < x \leq b$，$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$. 证明 g 在 $[0, b]$ 可积，而且 $\int_0^b g(x)\mathrm{d}x = \int_0^b f(t)\mathrm{d}t$.

证明. 令 $h(x,t)=\frac{f(t)}{t}\chi_{\{0<x\le t\le b\}}(x,t)$，则有 $\mathrm{supp}h\subset[0,b]\times[0,b]$. 不妨设 f 是非负函数，由 Fubini 定理可知

$$\int_0^b g(x)\mathrm{d}x=\int_0^b \mathrm{d}x\int_0^b \frac{f(t)}{t}\chi_{\{0<x\le t\le b\}}(x,t)\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^2} h(x,t).$$

再次用 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)=\int_0^b \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\int_0^b \chi_{\{0<x\le t\}}(x)\mathrm{d}t=\int_0^b f(t)\mathrm{d}t.$$

□

5. (**Stein 中译本,P69, 题 5**) F 是 $\mathbb{R}$ 中闭集，F^c 有限测度，令 $\delta(x)$ 是：

$$\delta(x)=d(x,F)=\inf\{|x-y|:y\in F\}.$$

考虑

$$I(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y.$$

(a) 通过验证 δ 满足 Lipschitz 条件

$$|\delta(x)-\delta(y)|\le|x-y|.$$

说明 δ 是连续的.

(b) 对每个 $x\notin F$，证明 $I(x)=\infty$.

(c) 证明，对 a.e. $x\in F$，$I(x)<\infty$. 如果考虑到 Lipschitz 条件仅仅让 I 的被积函数中 $|x-y|$ 的一次幂消失这一事实的话，此结果或许是非常 surprising 的.

证明. (a)$\forall z\in F$，

$$\delta(x)\le|x-z|\le|x-y|+|y-z|.$$

对 $z\in F$ 取下确界得

$$\delta(x)\le|x-y|+\inf_{z\in F}|y-z|=\delta(y)+|x-y|.$$

对称地得到

$$\delta(y)\le\delta(x)+|x-y|.$$

综合以上两式得

$$|\delta(x)-\delta(y)|\le|x-y|.$$

(b) 注意 $\mathrm{supp}I\subset F^c$，所以只需要考虑在 F^c 上的积分即可. 对 $x\in F^c$，存在 $\overline{B}(x,r)\subset F^c$，所以

$$I(x)\ge\int_{\overline{B}(x,r)}\frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\mathrm{d}y.$$

因为 $\overline{B}(x,r)$ 是紧集，F 是闭集而且 $\overline{B}(x,r)\cap F=\varnothing$，所以 $d(\overline{B}(x,r),F):=\delta_0>0$，所以当 $y\in\overline{B}(x,r)$ 时，$d(y,F)\ge d(\overline{B}(x,r),F)=\delta_0$，所以：

$$I(x)\ge\delta_0\int_{\overline{B}(x,r)}\frac{1}{|y-x|^2}\mathrm{d}y.$$

由 Lebesgue 积分的平移不变性：

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B}(x,r)}\frac{1}{|y-x|^2}\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|y-x|^2}\chi_{\overline{B}(x,r)}(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|y+x-x|^2}\chi_{\overline{B}(x,r)}(y+x)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|y|^2}\chi_{\overline{B}(0,r)}(y)\mathrm{d}y\\ &= 2\int_0^{\sqrt{r}}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y\\ &= \infty.\end{aligned}$$

从而，$I(x)=\infty$.

(c) 我们研究 $\int_F I(x)\mathrm{d}x$.

令 $f(x,y)=\frac{\delta(y)}{|x-y|^2}$，则 f 是连续函数，从而是可测函数. 由 Fubini 定理可知

$$\int_F I = \int_{\mathbb{R}}\delta(y)\mathrm{d}y\int_F\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x = \int_{F^c}\delta(y)\mathrm{d}y\int_F\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x.$$

当 $x\in F$ 时，$|x-y|\geq\delta(y)$，所以

$$\int_F\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x \leq \int_{|x-y|\geq\delta(y)}\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}x = 2\int_{\delta(y)}^{\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\delta(y)}.$$

所以

$$\int_F I \leq \int_{F^c}\delta(y)\frac{2}{\delta(y)}\mathrm{d}y = 2m(F^c) < \infty.$$

□

6. (**Stein 中译本，P70，题 6**)f 在 $\mathbb{R}$ 上的可积性并不一定意味着当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛到 0. 例如考虑一个在 $[n,n+\frac{1}{n^3})$ 上取值为 n 的连续函数，使其在 $[n,n+\frac{1}{n^3})$ 以外的地方的积分有限（这总是可以做到，例如可以使函数值在这些区间两侧足够“陡峭”地下降到零），于是这样的函数 $\varphi(x)$ 的积分 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n^3}+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+C<C+2<\infty$，所以 $\varphi(x)$ 是可积函数，但是 $\limsup_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$.

   但是，若假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续而且可积，则 $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$.

   证明. 我们用反证法. 假设 $f(x)$ 不收敛到 0（$|x|\to\infty$），那么，存在 $A>0$，使得对任何 $M_1>0$，都存在 $|y_1|>M_1$ 使得 $f(y_1)\geq A$. 因为 f 一致连续，所以对 $\frac{A}{2}>0$，存在 $\delta>0$，使得只要 z_1,z_2 满足 $|z_1-z_2|<\delta$，就有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{A}{2}$. 特别地，我们考虑 $(y_1-\delta/2,y_1+\delta/2)$，则 $\forall x\in(y_1-\delta,y_1+\delta)$，都有 $|x-y_1|<\delta$ 从而 $|f(x)-f(y_1)|<\frac{A}{2}$，所以 $|f(x)|>\frac{A}{2}$ 恒成立. 我们再取 $M_2>|y_1|+2\delta$，则又存在 $|y_2|>M_2$ 使得 $f(y_2)\geq A$，重复以上过程又得到区间 $(y_2-\delta,y_2+\delta)$，使得 $|f(x)|>\frac{A}{2}$ 在 $(y_2-\delta,y_2+\delta)$ 上成立，而且 $(y_1-\delta,y_1+\delta)$ 和 $(y_2-\delta,y_2+\delta)$ 不交，重复以上过程，我们得到可数无限多个 $\{B(y_n,\delta)\}_{n\geq 1}$，它们不交，且在每个区间上都有 $|f(x)|>\frac{A}{2}$，因此：

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x \geq \sum_{n\geq 1}\int_{B(y_n,\delta)}|f(x)|\mathrm{d}x \geq \sum_{n\geq 1}2\delta\cdot\frac{A}{2}=\infty.$$

这与 f 可积矛盾. $\square$

7. (**Stein 中译本,P70.7**) $\Gamma\subset\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$，$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:y=f(x)\}$，$f$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上可测函数，证明 Γ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的可测子集，而且 $m(\Gamma)=0$.

证明. 令 $F:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}$，$F(x,y)=f(x)-y$，则 Γ 就是 $\{0\}$ 的 $F-$ 原像集. 我们要说明 F 是可测函数，首先说明 $G(x,y)=f(x)$ 是可测函数. 这是因为，$G^{-1}(\{x\geq a\})=\{f\geq a\}\times\mathbb{R}$，因为 f 是可测函数，所以 $\{f\geq a\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中可测集，所以 $\{f\geq a\}\times\mathbb{R}$ 是可测集. 这说明 G 是可测函数，所以 $G^{-1}(\{0\})=\Gamma$ 是可测集.

为了计算 Γ 的测度，我们考虑对 $\chi_\Gamma(x,y)$ 用 Fubini 定理：

$$m(\Gamma)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\chi_\Gamma(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\chi_\Gamma^x(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}m(\{f(x)\})\mathrm{d}x=0.$$

$\square$

8. (**Stein 中译本,P70.8**) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积，证明 $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ 一致连续.

证明. 注意紧支撑连续函数的集合 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中稠密，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$ 使得 $\|f-g\|_{L^1}\leq\varepsilon/2$. 因为 g 是紧支撑连续函数，所以 g 一致有界，即存在一个常数 M 使得 $|g|\leq M$.

不妨设 $y\geq x$，则

$$|F(x)-F(y)|=\left|\int_{[x,y]}f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_{[x,y]}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t+\int_{[x,y]}|g(t)|\mathrm{d}t\leq M|y-x|+\varepsilon/2.$$

注意 M 和 ε 无关，于是取 $|y-x|<\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$ 即可. $\square$

9. (**Stein 中译本，P71，题 9**)Tchebychev 不等式. 假定 f 非负可积，若 $\alpha>0$ 且 $E_\alpha=\{x:f(x)>\alpha\}$，证明：$m(E_\alpha)<\frac{1}{\alpha}\int f$.

证明. 根据 Lebesgue 积分的定义和单调性立刻得到：

$$\alpha m(E_\alpha)=\int_{\mathbb{R}^d}\alpha\chi_{E_\alpha}(x)\mathrm{d}x\leq\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

10. (**Stein 中译本,P70.10**) 假定 $f\geq 0$，且令 $E_{2^k}=\{x:f(x)>2^k\}$ 以及 $F_k=\{x:2^k<f(x)\leq 2^{k+1}\}$，若 f 几乎处处有限，则：

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}F_k=\{f(x)>0\},$$

且集合 F_k 互不相交.

证明 f 可积，当且仅当 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^km(F_k)<\infty$，当且仅当 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^km(E_{2^k})<\infty$.

用这个结果证明一下结论，令：

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-a}, & |x|\le 1,\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}|x|^{-a}, & |x|>1,\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

则：

f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积当且仅当 $a<d$，g 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积当且仅当 $b>d$.

证明. 考虑级数 $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k\chi_{F_k}(x)$，则 φ 是正项级数，根据单调收敛定理的推论：

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{F_k}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(F_k).$$

所以 φ 是可积函数 $\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(F_k)<\infty$. 因为 $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}F_k=\operatorname{supp}f$，而且 F_k 互不相交，所以 f 有如下分解：

$$f(x)=f(x)\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}F_k}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x)\chi_{F_k}(x).$$

所以根据 F_k 的定义可知

$$\varphi(x)\le f(x)\le 2\varphi(x).$$

所以 f 是可积函数当且仅当 φ 也是可积函数，结合上面的结果可知 f 是可积函数当且仅当 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(F_k)<\infty$.

观察：$E_{2^k}-E_{2^{k+1}}=F_k$ 而且 E_{2^k} 是单调递减的集合列，所以

$$m(E_{2^k})-m(E_{2^{k+1}})=m(F_k).$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})-\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{k-1}m(E_{2^k})\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})-\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^{k+1}})\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k(m(E_{2^k})-m(E_{2^{k+1}}))\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(F_k).\end{aligned}$$

所以 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(F_k)<\infty$ 当且仅当 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})<\infty$.

对于 f，

$$m(E_{2^k})=m(\{f>2^k\})=m(\{|x|^{-a}>2^k,|x|\le 1\})=m\{|x|<2^{-\frac{k}{a}},|x|\le 1\}=C\cdot\min\{2^{-\frac{kd}{a}},1\}.$$

C 是常数. 此时

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})=C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\min\{2^{k(1-d/a)},2^k\}.$$

该级数收敛当且仅当 $1-\frac{d}{a}<0$，即 $a<d$. 对于 g，则有：

$$m(E_{2^k})=m(\{g>2^k\})=m(\{|x|^{-b}>2^k,|x|>1\})=\begin{cases}C(2^{-kd/b}-1), & k\le 0\\ 0, & k>0.\end{cases}$$

此时

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^k m(E_{2^k})=C\sum_{\ell=0}^{\infty}(2^{\ell(d/b-1)}-2^{-\ell}).$$

该级数收敛当且仅当 $\frac{d}{b}-1<0$，即 $b>d$. □

11. (**Stein 中译本，P70，题 11**) 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上可积的实值函数，而且对任何可测集 E 都有 $\int_E f(x)\geq 0$，证明

(a) $f(x)\geq 0$ a.e.;

(b) 若对每个可测集 E，$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$ a.e.

证明. (a) 我们只需要证明 $Z=\{x\in\mathbb{R}^d:f(x)<0\}$ 满足 $m(Z)=0$. 因为 f 是可测函数，所以 Z 是可测集，所以 $\int_Z f(x)\mathrm{d}x\geq 0$. 但是，若 Z 不是零测集，则 $f(x)$ 在一个正测度的集合上恒小于零，这说明 $\int_Z f(x)\mathrm{d}x<0$，所以 Z 必然是零测集.

这用到事实：若非负函数的积分等于零，则函数几乎处处为零.

(b) 这说明 f 和 $-f$ 都满足 (a) 的条件，于是 $f\geq 0$a.e. 且 $f\leq 0$ a.e.，所以 $f=0$ a.e. □

12. (**Stein 中译本,P70.12**) 证明，存在 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 以及序列 $\{f_n\}$，满足 $f_n\in L^1(\mathbb{R}^d)$，使得：

$$\|f-f_n\|_{L^1}\to 0.$$

但是不存在 x，使得 $f_n(x)\to f(x)$.

证明. 我们考虑在 $\mathbb{R}^d$ 上构造方体序列. 首先在原点附近选取边长为 2 的方体（即 $B_1=\overline{B}_\infty(0,1)$，即 $\mathbb{R}^d$ 上无穷范数下半径为 1 的球），将 B_1 按整点切割为 2^d 个较小的方体，每个方体尺寸为 1，将这些方体分别记为 $I_1,\cdots,I_{2^d}$. 第二步，考虑 $B_2=\overline{B}_\infty(0,2)$，继续将 B_2 按 $\frac{1}{2}$ 分点切割为 8^d 个较小的方体，每个方体的边长为 $\frac{1}{2}$，将这些方体记为 $I_{2^d+1},\cdots,I_{2^d+8^d}$，$\cdots$，以此类推，则做到第 k 步时，是将 B_k 切割为 $(2k^2)^d$ 个较小的方体，每个方体边长为 $\frac{1}{k}$. 此时，令 $f_n=\chi_{I_n}$，$f\equiv 0$，则：

$$\|f_n-f\|_{L^1}=\int_{\mathbb{R}^d}|\chi_{I_n}|=m(I_n)\to 0(n\to\infty).$$

但是，$\forall x\in\mathbb{R}^d$，存在 N 使得 $B_n\ni x$，$\forall n\geq N$，于是 x 落在某个无限多个方体中，于是存在无限多个 f_n，使得 $f_n(x)=1\neq 0$，这说明 $\forall x\in\mathbb{R}^d$，$f_n(x)$ 不收敛到 f.

这说明，在 L^1 范数下收敛并不能推出逐点收敛. 本习题告诉我们存在这样的例子，函数序列 $\{f_n\}$ 在 L^1 范数下收敛到 f，但是 f_n 在每个点都不收敛于 f. □

13. (**Stein 中译本,P71.14**) 前一章的习题 6 中我们得到了 $m(B)=v_d r^d$，其中，B 是 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 r 的球，而 $v_d=m(B_1)$，其中 B_1 是单位球. 这里我们估计 v_d 的值.

(a) 对 $d=2$，用推论 3.8 证明：

$$v_2=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x,$$

通过微积分可以算出 $v_2=\pi$.

(b) 用类似的方法证明

$$v_d=2v_{d-1}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

(c) 结果是

$$v_d=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}.$$

随后在第 6 章的习题 5 中将给出另外一个推导方法.

证明. (a) 在 $\mathbb{R}^2$ 中使用推论 3.8 以及 Fubini 定理立刻得到

$$m(B_1^2)=2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi.$$

(b) 我们记 $m(B_r^d)=\mu_d(r)$，其中 B_r^d 指的是 $\mathbb{R}^d$ 中以原点为圆心 r 为半径的球，在 $\mathbb{R}^d$ 中使用推论 3.8，以及 Fubini 定理得：

$$\mu_d(1)=m(B_1^d)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\chi_{B(0,\sqrt{1-x^2})}(y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mu_{d-1}(\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x.$$

根据 Lebesgue 测度的伸缩相对不变性,$\mu_{d-1}(\sqrt{1-x^2})=m(B(0,\sqrt{1-x^2}))=(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}m(B(0,1))=(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}m(B_1^{d-1})$.

所以

$$m(B_1^d)=m(B_1^{d-1})\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x=2m(B_1^{d-1})\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

(c)

$$m(B_1^d)=2m(B_1^{d-1})\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x=2m(B_1^{d-1})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^d t\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{(2\pi)^k}{(2k)!!},n=2k\\ \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!},n=2k+1\end{cases}.$$

这一结果可以统一地用 Gamma 函数表示：

$$m(B_1^d)=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}.$$

□

14. (**Stein 中译本,P71.16**) 假设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是可积函数，若 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_d)$ 是一个 d 元非零实数组，且：

$$f^\delta(x)=f(\delta x)=f(\delta_1x_1,\cdots,\delta_dx_d).$$

证明 f^δ 是可积的并满足：

$$\int_{\mathbb{R}^d}f^\delta(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\delta_1|\cdots|\delta_d|}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 因为 f 可积，反复运用 Fubini 定理以及 Lebesgue 测度的伸缩相对不变性即可：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(\delta_1 x_1,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_2,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}} f(\delta_1 x_1,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x_1\\ &= |\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_2,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x_1\\ &= |\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x\\ &= |\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_1,x_3,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\delta_2 x_2,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x_2\\ &= |\delta_1|^{-1}|\delta_2|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_1,x_3,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\cdots,\delta_n x_n)\mathrm{d}x_2\\ &= \cdots\\ &= |\delta_1|^{-1}\cdots|\delta_n|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

15. (**Stein 中译本,P71.14**) 前一章的习题 6 中我们得到了 $m(B)=v_d r^d$，其中，B 是 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 r 的球，而 $v_d=m(B_1)$，其中 B_1 是单位球. 这里我们估计 v_d 的值.

(a) 对 $d=2$，用推论 3.8 证明：

$$v_2 = 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x,$$

通过微积分可以算出 $v_2=\pi$.

(b) 用类似的方法证明

$$v_d = 2v_{d-1}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

(c) 结果是

$$v_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}.$$

随后在第 6 章的习题 5 中将给出另外一个推导方法.

证明. (a) 在 $\mathbb{R}^2$ 中使用推论 3.8 以及 Fubini 定理立刻得到

$$m(B_1^2) = 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \pi.$$

(b) 我们记 $m(B_r^d)=\mu_d(r)$，其中 B_r^d 指的是 $\mathbb{R}^d$ 中以原点为圆心 r 为半径的球，在 $\mathbb{R}^d$ 中使用推论 3.8，以及 Fubini 定理得：

$$\mu_d(1) = m(B_1^d) = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\chi_{B(0,\sqrt{1-x^2})}(y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mu_{d-1}(\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x.$$

根据 Lebesgue 测度的伸缩相对不变性,$\mu_{d-1}(\sqrt{1-x^2}) = m(B(0,\sqrt{1-x^2})) = (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}m(B(0,1)) = (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}m(B_1^{d-1})$.

所以

$$m(B_1^d) = m(B_1^{d-1})\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x = 2m(B_1^{d-1})\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x.$$

(c)

$$m(B_1^d)=2m(B_1^{d-1})\int_0^1(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\mathrm{d}x=2m(B_1^{d-1})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^d t\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{(2\pi)^k}{(2k)!!},n=2k\\ \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!},n=2k+1\end{cases}.$$

这一结果可以统一地用 Gamma 函数表示：

$$m(B_1^d)=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}.$$

□

16. (**Stein 中译本，P71，题 15**) 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数：

$$f(x)=\begin{cases}x^{-\frac{1}{2}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

设有理数 $\mathbb{Q}=\{r_n\}_{n\geq 1}$，令：

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(x-r_n).$$

证明：

(a) F 可积;

(b) 但是，在任何区间上，F 都无界，事实上，任何与 F 几乎处处相等的函数 $\widetilde{F}$ 在任何区间上无界. 这说明，尽管可积能够推出几乎处处有限，但是关于函数是否有界，从可积不能说明任何事情.

证明. (a) 因为 F 是非负级数，所以根据 Levi 收敛定理的推论，积分和极限次序可交换，于是，再结合 Lebesgue 积分的平移不变性可知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}F(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}2^{-n}f(x-r_n)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot 2\\&=2<\infty.\end{aligned}$$

所以，$F(x)$ 可积.

(b) 任取区间 I，选取有理数 $r_N\in I^{\circ}$，所以对任何 $M>0$，取 $\varepsilon(M)=\frac{1}{4^N M^2}$，则对于所有的 $x\in(r_N-\varepsilon(M),r_N+\varepsilon(M))\cap I^{\circ}$，都有：

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f(x-r_n)\geq 2^{-N}f(x-r_N)\geq 2^{-N}\cdot\sqrt{4^N M^2}=M.$$

所以 $F(x)$ 在 I 上无界. 对于 $\widetilde{F}$ 和 F 几乎处处相等，仍然考虑上述论证，则 $(r_N-\varepsilon(M), r_N+\varepsilon(M))\cap I^\circ$ 中除了一个零测集以外都有 $F(x)=\widetilde{F}(x)$，因此 $\widetilde{F}$ 也在 I 上无界. □

17. (**Stein 中译本,P71.16**) 假设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是可积函数，若 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_d)$ 是一个 d 元非零实数组，且：

$$f^\delta(x)=f(\delta x)=f(\delta_1x_1,\cdots,\delta_dx_d).$$

证明 f^δ 是可积的并满足：

$$\int_{\mathbb{R}^d}f^\delta(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|\delta_1|\cdots|\delta_d|}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 因为 f 可积，反复运用 Fubini 定理以及 Lebesgue 测度的伸缩相对不变性即可：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}f(\delta_1x_1,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_2,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}}f(\delta_1x_1,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x_1\\&=|\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_2,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}}f(x_1,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x_1\\&=|\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(x_1,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x\\&=|\delta_1|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_1,x_3,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}}f(x_1,\delta_2x_2,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x_2\\&=|\delta_1|^{-1}|\delta_2|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\mathrm{d}(x_1,x_3,\cdots,x_n)\int_{\mathbb{R}}f(x_1,x_2,\cdots,\delta_nx_n)\mathrm{d}x_2\\&=\cdots\\&=|\delta_1|^{-1}\cdots|\delta_n|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

18. (**Stein 中译本,P71.17**) 假定 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义如下：若 $n\le x<n+1$，且 $n\le y<n+1(n\ge 0)$，则 $f(x,y)=a_n$；若 $n\le x<n+1$ 且 $n+1\le y<n+2(n\ge 0)$，则 $f(x,y)=-a_n$. 若为其他情况，则 $f(x,y)=0$，这里 $a_n=\sum_{k\le n}b_k$，其中 $\{b_k\}$ 是一个正数序列，而且 $\sum_{k=0}^\infty b_k=s<\infty$.

(a) 验证每个截面 f^y 和 f^x 都可积，且对所有 x，$\int f^x(y)\mathrm{d}y=0$，因此 $\int\left(f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=0$.

(b) 但是，若 $0\le y<1$，则 $\int f^y(x)\mathrm{d}x=a_0$，且当 $n\le y<n+1, n\ge 1$ 时，$\int f^y(x)\mathrm{d}x-a_n-a_{n-1}$，因此 $y\mapsto\int f^y(x)\mathrm{d}x$ 在 $(0,\infty)$ 可积，而且:

$$\int\left(\int f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=s.$$

(c)$\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\infty$.

证明. (a) 记 $[x]=m$，$[y]=n$，则

$$f^x(y)=\begin{cases}a_m, m\le x<m+1,\\-a_m, m-1\le x<m+2,\\0,\text{otherwise},\end{cases}\quad f^y(x)=\begin{cases}a_n, n\le x<n+1,\\-a_{n-1}, n-1\le x<n,\\0.\text{otherwise}\end{cases}$$

可见，$f^x(y)$ 和 $f^y(x)$ 实际上是阶梯函数，其中每个区间测度有限，因此当然是可积函数.

再根据简单函数 Lebesgue 积分的定义：

$$\int_{\mathbb{R}} f^x(y)\mathrm{d}y = a_m - a_m = 0.$$

因此 $\int (f(x,y)\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) 若 $0 \le y < 1$，则 $f^y(x) = \begin{cases} a_0, 0 \le x < 1 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$.

所以

$$\int f^y(x)\mathrm{d}x = a_0 \cdot 1 = a_0.$$

另外，当 $n \le y < n+1$，$n \ge 1$ 时，根据 (a) 的结果以及 Lebesgue 积分的定义可知

$$\int f^y(x)\mathrm{d}x = a_n - a_{n-1}.$$

我们记 $I(y) = \int f^y(x)\mathrm{d}x$，则总结以上结果可得

$$I(y) = \begin{cases} a_0, 0 \le y < 1 \\ a_n - a_{n-1}, n \le y < n+1 (n \ge 1) \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}.$$

我们取截断 $I_N(y) = \chi_{[0,N+1)}(y)I(y)$，$N \ge 0$，则每个 $I_N(y)$ 是阶梯函数，

$$\int I_N(y)\mathrm{d}y = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n-1}).$$

此时 $\{I_N\}$ 是单调递增的非负可测（事实上是非负可积）函数列，而且 $I_N \to I(N \to \infty)$，根据单调收敛定理：

$$\lim_N \int I_N = \int I = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}).$$

再结合 a_n 的定义可知

$$\int I = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = s < \infty.$$

所以 I 是可积函数，而且

$$\int I = \int \left(\int f \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = s.$$

(c)$|f(x,y)|$ 是支撑在一些小方格上的函数，且在形如 $[n,n+1)\times[n,n+1)$ 和 $[n,n+1)\times[n,n+2)$ 的小方格上取值为 a_n，所以，适当地做截断然后利用单调收敛定理立刻得到：

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots = \infty.$$

□

19. (**Stein 中译本,P72.18**) 令 f 是 $[0,1]$ 上的可测有限值函数，假定 $|f(x)-f(y)|$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，证明 f 在 $[0,1]$ 上可积.

证明. 由 Fubini 定理，对任何一个固定的 y，$F^y(x) = |f(x) - f(y)|$ 对 $x \in [0,1]$ 可积，a.e. $y \in [0,1]$.

所以 $f(x) - f(y)$ 对 $x \in [0,1]$ 可积，a.e. $y \in [0,1]$. 所以，任取一个 $y \in [0,1]$ 使得 $f(x) - f(y)$ 关于 x 可积，则 $f(x) = (f(x) - f(y)) + f(y)$ 对 $x \in [0,1]$ 可积. □

20. (**Stein 中译本,P72.19**) 假定 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上是可积函数，则对每个 $\alpha > 0$，令 $E_\alpha = \{|f| > \alpha\}$，证明：

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_0^\infty m(E_\alpha) \mathrm{d}\alpha.$$

证明. 令 $F : \mathbb{R}^d \times (0,\infty] \to \mathbb{R}$，$F(x,\alpha) = \chi_{E_\alpha}(x)$，因为 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数，所以 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上几乎处处有限，即存在 α_x，使得 $|f(x)| \le \alpha_x$，a.e. $x \in \mathbb{R}$. 对 $F(x,\alpha)$ 用非负可测函数的 Fubini 定理可得：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d \times (0,\infty]} F(x,\alpha)\, \mathrm{d}(x,\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \chi_{E_\alpha}(x) \mathrm{d}\alpha \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} \mathrm{d}\alpha \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另一方面，由非负可测函数的 Fubini 定理并依据定义：

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0,\infty]} F(x,\alpha)\, \mathrm{d}(x,\alpha) = \int_{(0,\infty]} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_\alpha}(x) \right) \mathrm{d}\alpha = \int_0^\infty m(\alpha) \mathrm{d}\alpha.$$

□

21. (**Stein 中译本，P72，题 20**) 可测集的某些截面可能存在不可测的问题，可以通过限制在可测函数和 Borel 集上加以避免. 事实上，这是因为有如下结论：

假定 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的 Borel 集，则对每个 y，截面 E^y 都是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集.

证明该结论.

证明. 我们记 $C \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ 为 $C = \{E \in 2^{\mathbb{R}^2} : E^y$是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集$\}$. 我们只要证明 C 是一个 σ 代数以及 C 包含 $\mathbb{R}^2$ 中所有开集，一旦证明了这一点，则 $\mathbb{R}^2$ 中 Borel σ-代数 $\mathscr{B}$ 就满足 $\mathscr{B} \subset C$（根据定义，$\mathscr{B}$ 是包含一切 $\mathbb{R}^2$ 的开集的最小 σ-代数.）

首先证明 C 是一个 σ 代数. (1)$\mathbb{R}^{2y} = \mathbb{R}^1$，$\varnothing^y = \varnothing$，所以 $\mathbb{R} \in C$，$\varnothing \in C$；(2) 若 $E_i \in S$，$i = 1, 2, \cdots$，则 E_i^y 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Borel 集，这说明 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i^y$ 也是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Borel 集. 根据定义，$(\bigcup_{i=1}^\infty E_i)^y = \{x : (x,y) \in \bigcup_{i=1}^\infty E_i\} = \bigcup_{i=1}^\infty \{x : (x,y) \in E_i\} = \bigcup_{i=1}^\infty E_i^y$，所以 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in C$，所以 C 对可数并是封闭的；(3) 若 $E_1, E_2 \in S$，则 E_1^y 和 E_2^y 是 $\mathbb{R}^1$ 中 Borel 集，所以 $E_1^y - E_2^y$ 也是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Borel 集，而根据定义 $(E_1 - E_2)^y = \{x : (x,y) \in E_1, (x,y) \notin E_2\} = E_1^y - E_2^y$，所以 C 对集合的差也封闭. 综上所述 C 是一个 σ 代数.

再说明 C 包含 $\mathbb{R}^2$ 的所有开集. $\forall O \subset \mathbb{R}^2$ 是开集，考虑 $O^y = \{x : (x,y) \in O\}$. $\forall x \in O^y$，$(x,y) \in O$，于是存在 $B_r(x,y) \subset O$，所以 $(x-r, x+r) \subset O^y$，所以 x 是 O^y 的内点，以上证明了 O^y 是开集，从而是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Borel 集，所以 $O \in C$，所以 $C \supset \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{B}$ 指的是 $\mathbb{R}^2$ 中的 Borel σ-代数，证明完毕. □

22. (**Stein 中译本，P72，题 21**) 假设 f 和 g 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数.

(a) 证明 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上是可测的.

(b) 证明若 f 和 g 在 $\mathbb{R}^d$ 上均可积，则 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上也可积.

(c) 将 f 和 g 的卷积定义为：

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

证明对 a.e. x，$f * g$ 良定义.

(d) 证明，只要 f 和 g 可积，$f * g$ 就可积，而且：

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

当 f 和 g 非负时，等号成立.

(e) 可积函数 f 的 Fourier 变换定义为：

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \mathrm{d}x.$$

验证 $\widehat{f}$ 是有界函数而且关于 ξ 连续. 证明，对每个 ξ，都有：

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

(a)

证明. 若 $O \subset \mathbb{R}$ 是开集，它在映射 $(x,y) \mapsto g(y)$ 下的原像集为 $\mathbb{R}^d \times g^{-1}(O)$，因为 O 是开集，g 作为 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 的映射是可测函数，于是 $g^{-1}(O)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集，所以 $\mathbb{R}^d \times g^{-1}(O)$ 是 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的可测集. 所以 $(x,y) \mapsto g(y)$ 是可测函数.

再考虑 O 在 $(x,y) \mapsto f(x-y)$ 下的原像集，事实上该映射可以写成 $f \circ T$，其中 T 是 $\mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$ 的线性映射 $(x,y) \mapsto x-y$. 则 O 的原像集为 $T^{-1}(f^{-1}(O))$. 因为 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数，所以 $f^{-1}(O)$ 是可测集. 记 $E = f^{-1}(O)$ 为可测集，则以下只需要证明 $T^{-1}(E)$ 是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上可测集.

注意，若 O 是开集，则 $T^{-1}(O)$ 也是开集，所以，若 E 是 G_δ 集，则取可数交可知 $T^{-1}(E)$ 也是 G_δ 集. 现在令 $G_k = T^{-1}(E) \cap B(0,k)$，对任何 $\mathbb{R}^d$ 中的开集 O，我们计算 $m(T^{-1}(O) \cap B(0,k))$. 则 $\chi_{T^{-1}(O)\cap B(0,k)} = \chi_{T^{-1}(O)}\chi_{B(0,k)} = \chi_O(x-y)\chi_{B(0,k)}(y)$.

根据测度的平移不变性，以及非负可测函数的 Fubini 定理，我们有：

$$
\begin{aligned}
m(T^{-1}(O)\cap B(0,k)) &= \int \chi_O(x-y)\chi_{B(0,k)}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\int \chi_O(x-y)\mathrm{d}x\right)\chi_{B(0,k)}(y)\mathrm{d}y \\
&= \int \left(\int \chi_O(x)\mathrm{d}x\right)\chi_{B(0,k)}(y)\mathrm{d}y \\
&= m(O)\int \chi_{B(0,k)}(y)\mathrm{d}y \\
&= m(O)m(B(0,k))
\end{aligned}
$$

若 E 是零测集，则存在开集序列 $\{O_n\}$ 使得 $E\subset O_n$ 且 $m(O_n)\to 0$，根据上面的结果取极限 $n\to\infty$ 可知 $m(G_k)=0$，所以再取极限 $k\to\infty$ 可知 $m(E)=0$. 若 E 不是零测集，则它可写成一个 G_δ 集和一个零测集的差，取原像可知 $T^{-1}(E)$ 是可测集.

以上说明了 $f(x-y)$ 和 $g(y)$ 都是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的可测函数，因而它们的乘积也是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上可测函数. □

(b)

证明. 考虑 $|f(x-y)g(y)|$，则 $|f(x-y)g(y)|$ 非负可测，根据非负可测函数的 Fubini 定理并结合积分的平移不变性可知：

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2d}}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\mathrm{d}y\right) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

最后的小于号用到 $|f(x)|$ 和 $|g(y)|$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. □

(c)

证明. 在这一小问中要求对可积函数 f 和 g 定义卷积. 因为 $f(x-y)g(y)$ 是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上可积函数，所以由 Fubini 定理可知，对几乎处处 $x\in\mathbb{R}^d$，$f(x-y)g(y)$ 关于 y 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积. □

(d)

证明. 由 (b) 可知 $f*g$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上可积，于是可以对卷积 $f*g$ 用 Lebesgue 积分的三角不等式

并结合 Fubini 定理以及 b 的结果可知：

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\mathrm{d}y\right) \\
&= \|f\|_{L^1\mathbb{R}^d}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
$$

而且，当 f 和 g 均非负可积时，等号成立. □

(e)

证明.

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)||e^{2\pi i x\cdot\xi}|\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因为 f 可积，所以积分 $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x$ 是一个不依赖于 ξ 的有限实数，所以 $\widehat{f}(\xi)$ 是有界函数. 因为 $\widehat{f}(\xi)$ 被可积函数 $f(x)$ 控制，所以，由积分的控制收敛定理（LDC）可知：

$$
\lim_{\xi\to\xi_0}\widehat{f}(\xi)=\lim_{\xi\to\xi_0}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\xi\to\xi_0}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{2\pi i x\cdot\xi_0}\mathrm{d}x=\widehat{f}(\xi_0).
$$

所以 $\widehat{f}$ 关于 ξ 连续且有界.

最后，对每个 ξ，我们计算 $(\widehat{f*g})(\xi)$：

$$
\begin{aligned}
(\widehat{f*g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\cdot e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathrm{d}y\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}x\right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d}g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x\right) \\
&= \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

□

23. (**Stein 中译本，P72，题 22，Riemann-Lebesgue 引理**) 证明，若 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，其 Fourier 变换为：

$$
\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x,
$$

则，当 $|\xi|\to\infty$ 时，$\widehat{f}(\xi)\to 0$.

证明. 本题的关键是运用 Fourier 变换的周期性. 考虑 $\xi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{|\xi|^2}$，于是，根据 Lebesgue 积分的平移不变性：

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} + f(x-\xi')e^{-2\pi i(x-\xi')\xi}]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} + f(x-\xi')e^{-2\pi i x\xi + 2\pi i\cdot\frac{1}{2}\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2}}]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} + f(x-\xi')e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot e^{\pi i}]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x) - f(x-\xi')]e^{-2\pi i x\xi}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

根据题 2 的结果，$\lim_{h\to 0}\int |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$. 当 $|\xi| \to \infty$ 时，$|\xi'| = \frac{1}{2|\xi|} \to 0$，于是：

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-\xi')|\mathrm{d}x \to 0 \quad (|\xi| \to \infty).$$

□

24. (**Stein 中译本, P73, 题 23**) 不存在函数 $I \in L^1(\mathbb{R}^d)$，使得对所有 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，都有 $f * I = f$.

证明. 假设存在，因为 f 和 I 都可积，于是对等式两边同时做 Fourier 变换并结合题 21 中得到的性质可得

$$\widehat{f}(\xi)\widehat{I}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

在 $\mathbb{R}^d$ 逐点成立.

注意假设条件是以上对 L^1 中每个函数 $\widehat{f}$ 都成立，于是只能是：

$$\widehat{I}(\xi) \equiv 1.$$

但是，我们指出常值函数 1 不可能是一个 L^1 函数的 Fourier 变换，这是由于 Riemann-Lebesgue 引理要求当 $|\xi| \to \infty$ 时由 $|\widehat{I}(\xi)| \to 0$，矛盾. □

25. (**Stein 中译本，P72，题 24**) 考虑卷积：

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

(a) 证明，当 f 可积且 g 有界时，$f * g$ 一致连续;

(b)（在 (a) 的条件下）若 g 可积，则当 $|x| \to \infty$ 时，$(f * g)(x) \to 0$.

证明. (a) 因为 $g(y)$ 有界，所以存在 $M > 0$ 使得 $|g(y)| \leq M$，$\forall y \in \mathbb{R}^d$.

$\forall \varepsilon > 0$，因为 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，所以存在 $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f - h\| < \varepsilon/3M$.

所以，对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$，

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)| &\leq M \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)|\mathrm{d}y \\
&= M\|f_{x_1} - f_{x_2}\| \\
&\leq M(\|f_{x_1} - h_{x_1}\| + \|f_{x_2} - h_{x_2}\| + \|h_{x_1} - h_{x_2}\|).
\end{aligned}$$

这里，$f_{x_1}(y)=f(x_1-y)$，$f_{x_2}(y)=f(x_2-y)$，等等.

根据 Lebesgue 积分的平移以及反射不变性，$\|f_{x_1}-h_{x_1}\|=\|f_{x_2}-h_{x_2}\|=\|f-h\|\le\frac{\varepsilon}{3M}$. 另一方面，对于 $\|h_{x_1}-h_{x_2}\|$，由于 h 紧支撑，所以当 x_1 和 x_2 之间的距离足够近时，存在一个紧集 K 使得 h_{x_1} 和 h_{x_2} 都支撑在 K 上. 注意 h 是支撑在紧集 K 上的连续函数，所以 h 在 K 上一致连续，因此对于 $\frac{\varepsilon}{3Mm(K)}$，存在 $\delta>0$，使得只要 $|z_2-z_1|<\delta$，就有 $|h(z_2)-h(z_1)|<\varepsilon/(3Mm(K))$，特别地，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时：

$$\|h_{x_1}-h_{x_2}\|=\int_{\mathbb{R}^d}|h(x_1-y)-h(x_2-y)|\mathrm{d}y\le\int_K\frac{\varepsilon}{3m(K)}\mathrm{d}y=\varepsilon/3M.$$

作为本题的结果，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，就有：

$$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)|\le\varepsilon.$$

所以 $f*g$ 一致连续. □

(b)

证明. 若 g 是有界且是可积的，同与 (a) 相同的策略：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y&\le\int_{\mathbb{R}^d}|h(x-y)g(y)|\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)-h(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y\\&\le\int_{x-y\in K}|h(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y+M\|f-h\|\\&\le N\int_{y\in x+K}|g(y)|\mathrm{d}y+M\|f-h\|.\end{aligned}$$

其中 N 是 h 在其支撑集上的上界，$\forall\varepsilon>0$，我们取 $\|f-h\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 另外，因为 g 可积，根据积分关于区间的绝对连续性可知存在 $B(0,k)$ 使得 $\int_{B(0,k)^c}|g(y)|\mathrm{d}y<\frac{\varepsilon}{2N}$，于是当 $|x|>k$ 时我们有 $\int_{y\in x+K}|g(y)|\mathrm{d}y\le\int_{y\in B(0,k)^c}|g(y)|\mathrm{d}y<\frac{\varepsilon}{2N}$，由此我们得到，$\forall\varepsilon>0$，存在 k，使得当 $|x|>k$ 时，我们有：

$$|(f*g)(x)|\le\varepsilon.$$

□

26. (**Stein 中译本，P73，题 25**) 对每个 $\varepsilon>0$，函数 $F(\xi)=\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\varepsilon}}$ 是某个 L^1 可积函数的 Fourier 变换.

证明. 我们考虑好核：

$$K_\delta(x)=e^{-\pi|x|^2/\delta}\delta^{-d/2}.$$

考虑积分：

$$f(x)=\int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\mathrm{d}\delta.$$

令 $g(\delta,x)=K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}$，则根据非负可测函数的 Fubini 定理以及好核的积分 $\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)\mathrm{d}x=1$ 可知：

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty|g(\delta,x)|\mathrm{d}\delta\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\mathrm{d}\delta\right)<\infty.$$

所以 g 是可积的，根据 Fubini 定理可知 $f(x)=\int_0^\infty g(\delta,x)\mathrm{d}\delta\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 我们计算 f 的 Fourier 变换，事实上：

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}\delta.$$

由 Fourier 反演公式可知，Gauss 函数 $G(\xi)=e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi ix\cdot\xi}$ 可以写成如下的 Fourier 变换：

$$G(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{G}(y)e^{2\pi i\xi\cdot y}\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x-y)e^{2\pi i\xi\cdot(y-x)}\cdot e^{2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}y.$$

根据积分的反射以及平移不变性：

$$G(\xi)=e^{2\pi i\xi\cdot x}\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}\mathrm{d}y.$$

所以：

$$\widehat{K}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)e^{-2\pi ix\cdot x}\mathrm{d}x=e^{-\pi\delta|\xi|^2}.$$

这证明了：

$$\widehat{f}(\xi)=\int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}\mathrm{d}\delta.$$

根据 Gamma 函数的定义 $\mathit{\Gamma}(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$ 可以计算得

$$\widehat{f}(\xi)=\pi^{-\varepsilon}\mathit{\Gamma}(\varepsilon)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}.$$

□

27. (**Stein 中译本，P74，问题 4**) 我们从第一章习题 8 已经看出，若 E 是 $\mathbb{R}^d$ 的可测集，L 是 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的线性变换，则 $L(E)$ 也是可测集，且若 E 的测度为 0，则 $L(E)$ 也是如此. 事实上，一般地，我们有：

$$m(L(E))=|\det L|m(E).$$

作为一个特殊情形，Lebesgue 测度在旋转下是不变的.（这个特殊情况的证明参见下一章的习题 26）

(a) 首先考虑 $d=2$ 的情况，若 L 是严格上三角变换：$(x,y)\mapsto(x',y')=(x+ay,y)$，则有：

$$m(L(E))=m(E).$$

(b) 类似地，若 L 是严格下三角变换，则同样有 $m(L(E))=m(E)$. 一般地，L 可以分解为 L_1DL_2，其中 L_j 是严格上（下）三角而 D 是对角的，由此说明 $m(L(E))=m(E)$ 对一般的线性变换是成立的.

证明. (a) 采用 Fubini 定理进行计算：

$$\begin{aligned}
m(L(E)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{L(E)}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \chi(x-ay,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x-ay,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= m(E).
\end{aligned}$$

(b) 由线性代数的知识可知任何线性变换可以分解为 $L = L_1DL_2$，其中 L_1 是下三角变换，L_2 是上三角变换，D 是对角变换. 我们做适当调整可以使 L_1 和 L_2 的对角元都是 1，此时 $\det L_1 = \det L_2 = 1$，所以 $\det D = \det L = \delta_1\delta_2$，其中 δ_1 和 δ_2 是 D 的两个对角元.

由第一章习题 7 的结论可知，$m(D(E)) = |\delta_1\delta_2|m(E)$. 所以：

$$m(L(E)) = m(L_1DL_2(E)) = m(L_1D(E)) = m(D(E)) = |\delta_1\delta_2|m(E) = |\det L|m(E).$$

□

28. (**Stein 中译本,P73, 问题 1**) 若 f 在 $[0,2\pi]$ 上是可积的，则当 $|n|\to\infty$ 时，$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \to 0$. 作为一个推论，若 E 是 $[0,2\pi]$ 的可测子集，则当 $n\to\infty$ 时，对任何实数序列 $\{u_n\}$，都成立：

$$\int_E \cos^2(nx+u_n)\mathrm{d}x \to \frac{m(E)}{2}, \quad (n\to\infty).$$

证明. 我们回忆 Riemann-Lebesgue 引理，对于可积函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，其 Fourier 变换定义为 $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x$. Riemann-Lebesgue 告诉我们 $\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi) = 0$. 特别地，对 $f(x) \in L^1([0,2\pi])$，我们使用函数 $f(x)\cdot\chi_{[0,2\pi]}(x)$ 的 Riemann-Lebesgue 定理立即得到：

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[0,2\pi]}(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \to 0(n\to\infty).$$

作为推论，对于 E 是 $[0,2\pi]$ 的可测子集，我们计算积分：

$$\int_E \cos^2(nx+u_n)\mathrm{d}x = \int_E \frac{1}{2}(\cos(2nx+2u_n)+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_E \cos(2nx+2u_n)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m(E).$$

对于第一项，实际上我们有：

$$\int_E \cos(2nx+2u_n)\mathrm{d}x = \int_E \cos(-2nx-2u_n)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_E e^{-i2\pi nx - i2\pi u_n}\mathrm{d}x\right).$$

注意到，$e^{-i2\pi u_n}$ 在 E 是可积的（事实上积分为 $m(E)e^{-i2\pi u_n}$，根据我们已经得到的结果：

$$\int_E e^{-i2\pi nx - i2\pi u_n}\mathrm{d}x \to 0, \quad (n\to\infty).$$

所以，取极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^2(nx+u_n)\mathrm{d}x = \frac{m(E)}{2}.$$

□

29. (**Stein 中译本,P73, 问题 2,Cantor-Lebesgue 定理的 L^1 情形**[1])

设 $A_n = a_n\cos nx + b_n\sin nx$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ 在一个正测集上逐点收敛，则当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to 0$ 且 $b_n\to 0$.

证明. (本题的思路来源于网络) 设定为：$\sum_n A_n(x)$ 在正测度集 E 上逐点收敛，根据可测函数的极限仍然是可测函数可知 $\sum_n A_n(x)$ 定义了一个在 E 上逐点收敛的可测函数，根据 Egorov 定理，存在一个正测度集 F，F 和 E 的测度之差可以任意小，使得 $\sum_n A_n(x)$ 在 F 上一致收敛. 此时，根据函数列一致收敛性的 Cauchy 准则可知，在 F 上成立 $A_n(x)\rightrightarrows 0$.

我们现在将 A_n 重新变换为 $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+d_n)$，其中 d_n 是实数序列. 注意 $A_n(x)^2$ 在 E 上也一致收敛到零，所以:

$$(a_n^2+b_n^2)\cos^2(nx+d_n)\rightrightarrows 0(n\to\infty)$$

我们根据 **Stein 中译本，P73，问题 1** 的结果，对上式左端积分可得

$$\int_{F\cap[k\pi,(k+2)\pi]}(a_n^2+b_n^2)\cos^2(nx+d_n)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m(F\cap[k\pi,(k+2)\pi])(a_n^2+b_n^2)\to 0(n\to\infty).$$

其中，整数 k 的选取是使得 $F\cap[k\pi,(k+2)\pi]$ 是正测度的（这总是可以做到，因为 F 是正测度的，而我们知道对 $[0,2\pi]$ 做 π 整数倍平移不影响积分值，所以可以将 $F\cap[k\pi,(k+2)\pi]$ 当作 $[0,2\pi]$ 的可测子集而运用问题 1 的结果）. 因为 $m(F\cap[k\pi,(k+2)\pi])>0$ 且是一个和 n 无关的常数，因此有：

$$a_n^2+b_n^2\to 0(n\to\infty).$$

这说明 $a_n\to 0$ 且 $b_n\to 0(n\to\infty)$. □

评注 1. 这道题的证明非常精彩！值得反复回味（其实就是高中数学三角函数变换）.

30. (**Stein 中译本，P73，问题 3，依测度收敛**) 对于 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数序列 $\{f_k\}$，如果对任何 $\varepsilon>0$，都成立：

$$\text{当 } k,l\to\infty \text{ 时，} m(\{x:|f_k(x)-f_l(x)|>\varepsilon\})\to 0,$$

则称 $\{f_k\}$ 是**依测度收敛**的 Cauchy 列（形象地说，依测度收敛指的是不满足 Cauchy 条件的点越来越“少”，或者用概率论的语言，概率越来越“低”）.

$$\text{当 } k,l\to\infty \text{ 时，} m(\{x:|f_k(x)-f_l(x)|>\varepsilon\})\to 0,$$

[1]这一定理通常在 L^2 语言下叙述.

如果对任何 $\varepsilon > 0$，都成立：当 $k \to \infty$ 时，$m(\{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$，则称 $\{f_k\}$ 是**依测度收敛**到 f（根据可测函数的极限性质，f 当然也自动是可测函数）.

问题：证明，若一个可积函数序列 $\{f_k\}$ 在 L^1 意义下收敛到 f 吗，则 $\{f_k\}$ 依测度收敛到 f. 反过来是否成立？

评注 2. 这个习题解释了依测度收敛和 L^1 收敛的联系，注意区分 L^1 收敛、依测度收敛和逐点收敛的概念.

证明. 证明是利用 Tchebychev 不等式：

$$m(\{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x.$$

因为 $f_k \to f$ 在 L^1 下，所以 $\forall \delta > 0$，对于 $\delta\varepsilon$，存在 N 足够大，使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_k(x) - f(x)| < \delta\varepsilon, \quad \forall k \geq N.$$

此时有

$$m(\{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \delta\varepsilon = \delta.$$

这就证明了 L^1 收敛蕴含依测度收敛. 这主要是因为 Tchebychev 不等式告诉我们形如 $\{g(x) > l\}$ 的集合的测度可以被积分控制，而 L^1 收敛正是 "积分的收敛".

一般地，该结论反过来不对，即依测度收敛不能推出 L^1 收敛. 例如考虑可测函数列 $f_n(x) = \begin{cases} n, x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$ 该函数显然依测度收敛到 $f(x) \equiv 0$，但是，考虑 L^1 范数：

$$\|f_n - f\| = n \cdot \frac{1}{n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

这说明 f_n 在 L^1 范数下不收敛到 f. $\square$