第三章习题：微分与积分

2023 年 5 月 14 日

1. (**Stein 中译本，P108，题 1**) 设 φ 是 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数，满足 $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. 设 $K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/\delta)$，$\delta > 0$.

   (a) 证明 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核;

   (b) 假设 φ 有界且支撑在有界集上，证明 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是恒同逼近;

   (c) 证明，若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核，则对每个 $\delta > 0$，卷积 $f * K_\delta$ 是可积的而且 $\|(f * K_\delta) - f\|_{L^1} \to 0(\delta \to 0)$.

证明. (a) 用 Lebesgue 积分的伸缩相对不变性可知 $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\mathrm{d}x = 1$，$\forall\delta > 0$.

另外，$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|\mathrm{d}x = \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x/\delta)|\mathrm{d}x = \delta^{-d}\delta^d\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\mathrm{d}x = \|\varphi\|_{L^1}$，所以 $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta|$ 有界.

最后，$\forall\eta > 0$，

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\eta} K_\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq\eta}\delta^{-d}|\varphi(x/\delta)|\mathrm{d}x &= \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x/\delta)|\chi_{\{|x|\geq\eta\}}\mathrm{d}x \\ &= \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|\chi_{|x|\geq\eta}(\delta x)\mathrm{d}x \\ &\leq \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \|\varphi\|_{L^1}\delta^{-d} \to 0(\delta \to 0).\end{aligned}$$

以上说明 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核.

(b) 我们要证明以下两个不等式：

$$|K_\delta(x)| \leq \frac{c}{\delta^d},$$

其中 c 是一个和 δ 和 x 无关的常数. 另外：

$$|K_\delta(x)| \leq \frac{c'\delta}{|x|^{d+1}}.$$

其中 c' 也是一个和 x 与 δ 无关的常数.

其中，由 φ 的可积性立刻知第一个不等式成立，对于第二个不等式，因为 φ 是有限支撑的，所以存在一个球 $B(0,r)$ 使得 $B(0,r)$ 包含 φ 的支撑集.

若 x/δ 不在 φ 的支撑集上，则不用证明，如果 x/δ 在 φ 的支撑集上，则只需证明

$$|\varphi(x/\delta)| \leq \frac{c'\delta^{d+1}}{|x|^{d+1}}.$$

我们记 $y = x/\delta$，则只需证明

$$|\varphi(y)| \le \frac{c'}{|y|^{d+1}}.$$

这完全是 φ 的性质，事实上，若 y 在 φ 的支撑集内，则 $|y| < r$，因此：

$$|\varphi(y)| = M \cdot \frac{r^{d+1}}{r^{d+1}} \le \frac{Mr^{d+1}}{|y|^{d+1}}.$$

其中 M 是 φ 的上界，我们取 $c' = Mr^{d+1}$，则 c' 是一个只和 φ 有关的常数.

(c) 与第二章习题 21 类似（用非负可测函数函数的 Fubini 定理进行估计）可知 $f * K_\delta$ 是可积的. 我们令

$$\begin{aligned}
|\Delta_\delta| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)\mathrm{d}y - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)K_\delta(y)\mathrm{d}y\right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)||K_\delta(y)|\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

运用 Fubini 定理可知：

$$\|\Delta_\delta\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^1(x)} |K_\delta(y)|\mathrm{d}y.$$

$\forall \varepsilon > 0$，根据 L^1 范数的整体连续性，存在 $\eta > 0$，使得当 $|y| < \eta$ 时，成立：

$$\|f(x-y) - f(x)\|_{L^1} \le \varepsilon.$$

所以，$\|\Delta_\delta\|_{L^1}$ 有如下的分段估计：

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\delta\|_{L^1} &\le \int_{|y|\le\eta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^1(x)}|K_\delta(y)|\mathrm{d}y + \int_{|y|>\eta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^1(x)}|K_\delta(y)|\mathrm{d}y \\
&\le \|f(x-y) - f(x)\|_{L^1} + 2\|f\|_{L^1} \int_{|y|>\eta} |K_\delta(y)|\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

因为 $\int_{|y|>\eta} |K_\delta(y)|\mathrm{d}y \to 0(\delta \to 0)$，所以对所有足够小的 δ 都有 $\int_{|y|>\eta} |K_\delta(y)|\mathrm{d}y < \varepsilon$，所以：

$$\|\Delta_\delta\|_{L^1} \le (2\|f\|_{L^1} + 1)\varepsilon.$$

□

2. (**Stein 中译本，P108，题 2**) 假设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是好核，满足：

   (i) 对所有 $\delta > 0$，都有 $|K_\delta(x)| \le A\delta^{-d}$;

   (ii) 对所有 $\delta > 0$，都有 $|K_\delta(x)| \le \frac{c\delta}{|x|^{d+1}}$;

   (iii) 对所有 $\delta > 0$，$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\mathrm{d}x = 0$.

   因此 K_δ 满足恒同逼近条件中的 (i) 和 (ii)，但 K_δ 的积分是 0 而不是 1，证明在这种状况下，若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则：

$$(f * K_\delta)(x) \to 0 \quad \text{for a.e. } x\text{, as } \delta \to 0.$$

证明. 事实上我们任选一族恒同逼近 $\{X_\delta\}_{\delta>0}$，我们断言 $\{X_\delta+K_\delta\}_{\delta>0}$ 也是一族恒同逼近，对于后两条性质将相应的常数合并即可看出，对于积分归一化的性质由积分的线性性可以看出. 对于恒同逼近 $\{X_\delta+K_\delta\}_{\delta>0}$，对 f 的 Lebsegue 集中的任意一点 x 都成立：

$$(f*(K_\delta+X_\delta))(x)\to f(x),\quad (\delta\to 0)$$

另外，对恒同逼近 X_δ，成立：

$$(f*(X_\delta))(x)\to f(x),\quad (\delta\to 0)$$

结合上面两个结果可得：

$$(f*K_\delta)\to 0,\quad (\delta\to 0)$$

注意 f 是 L^1 可积函数，x 是 f 是 Lebesgue 点，a.e.$x\in\mathbb{R}^d$，所以

$$(f*K_\delta)(x)\to 0\quad \text{for a.e. } x, \text{ as } \delta\to 0.$$

□

3. (**Stein 中译本，P108，题 3**) 假设 0 是集合 $E\subset\mathbb{R}$ 的 Lebesgue 密度点. 证明，存在满足如下条件的无穷点列 $\{x_n\}\subset E, x_n\neq 0$，而且成立 $x_n\to 0(n\to\infty)$.

(a) 对所有 n，$-x_n\in E$;

(b) 对所有 n，$x_n\in E$.

证明. (a) 因为 0 是 E 的 Lebesgue 密度点，所以 $\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni 0}}\frac{m(B\cap E)}{m(B)}=1$. 所以，对 $\frac{1}{2}$，存在 N，使得 $\forall n\geq N$，都有

$$\frac{m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)}{\frac{2}{n}}\geq\frac{2}{3}.$$

所以 $m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)\geq\frac{4}{3n}$.

这说明，存在 $x_n\in B(0,\frac{1}{n})\cap E$，$x_n\neq 0$，使得 $m(-x_n\in B(0,\frac{1}{n}))\cap E$，否则，$m(-(B(0,\frac{4}{3n})\cap E)\cap E)=m(\{0\})=0$. 根据 Lebesgue 测度的反射不变性可知：

$$m(-(B(0,\frac{1}{n})\cap E))=m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)\geq\frac{1}{n}.$$

所以此时:

$$m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)\leq m(B(0,\frac{1}{n})-m(-B(0,\frac{1}{n})\cap E))\leq\frac{2}{n}-\frac{4}{3n}=\frac{2}{3n}.$$

这与 $m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)\geq\frac{4}{3n}$ 矛盾.

由此选出一个点列 $\{x_k\}_{k=n}^{\infty}\subset E$，满足 $x_k\neq 0$ 以及 $-x_k\in E$，则 $x_k\in B(0,\frac{1}{k})\Rightarrow x_k\to 0(k\to\infty)$.

(b) 思路类似，与 (a) 同理可得对于 $\frac{2}{3}$，存在 N，使得 $\forall n\geq N$ 都有：

$$m(B(0,\frac{1}{n})\cap E)\geq\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3n}.$$

因此：

$$m(B(0,\frac{1}{2n})\cap E)\geq\frac{2}{3n}.$$

我们断言存在 $x_n\in B(0,\frac{1}{2n})\cap E$，$x_n\neq 0$，使得 $2x_n\in B(0,\frac{1}{n})\cap E$，否则，$\forall x\in B(0,\frac{1}{2n})\cap E$，$2x\notin E$. 因此，$m(2(B(0,\frac{1}{2n})\cap E)\cap E)=0$. 但是，根据 Lebesgue 测度的伸缩相对不变性，$m(2(B(0,\frac{1}{2n})\cap E))\geq\frac{4}{3n}$，所以：

$$m(E\cap B(0,\frac{1}{n}))\leq m(B(0,\frac{1}{n})-2(B(0,\frac{1}{2n})\cap E))\leq\frac{2}{n}-\frac{4}{3n}=\frac{2}{3n}.$$

这与 $m(E\cap B(0,\frac{1}{n}))\geq\frac{4}{3n}$ 矛盾. 与 (a) 相同的论证说明 $\{x_k\}_{k\geq n}$ 满足题给条件. □

4. (**Stein 中译本，P108，题 4**) 证明，若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积，且 f 不恒为零，则对某个 c 和所有 $|x|\geq 1$，

$$f^*(x)\geq\frac{c}{|x|^d}.$$

由此得出，f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积. 接着证明只要 $\|f\|_{L^1}=1$，弱型估计就是 “最优的”. 其中弱型估计指的是：

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\leq\frac{c}{\alpha}.$$

对所有 $\alpha>0$ 成立.

“最优的” 含义是：若 f 支撑在单位球上而且满足 $\int|f|=1$，则对某个 $c'>0$，以及所有充分小的 α，成立：

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\geq\frac{c'}{\alpha}.$$

证明. 第一部分，考虑如下的简单估计：

$$\begin{aligned}f^*(x)&=\sup_{\substack{B\\ x\ni B}}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y\\&\geq\frac{1}{m(B(0,r))}\int_{B(0,r)}|f(y)|\mathrm{d}y\\&\geq\frac{1}{m(B(0,|x|))}\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{v_d|x|^d}\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

在上述估计中我们取 $r>|x|\geq 1$. 这里的 $c=\frac{\int_{B(0,1)}|f(y)|\mathrm{d}y}{v_d}$ 的确是一个和 x 无关的常数.

若 f 支撑在单位球上而且 $\int|f|=1$，则以上的简单估计可以变成：

$$f^*(x)\geq\frac{1}{v_d|x|^d}.$$

所以，当 α 足够小（确切地说是 $\frac{1}{v_d\alpha}<1$）时：

$$\{x:f^*(x)>\alpha\}\supset\left\{x:\frac{1}{v_d|x|^d}>\alpha\right\}=\left\{x:|x|^d<\frac{1}{v_d\alpha}\right\}.$$

所以，

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\geq m\left(\left\{x:|x|^d<\frac{1}{v_d\alpha}\right\}\right)=v_d\frac{1}{v_d\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$

□

5. (**Stein 中译本，P109，题 5**) 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^2}, & |x|\le\frac{1}{2},\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

(a) 验证 f 可积;

(b) 对某个 $c>0$ 以及所有的 $|x|\le\frac{1}{2}$，证明如下不等式：

$$f^*(x)\ge\frac{c}{|x|\left(\log\frac{1}{|x|}\right)}.$$

从而得出 Hardy-Littlewood 极大函数 $f^*\notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

证明. (a) 事实上，

$$\int_{|x|\le\frac{1}{2}}\frac{1}{|x|(\log(1/|x|))^2}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(\log 1/x)^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(\log 1/x)^2}\mathrm{d}\log x=2\left.\frac{1}{\log 1/x}\right|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\log 2}.$$

(b) 对 $|x|\le\frac{1}{2}$，我们取 $B=B(0,|x|)$ 是以 0 为中心，$|x|$ 为半径的球，根据 Hardy-Littlewood 极大函数的定义：

$$\begin{aligned}f^*(x)&\ge\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y\\&\ge\frac{1}{2|x|}\int_0^{|x|}\frac{1}{|y|(\log(1/|y|))^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2|x|}\int_0^{|x|}\frac{1}{y\left(\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2|x|}\int_0^{|x|}\frac{1}{\left(\log\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}\log y\\&=\frac{1}{2|x|}\left.\frac{1}{\log\frac{1}{y}}\right|_0^{|x|}\\&=\frac{1}{2|x|\log\frac{1}{|x|}}.\end{aligned}$$

我们计算 $(-\delta,\delta)$ 上 $\frac{1}{|x|\log\frac{1}{|x|}}$ 的积分：

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{|x|\log\frac{1}{|x|}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\delta}\frac{1}{x\log\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\left.\log\log x\right|_0^{\delta}=\infty.$$

这个例子说明，即使函数本身可积，也不能保证极大函数 f^* 可积. □

6. (**Stein 中译本，P109，题 6**) 极大函数的基本不等式在一维情形下还可以有一种等式的写法. 我们定义“单边极大函数”为：

$$f^*_+(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

如果 $E^+_\alpha=\{x\in\mathbb{R}:f^*_+(x)>\alpha\}$，则：

$$m(E^+_\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_{E^+_\alpha}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

证明. 根据提示，我们使用 “Rising-sun Lemma”：

(*Rising-sun* 引理) 设 G 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数，令 E 是使得对某个 $h = h_x > 0$，

$$G(x+h) > G(x)$$

成立的点 x 的集合. 若 E 非空,则它必是开集,因此写成可数个开区间的无交并 $E = \bigcup (a_k, b_k)$($\mathbb{R}$ 中开集的结构定理). 若 (a_k, b_k) 是其中的一个有限区间，则 $G(b_k) - G(a_k) = 0$.

令 $F(x) = \int_0^x |f(y)|\mathrm{d}y - \alpha x$，对 F 使用 Rising-sun 引理可知，

$$E_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R} : F(x+\alpha) > F(x)\} = \bigsqcup_{k\geq 1} (a_k, b_k).$$

其中，对每个有限开区间 (a_k, b_k)，成立 $F(a_k) = F(b_k)$，即：

$$\int_{a_k}^{b_k} |f(y)|\mathrm{d}y = \alpha(a_k - b_k).$$

所以，对每个区间的测度，我们有公式：

$$m(a_k, b_K) = \frac{1}{\alpha}\int_{(a_k,b_k)} |f(y)|\mathrm{d}y.$$

最后，根据 Lebesgue 测度的可加性以及积分的区域可加性可知：

$$m(E_\alpha^+) = \sum_k m(a_k, b_k) = \sum_k \frac{1}{\alpha}\int_{(a_k,b_k)} |f(y)|\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha^+} |f(y)|\mathrm{d}y.$$

这是弱型不等式在一维情形下的等式版本. □

7. (**Stein 中译本，P109，题 7**)

证明. 因为 E^c 可测，于是对几乎处处 $x \in E^c$，成立

$$\lim_{\substack{x\in I\\ m(I)\to 0}} \frac{m(I\cap E^c)}{m(I)} = 1.$$

特别地 I 在 $[0,1]$ 的子区间中取. 但是，根据题给条件可知

$$m(E^c \cap I) = m(I) - m(E\cap I) \leq (1-\alpha)m(I).$$

所以对所有（事实上，以下不等式和 x 无关）$x \in E^c$，都成立

$$\frac{m(I\cap E^c)}{m(I)} \leq 1 - \alpha < 1.$$

根据极限的保序性可知 $\lim_{\substack{x\in I\\ m(I)\to 0}} \frac{m(I\cap E^c)}{m(I)} = 1$ 对所有 $x \in E^c$ 不成立，但是同时该命题对几乎处处 $x \in E^c$ 成立，所以 $m(E^c) = 0$，$m(E) = 1$. □

8. (**Stein 中译本，P109，题 8**) 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上正测度集，是否存在序列 $\{s_n\}_{n\geq 1}$，使得:

$$m\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A+s_n)\right)^c\right) = 0$$

证明. 因为 A 是可测集，所以对几乎处处 $x \in A$，x 是 A 的 Lebesgue 密度点，即成立：

$$\lim_{\substack{x \ni I \\ m(I) \to 0}} \frac{m(I \cap A)}{m(I)} = 1.$$

选取一个满足条件的 $x \in A$，$\forall \varepsilon > 0$，存在一个长度足够小的（不妨是闭）区间 I_ε，使得 $x \in I_\varepsilon$ 而且 $m(I_\varepsilon \cap A) \geq (1-\varepsilon) m(I_\varepsilon)$. 设 I_ε 的区间长度是 ℓ_ε，不妨设 $\ell_\varepsilon < 1$.

我们计划用足够多的 I_ε 的平移来覆盖 $B_N = [-N, N]$，令 $K(N, \varepsilon) = \lceil \frac{2N}{\varepsilon} \rceil$ 使得 $[-N, N] \subset \bigcup_{k=-K(N,\varepsilon)}^{K(N,\varepsilon)} I_\varepsilon + t_k$，其中 $t_k = k\ell_\varepsilon$，则每个区间至多在端点处相交. 根据 Lebesgue 测度的平移不变性可知，对每个 k：

$$m((A + t_k) \cap (I_\varepsilon + t_k)) = m((A \cap I_\varepsilon) + t_k) = m(A \cap I_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)\ell_\varepsilon.$$

所以对每个 k 都有：

$$m((B_N - (A + t_k)) \cap (I_\varepsilon + t_k)) \leq \varepsilon \ell_\varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned}
m\left(B_N - \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + t_k)\right)\right) &= m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (B_N - (A + t_k))\right) \\
&= m\left(\bigcup_{j=-K(N,\varepsilon)}^{K(N,\varepsilon)} \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (B_N - (A + t_k)) \cap (I_\varepsilon + t_j)\right) \\
&\leq m\left(\bigcup_{j=-K(N,\varepsilon)}^{K(N,\varepsilon)} (A + t_j)^c \cap (I_\varepsilon + t_j)\right) \\
&\leq 2K(N, \varepsilon)\varepsilon\ell_\varepsilon \\
&\leq 2\left(\frac{2N}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon \to 0 (\varepsilon \to 0).
\end{aligned}$$

所以 $m\left(B_N - \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + t_k)\right)\right) = 0$，对 N 取并可得 $m\left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + t_k)\right)^c\right) = 0$. □

评注 1. 这里的核心是，把 $[-N, N]$ 用区间覆盖后，我们保证 A 的平移的并能够覆盖其中的大部分，从而通过改变 ε 说明 A 的平移并在 $[-N, N]$ 中的补集是零测度的，从而 A 在 $\mathbb{R}$ 中的补集是零测度的.

9. (**Stein 中译本，P109，题 9**) 令 F 为 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集，且 $\delta(x)$ 是 x 到 F 的距离，即

$$\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}.$$

显然，只要对 $x \in F$ 就有 $\delta(x + y) \leq |y|$.

证明更加精细的估计：

$$\delta(x + y) = o(|y|), \quad \text{a.e. } x \in F.$$

证明. 我们设 x 是 F 的 Lebesgue 密度点，根据定义可知 $\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ B \ni x}} \frac{m(B \cap F)}{m(B)}$，所以 x 在 F 的闭包中（否则 x 在 $\mathbb{R} \backslash \overline{F}$，此时存在一个球 $B(x, r)$ 和 B 无交），因为 F 闭集，所以 $x \in F$，所以 $\delta(x) = d(x, F) = 0$.

考虑区间 $[x,x+|y|]$，我们指出 $\delta(x+|y|)$ 有上界 $|y|-m(F\cap[x,x+|y|])$. 对于 $y<0$ 的情形，考虑 $[x-|y|,x]$ 可得类似的估计，因此，一般地，我们有：

$$\frac{\delta(x+y)}{|y|}\leq\frac{|y|-m(F\cap\overline{I}_{x,x+y})}{|y|}=1-\frac{m\cap\overline{I}_{x,x+y}}{|y|}.$$

其中 $\overline{I}_{x,x+y}$ 指的是以 x 和 $x+y$ 为端点的闭区间，取极限 $|y|\to 0$ 并根据 x 是 Lebesgue 密度点可得：

$$\lim_{|y|\to 0}\frac{\delta(x+y)}{|y|}=1-1=0.$$

□

10. (**Stein 中译本，P109，题 10**) 构造一个 $\mathbb{R}$ 上的单调函数，使其不连续点恰好是 $\mathbb{Q}$.

解. [1]设 $\{r_k\}_{k\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上所有有理数，令函数

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k}.$$

显然 $f(x)$ 是递增函数. 但是，对任何 $r_n\in\mathbb{Q}$，任取 $x>r_n$，有：

$$f(x)=\sum_{r_k<r_n}\frac{1}{2^k}+\sum_{r_n\leq r_k<x}\frac{1}{2^k}>f(r_n)+\frac{1}{2^n}.$$

所以 f 在 r_n 处间断.

但是 f 在 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 各点处都连续. 对于 $y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，取 ε 足够小，使得 $(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ 中不包含有理数 $r_1,\cdots,r_n$（取 $\varepsilon<\min_{1\leq i\leq n}|y-r_i|$ 即可），此时

$$|f(y)-f(x)|\leq\sum_{y-\varepsilon<x<r_k r_k+\varepsilon}\frac{1}{2^k}\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\to 0(n\to\infty).$$

对任何 $x\in(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ 成立，所以 f 在 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 各点连续. 所以，f 的不连续点恰好是 $\mathbb{Q}$. ♡

11. (**Stein 中译本，P109，题 11**) 若 $a,b>0$，令：

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin\left(x^{-b}\right), & 0<x<1,\\ 0, \quad x=0,\end{cases}$$

证明，f 在 $[0,1]$ 上有界变差，当且仅当 $a>b$. 接着，取 $a=b$，对每个 $0<\alpha<1$ 构造一个满足指数为 α 的 Lipschitz 条件，但不是有界变差的函数.

证明. 注意若 Δ' 是 Δ 的加细，则有：

$$(\Delta)\sum_{j=1}^{N}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\leq(\Delta')\sum_{j=1}^{N}|f(x_j)-f(x_{j-1})|.$$

注意：

$$f'(x)=ax^{a-1}\sin\left(x^{-b}\right)-bx^{a-b-1}\cos\left(x^{-b}\right).$$

[1]这个例子来自《实分析中的反例》，高等教育出版社，2014.

如果假设 $a>b$，则根据 Riemann 积分的定义：

$$
\begin{aligned}
T_f([0,1]) &= \sup_{\Delta}\sum_{j=1}^{N}|f(x_j)-f(x_{j-1})| \le \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^1 |ax^{a-1}\sin\bigl(x^{-b}\bigr)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |bx^{a-b-1}\cos\bigl(x^{-b}\bigr)|\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^1 ax^{a-1}\mathrm{d}x + \int_0^1 bx^{a-b-1}\mathrm{d}x \\
&= 1+\frac{b}{a-b}.
\end{aligned}
$$

所以 $T_f([0,1])$ 有界，因此 $f\in BV([0,1])$.

反过来，若 $f\in BV([0,1])$，假设 $a\le b$，我们取点列:

$$
x_k = \Bigl(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\Bigr)^{1/b}.
$$

则该点列落在 $[0,1]$ 内，考虑该点列诱导的 $[0,1]$ 的 “分划”，在该分划下求以下和式：

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}|f(x_k)-f(x_{k-1})| &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{a}{b}}\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \\
&\ge \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k\pi}\right)^{\frac{a}{b}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{a/b}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{a/b}} \\
&\ge \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{a/b}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

最后的级数发散，因此适当做截断可看出 $T_f([0,1])$ 可以大于任何一个正实数，因此若 $a\le b$，则 $f\notin BV([0,1])$，第一部分证明完毕.

对于第二部分，我们取 $a=b$，去证明此时 $f(x)\in \mathrm{Lip}\alpha([0,1])$. 若 $h>0$，根据 Lagrange 中值定理：

$$
\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &= \left|a(x+\theta h)^{a-1}\sin\bigl((x+\theta h)^{-a}\bigr)-\frac{a\cos((x+\theta h)^{-a})}{x+\theta h}\right|h \\
&\le |a(x+\theta h)^{a-1}\sin\bigl((x+\theta h)^{-a}\bigr)|h+\left|\frac{a\cos((x+\theta h)^{-a})}{x+\theta h}\right|h
\end{aligned}
$$

其中 $\theta\in(0,1)$.

对所有的 $x\in[0,1]$ 和 $h>0$：

$$
\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &\le a(x+\theta h)^{a-1}\cdot\frac{1}{(x+\theta h)^a}h+h\Bigl|\frac{a}{x}\Bigr| \\
&= \frac{ah}{x+\theta h}+\frac{ah}{x} \\
&\le \frac{2ah}{x}.
\end{aligned}
$$

另外，当 $x^{a+1}\geq h$ 时，若 $a\geq 1$，即 $a-1\geq 0$，有：

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &= \left|(x+h)^a\sin\frac{1}{(x+h)^a}-x^a\sin\frac{1}{x^a}\right| \\ &\leq |x+h|^a+|x|^a \\ &\leq 2(x+h)^a\end{aligned}$$

对 $x^{a+1}<h$ 的情形，$|f(x+h)-f(x)|\leq 2a(x+h)^a\leq 2a(h^{\frac{1}{a+1}}+h)^a\leq 2^{a+1}ah^{\frac{a}{a+1}}$.（注意 $x+h\in[0,1]\Rightarrow h\leq 1$）

对 $x^{a+1}\geq h$ 情形，$|f(x+h)-f(x)|\leq \frac{2ah}{x}<\frac{2ah}{h^{1/a+1}}=2ah^{\frac{a}{a+1}}$.

我们取 $\alpha=\frac{a}{a+1}$，则 $f\in \mathrm{Lip}\alpha([0,1])$. 因为 $a>0$，所以对所有 $\alpha\in(0,1)$ 都可构造这样的 f. 但是由第一部分可知这些 $f\notin BV([0,1])$. □

12. (**Stein 中译本，P110，题 13**) 直接用定义证明 Cantor-Lebesgue 函数不是绝对连续的.

证明. 回忆 Cantor 三分集 $C=\bigcap_{n\geq 1}C_n$，其中每个 C_n 都是有限个闭区间的并集，我们取 C_n 的内部 $A_n=C_n^\circ$，则每个 A_n 都是有限个开区间的并集而且 $m(A_n)=\frac{2^n}{3^n}$. 对每个 $A_n=\bigsqcup_{k=1}^{2^n}(a_k,b_k)$，设 F 是 Cantor-Lebesgue 函数，则：

$$\sum_{k=1}^{2^n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{2^n}(F_n(b_k)-F_n(a_k))=F(1)-F(0)=1.$$

于是，对任何 $\delta>0$，只要取 n 足够大使得 $(2/3)^n<\delta$，就存在有限个开区间 $\{(a_k,b_k)\}$，它们的测度之和为 $\sum_k(b_k-a_k)=m(A_n)=(\frac{2}{3})^n<\delta$，使得 $\sum_{k=1}^{2^n}|F(b_k)-F(a_k)|=1$.

这说明 Cantor-Lebesgue 函数不是绝对连续的. □

13. (**Stein 中译本，P110，题 14**) 下面是我们证明一些定理时涉及到的函数可测性的讨论.

(a) 我们在证明单调函数的几乎处处可微性时曾引入函数 D^+. 假定 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$D^+(F)$ 定义为：

$$D^+(F)(x)=\limsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

证明它是可测函数.

(b) 我们在研究跳跃函数的可微性时，曾引入函数 $J(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n j_n(x)$，其定义为：

$$j_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_n\\ \theta_n, & x=x_n\\ 1, & x>x_n\end{cases},\quad \theta_n=\frac{F(x_n^+)-F(x_n)}{\alpha_n}.$$

其中，$F(x_n^+)$ 指的是 F 在不连续点 x_n 处的右极限，α_n 指的是 F 在点 x_n 处的跃度.

证明：

$$\limsup_{h\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}$$

可测.

证明. (a) 事实上，因为 F 在 x 处连续，按照函数在一点处上极限的定义，存在收敛到 x 的一个序列 $\{x+h_n\}_{n\geq 1}$，$h_n>0$，使得：

$$\limsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}.$$

而等式右侧是可测函数列的极限，因此 $D^+(F)(x)$ 是可测的.

(b) 对给定的 $k>m$，定义：

$$F_{k,m}^N = \sup_{1/k\leq |h|\leq 1/m} \left|\frac{J_N(x+h)-J_N(x)}{h}\right|.$$

其中 $J_N(x)=\sum_{n=1}^N \alpha_n j_n(x)$.

首先观察到 $J_N(x)$ 是可测函数. 事实上，j_n 都是阶梯函数，J_N 作为阶梯函数的线性组合当然是可测函数. 这时每个 $F_{k,m}^N$ 作为一族可测函数的上确界也是可测函数.

观察到：

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sup_{1/k\leq |h|\leq 1/m}\left|\frac{J_N(x+h)-J_N(x)}{h}\right| = \limsup_{h\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}.$$

因此 $\limsup_{h\to\infty} \frac{J(x+h)-J(x)}{h}$ 也是关于 x 的可测函数. □

14. (**Stein 中译本，P110，题 15**) 假定 F 有界变差而且连续，证明 $F=F_1-F_2$，其中 F_1 和 F_2 单调且连续.

证明. 因为 $F\in BV([a,b])$，所以存在 G_1,G_2 是 $[a,b]$ 上递增函数，使得 $F=G_1-G_2$. 对于 G_1，G_2，存在 F_1，F_2 递增且连续，使得 $J_1=G_1-F_1$，$J_2=G_2-F_2$ 是两个跳跃函数. 此时 $F=F_1-F_2+J_1-J_2$. 因为 F 连续，所以 J_1-J_2 也连续. 但是连续跳跃函数只能是常数函数，所以 $J_1-J_2=C$ 为常数. 我们重新将 F_1+C 记为 F_1，则此时 F_1 仍是连续且递增的，这 F 有分解 $F=F_1-F_2$. □

15. (**Stein 中译本，P110，题 16**) 证明若 $F\in BV([a,b])$，则：

(a) $\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x \leq T_F(a,b)$;

(b) $\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x = T_F(a,b)$ 当且仅当 F 在 $[a,b]$ 绝对连续.

证明. (a) 因为 $F\in BV([a,b])$，所以 F 可以写成 $F(x)=P_F(a,x)+F(a)-N_F(a,b)$，其中 $P_F(a,x)$ 和 $N_F(a,x)$ 递增，因此它们几乎处处可导，而且有：

$$F'(x)=P_F'(a,x)-N_F'(a,x).$$

根据 Lebesgue 定理的推论可知 P_F' 和 N_F' 可积，从而 $|F'|$ 可积，而且根据 Lebesgue 定理的推论给出的不等式可知：

$$\begin{aligned}\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x &\leq \int_a^b |P_F'(a,x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |N_F'(a,x)|\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b P_F'(a,x)\mathrm{d}x + \int_a^b N_F'(a,x)\mathrm{d}x \leq P_F(a,b)+N_F(a,b) = T_F(a,b).\end{aligned}$$

(b) 若 F 绝对连续，则由绝对连续函数成立 Newton-Leibniz 公式，对任何 $[a,b]$ 的分划 Δ，都成立：

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta}|F(x_j)-F(x_{j-1})| &= \sum_{\Delta}|\int_{x_{j-1}}^{t_j}F'(x)\mathrm{d}x| \\ &\le \sum_{\Delta}\int_{x_{j-1}}^{x_j}|F'(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

取上确界可得

$$T_F(a,b)\le \int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x.$$

因为绝对连续蕴含有界变差，所以根据 (a) 的结果可知反向不等式成立，因此等式

$$T_F(a,b)=\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x$$

成立.

反过来，如果上述等式成立，我们去说明 F 是绝对连续的. 事实上，我们可以断言对任何 $y\in[a,b]$，都成立：

$$\int_a^x |F'(y)|\mathrm{d}y = T_F(a,x).$$

事实上，根据 $F\in BV([a,b])$ 以及 (a) 的结果可知：

$$\int_a^x |F'(y)|\mathrm{d}y\le T_F(a,x),\quad \int_x^b |F'(y)|\mathrm{d}y\le T_F(x,b).$$

但是

$$\int_a^x |F'(y)|\mathrm{d}y+\int_x^b |F'(y)|\mathrm{d}y=\int_a^b |F'(y)|\mathrm{d}y=T_F(a,b)=T_F(a,x)+T_F(x,b).$$

所以，以上两个不等号均取等，作为一个直接推论，$[a,b]$ 的任何子区间 $[a_k,b_k]$ 上都成立

$$\int_{a_k}^{b_k}|F'(y)|\mathrm{d}y=T_F(a_k,b_k).$$

我们计划利用可积函数积分的绝对连续性来证明 F 绝对连续. 因为 $F\in BV([a,b])$，所以 $T_F(a,b)<\infty$，因此 $F'(x)\in L^1_{loc}([a,b])$，根据可积函数积分的绝对连续性，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任何可测集 $E\subset[a,b]$ 满足 $m(E)<\delta$，都有：

$$\int_E |F'|<\varepsilon.$$

因此，对任何 $[a,b]$ 互不相交的有限子区间族 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$，只要 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$，就有：

$$\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)|\le\sum_{k=1}^N T_F(a_k,b_k)=\sum_{k=1}^N\int_{a_k}^{b_k}|F'|=\int_{\bigcup_{k=1}^N(a_k,b_k)}|F'|<\varepsilon.$$

所以 F 绝对连续. □

16. (**Stein 中译本，P110，题 17**) 若 $\{K_\delta\}$ 是一簇恒同逼近，则存在某个常数 c，使得对所有可积函数 f，都成立：

$$\sup_{\varepsilon>0}|(f*K_\varepsilon)(x)|\le cf^*(x).$$

证明. 完全按照书上恒同逼近的卷积的逐点收敛的估计方法进行估计即可（取 "环面"）：

$$\begin{aligned}|(f*K_\varepsilon)(x)|&\le\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|K_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\\&\le\int_{y<|\varepsilon|}|f(x-y)||K_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\varepsilon\le|y|<2^{k+1}\varepsilon}|f(x-y)||K_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y\\&\le A\varepsilon^{-d}\varepsilon^d f^*(x)+\sum_{k=1}^{\infty}A'\varepsilon(2^k\varepsilon)^{-d-1}(2^{k+1}\varepsilon)^d f^*(x)\\&\le Af^*(x)+2^dA'f^*(x)\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\\&=(2^{d+1}A'+A)f^*(x).\end{aligned}$$

□

17. (**Stein 中译本，P111，题 18**) 验证本章 3.1 节给出的 Cantor-Lebesgue 函数和第一章习题 2 是等价的.

证明. 直接验证即可. □

18. (**Stein 中译本，P111，题 19**) 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 绝对连续，则：

(a)f 将零测集映为零测集；

(b)f 将可测集映为可测集.

证明. (a) 因为 f 绝对连续，所以 f 有界变差，而且其正、负变差都递增且绝对连续. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是零测集，我们证明 $f(E)$ 也是零测集. 事实上，对任何 $\delta>0$（δ 的大小我们在后面确定），因为 E 是零测集，所以存在开集 $O=\bigsqcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j)$，使得 $O\supset E$ 而且 $m(O)<\delta$. 对每个构成区间 $[a_j,b_j]$，存在 $m_j,M_j\in[a_j,b_j]$ 使得 $f(M_j)=\max_{a_j\le x\le b_j}f(x)$，$f(m_j)=\min_{a_j\le x\le b_j}f(x)$，则此时 $f(a_j,b_j)\subset[f(m_j),f(M_j)]$. 令 $O_N=\bigsqcup_{j=1}^{N}(a_j,b_j)$，$\forall\varepsilon>0$，我们选 δ 足够小，则根据 $\sum_{j=1}^{N}|m_j-M_j|\le\sum_{j=1}^{N}(b_j-a_j)<\delta$ 以及 f 绝对连续，我们有：

$$m(f(O_N))<\sum_{j=1}^{N}|f(m_j)-f(M_j)|<\varepsilon.$$

注意 $\{f(O_N)\}$ 是递增的可测集列而且 $\bigcup_{N=1}^{\infty}f(O_N)=f(O)$，所以对上面的式子令 $N\to\infty$ 可知

$$m(f(O))<\varepsilon.$$

又因为 $m(f(E))\le m(f(O))$，所以

$$m(f(E))<\varepsilon.$$

注意 $m(f(E))$ 和 ε 无关，于是令 $\varepsilon\to 0$ 可得

$$m(f(E))=0.$$

(b) 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是可测集，则存在 $F=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j$ 为 F_σ 集，使得 $E-F$ 是零测集. 记 $F_N=F\cap\overline{B}(0,N)$，则 $F_N=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j\cap\overline{B}(0,N)$，于是 F_N 是紧集的可数并. 注意到 $f(F_N)=\bigcup_{j=1}^{\infty}f(F_j\cap\overline{B}(0,N))$，而且 f 是连续函数，所以 $f(F_j\cap\overline{B}(0,N))$ 也是紧集，所以 $f(F_N)$ 作为紧集是可测集. 注意到 $\{f(F_N)\}$ 是递增的可测集列而且 $\bigcup_N f(F_N)=f(F)$，所以 $f(F)$ 也是可测集. 又因为：

$$f(E)=f(F\cup(E-F))=f(F)\cup f(E-F).$$

由 (a) 知 $f(E-F)$ 是可测集，因此 $f(E)$ 作为一个零测集和一个可测集的并，仍是可测集. □

19. (**Stein 中译本，P111，题 20**) 设 F 在 $[a,b]$ 绝对连续而且递增. 令 $A=F(a)$，$B=F(b)$，证明：

(a) 存在一个这样的 F 还满足严格递增，但是在一个具有正测度的集合上 $F'(x)=0$.

(b) 可以挑选出一个满足 (a) 条件的 F，使得存在可测子集 $E\subset[A,B]$，$m(E)=0$，使得 $F^{-1}(E)$ 不必可测.

(c) 证明，对任何递增的绝对连续函数 $E\subset[A,B]$，$m(E)=0$，使得 $F^{-1}\cap\{F'(x)>0\}$ 是可测集.

证明. (a) 设 K 是具有正测度的 Cantor 型集合 $\widehat{C}$ 的补集，令 $F(x)=\int_a^x\chi_K(t)\mathrm{d}t$，$y>x$，则 $F(y)-F(x)=\int_x^y\chi_K(t)\mathrm{d}t$. 根据构造，$K$ 是从 $[0,1]$ 中去掉的那些开区间的并，且第 k 步去掉的开区间 ℓ_k 的长度满足 $\ell_k<\frac{1}{2^{k-1}}$，取 k 足够大可知 (x,y) 中包含 K 的一个构成区间，于是 $F(y)-F(x)>0$，所以 F 严格递增.

我们写 $\widehat{C}=\bigcap_{n\ge 1}\widehat{C}_n$，其中每个 $\widehat{C}_n$ 都是若干闭区间的并，令 $K_n=[0,1]\backslash\widehat{C}_n$，$F_n(x)=\int_a^x\chi_{K_n}(t)\mathrm{d}t$，由控制收敛定理可知对每个 x 都有 $F_n(x)\to F(x)$，由 Egorov 定理可知，对 $\varepsilon<\frac{m(\widehat{C})}{2}$，存在一个集合 E_ε，使得在 $[0,1]-E_\varepsilon$ 上 $F_n(x)\rightrightarrows F(x)$. 对每个 $x\in\widehat{C}$，对每个 n，存在一个闭区间 $[a_n,b_n]$ 使得 $x\in[a_n,b_n]$，而 F_n 在 $[a_n,b_n]$ 上为常数，所以 $F_n'(x)=0$. 根据一致收敛性，在 $\widehat{C}-E_\varepsilon$ 上，成立：

$$F'(x)=\lim_n F_n'(x)=0.$$

而注意到 $m(\widehat{C}-E_\varepsilon)\ge m(\widehat{C})-m(E_\varepsilon)>\frac{1}{2}m(\widehat{C})>0$.

(b)(c) 的解答参见题 21. □

20. (**Stein 中译本，P111，题 21**) 令 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续且单调递增，满足 $F(a)=A$ 且 $F(b)=B$. 假定 f 是 $[a,b]$ 上任何可测函数.

(a) 证明 $f(F(x))F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测. 注意：根据习题 20 的 (b)，$f(F(x))$ 不必可测.

(b) 证明换元公式：若 f 在 $[A,B]$ 可积，则 $f(F(x))F'(x)$ 也可积，而且：

$$\int_A^B f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(F(x))F'(x)\mathrm{d}x.$$

证明. (a) 事实上，我们需要**题 20** 作为引理. 首先对于开集 $O \subset [A,B]$，成立 $m(O) = \int_{F^{-1}(O)} F'(x)\mathrm{d}x$. 这是因为，$F$ 是绝对连续函数，所以 O 的原像集 $F^{-1}(O)$ 也是开集，所以 $F^{-1}(O)$ 写成可数互不相交的开区间的并：$F^{-1}(O) = \bigsqcup_{k\geq 1}(a_k,b_k)$. 因为 F 连续且单调递增，所以对每个 (a_k,b_k)，$F(a_k,b_k) = (F(a_k),F(b_k)) := (A_k,B_k)$，因此 $O = \bigcup_{k\geq 1}(A_k,B_k)$. 而且，由单调递增可知，每个 (A_k,B_k) 至多在端点处相交，并且 $F(a_k) = A_k$，$F(b_k) = B_k$. 根据绝对连续函数的 Newton-Leibniz 公式可知：

$$m(O) = \sum_{k=1}^{\infty}(B_k - A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{\bigcup_k (a_k,b_k)} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{F^{-1}(O)} F'$$

我们下面说明把开集 O 换成 G_δ 集 G 后结论依然成立. 对于 G_δ 集 $G = \bigcap_{i\geq 1} G_i$，记 $O_j = \bigcap_{i=1}^{j} G_i$ 是开集，所以

$$m(O_j) = \int_{F^{-1}(O_j)} F'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} F'(x)\chi_{F^{-1}(O_j)}(x)\mathrm{d}x.$$

观察到 $\chi_{F^{-1}(O_j)}$ 逐点收敛到 $\chi_{F^{-1}(G)}$，而且，O_j 是一列单调递减收敛到 G 的集列，因此，对上式取极限并由控制收敛定理知

$$m(G) = \int_{\mathbb{R}^d} F'(x)\chi_{F^{-1}(G)}(x)\mathrm{d}x = \int_{F^{-1}(G)} F'(x)\mathrm{d}x.$$

对于可测集 E，存在一个 G_δ 集记为 G，$G \supset E$ 而且 $G - E$ 是零测集. 记 $Z = \{F'(x) = 0\}$，此时集合 $F^{-1}(E) \cap \{F' > 0\}$ 以表示为 $F^{-1}(G \cup (G-E)) \cap ([a,b]\backslash Z)$.

我们先证明 Z 是一个零测集. 事实上，因为 $\{0\}$ 是一个 G_δ 集，所以：

$$0 = m(\{0\}) = \int_{F^{-1}(\{0\})} F'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = 0, \text{a.e. } x \in Z.$$

所以，只能是 Z 本身是零测集. 因此 $[a,b]\backslash Z$ 是可测集.

进一步地，写 $F^{-1}(G \cup (G-E)) = F^{-1}(G) \cup F^{-1}(G-E)$. 因为 $G - E$ 是零测集，所以存在 $U \supset G - E$ 是 G_δ 集，使得 $m(U - (G-E)) = 0$，所以 $m(U) = m(G-E) + m(U-(G-E)) = 0$，同样可得

$$0 = m(U) = \int_{F^{-1}(U)} F'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = 0, \text{a.e. } x \in F^{-1}(U).$$

所以 $m(F^{-1}(U) \cap ([a,b]\backslash Z)) = 0$，所以 $m(F^{-1}(G-E)) \cap ([a,b]\backslash Z) = 0$. 又因为 F 连续 $\Rightarrow F$ 可测 $\Rightarrow F^{-1}(G)$ 是可测集，所以

$$F^{-1}(E) \cap \{F' > 0\} = F^{-1}(G \cup (G-E)) \cap ([a,b]\backslash Z) = [F^{-1}(G) \cap ([a,b]\backslash Z)] \cup [F^{-1}(G-E) \cap ([a,b]\backslash Z)]$$

是可测集.

回到本题，我们记 $G=(f\circ F)\cdot F'$，我们只需证明对任何 $t>0$，都有 $\{G>t\}$ 是可测集. 事实上，我们有如下的分解：

$$\{G>t\}=\bigcup_{\substack{r>0\\ r\in\mathbb{Q}}}\left\{(f\circ F)>\frac{t}{r}\right\}\cap\{F'>r\}=\bigcup_{\substack{r>0\\ r\in\mathbb{Q}}}F^{-1}(f^{-1}(t/r,+\infty))\cap\{F'>0\}\cap\{F'>r\}.$$

根据引理的结果并结合 F' 可测 $\Rightarrow$ $\{F'>r\}$ 可测，由此可知 $\{G>t\}$ 是可测的. 所以 $f(F(x))F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测.

(b) 根据 $m(G)=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)\mathrm{d}x$ 立刻知换元公式对 G_δ 集上的特征函数成立，进而对 $[a,b]$ 的可测子集上的特征函数成立，进而对简单函数成立. 对于 $f\in L^1_{loc}([a,b])$，将 f 分解为正部和负部 f^+ 和 f^-，则 $f^+,f^-\in L^1_{loc}([a,b])$. 对于每个 f^+，它是非负、有界且具有有限测度支撑的可测函数，存在非负、递增简单函数逼近 $\{\varphi_n\}_{n\geq1}$，使得 φ_n 逐点收敛到 f^+，由单调收敛定理可知

$$\lim_n\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_n\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面，

$$\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_A^B\varphi_n(F(x))F'(x)\mathrm{d}x.$$

所以取 $n\to\infty$ 可知

$$\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x=\int_A^B f^+(F(x))F'(x)\mathrm{d}x.$$

同理可知

$$\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x=\int_A^B f^-(F(x))F'(x)\mathrm{d}x.$$

两式相减可知 $f(F(x))F'(x)$ 可积，而且换元公式成立. □

21. (**Stein 中译本，P111，题 22**) 假设 F 和 G 在 $[a,b]$ 绝对连续，证明 FG 也绝对连续. 这就有如下推论：

(a) 分部积分公式：只要 F 和 G 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的，就有分部积分公式成立，即：

$$\int_a^b F'(x)G(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x+[F(x)G(x)]_a^b.$$

(b) 令在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对连续而且满足 $F(\pi)=F(-\pi)$. 证明，如果

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{-inx}\mathrm{d}x,$$

使得 $F(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{inx}$，则：

$$F'(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}ina_ne^{inx}.$$

(c) 若 $F(-\pi)\neq F(\pi)$，情况又如何？

证明. (a) 我们先证明 F 绝对连续 $\Rightarrow$ F^2 绝对连续.F 绝对连续 $\Rightarrow$ F 在 $[a,b]$ 上有上界 M.

$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $[a,b]$ 的有限多个互不相交的子区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$ 满足 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$ 时，都成立 $\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$. 于是：

$$\sum_{k=1}^N|F^2(b_k)-F^2(a_k)|=\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)||F(b_k)+F(a_k)|\le 2M\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)|<2M\varepsilon.$$

所以 F^2 绝对连续. 而 $[a,b]$ 上全体绝对连续函数 $AC([a,b])$ 显然构成一个实线性空间，所以若 F 和 G 都是绝对连续函数，则

$$FG=\frac{1}{4}[(F+G)^2-(F-G)^2]$$

也是绝对连续函数.

作为推论，$(FG)'$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，而且微积分基本定理成立，所以：

$$\int_a^b(FG)'=\int_a^b F'G+\int_a^b FG'=F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

这就是我们要证的.

(b) 根据已经证明的分部积分公式，我们可以按如下方法计算 $\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x&=[F(x)e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}F(x)[e^{-inx}]'\mathrm{d}x\\&=e^{-in\pi}[F(\pi)-F(-\pi)]+\int_{-\pi}^{\pi}ine^{inx}F(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}ine^{inx}F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x=ina_n$，所以：

$$F'(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}ina_ne^{inx}\mathrm{d}x.$$

(c) 如果 $F(-\pi)\neq F(\pi)$，则以上结论不成立. 事实上 $F(x)=x$ 的 Fourier 系数为：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n2i}{n}.$$

但是 $F'(x)=1$，其 Fourier 系数为 $a_0=1,a_n=0,\forall n\neq 0.$ □

22. (**Stein 中译本，P112，题 23**) 设 $F\in C[a,b]$，证明：

(a) 假定对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $D^+(F)\ge 0$，则 F 在 $[a,b]$ 上是递增的；

(b) 若对每个 $x\in(a,b)$ 都有 $F'(x)$ 存在且 $|F'(x)|\le M$，则 F 绝对连续而且满足系数为 M 的 Lipschitz 条件.

证明. (a) 只需证明 $F(b)-F(a)\ge 0$（根据下面的证明过程可知实际上 a 和 b 都可以换成 $[a,b]$ 中的任何一个点）. 用反证法，假设不等式不成立，令 $G_\varepsilon(x)=F(x)-F(a)+\varepsilon(x-a)$，因此对充分小的 $\varepsilon>0$ 成立 $G_\varepsilon(a)=0$. 但是，$G_\varepsilon(b)<0$. 令 x_0 是 G_ε 在 $[a,b]$ 上的最大值点，则对足够小的 $h>0$，成立

$$\frac{G_\varepsilon(x_0+h)-G_\varepsilon(x_0)}{h}\le 0.$$

于是：

$$\limsup_{\substack{h>0\\h\to 0}} \frac{G_\varepsilon(x_0+h)-G_\varepsilon(x_0)}{h} \le 0.$$

但是这和 $D^+(G_\varepsilon) = D^+(F) + \varepsilon > 0$ 对每个 $x \in [a,b]$ 矛盾.

(b) 类似于 (a) 的调整法，只对 $[a,b]$ 区间证明. 令 $G(x) = F(x) - F(a) + M(x-a)$，则 $D^+G(x) = F'(x) + M \ge 0 \Rightarrow G(b) \ge G(a)$. 类似地，令 $H(x) = F(a) - F(x) + M(x-a)$，则 $D^+H(x) = -F'(x) + M \ge 0 \Rightarrow H(b) \ge H(a)$，于是有：

$$|F(b) - F(a)| \le M|b-a|.$$

于是 $F \in \mathrm{Lip}([a,b])$，$\|F\|_{\mathrm{Lip}} = M$. □

23. (**Stein 中译本，P112，题 24**) 证明递增函数的 Lebesgue 分解：F 在 $[a,b]$ 递增，则 F 有分解：

$$F = F_A + F_C + F_J.$$

其中，F_A 是绝对连续函数；F_C 是满足 F_C' 几乎处处存在且 $F_C'(x) = 0$ 的连续函数；F_J 是跳跃函数. 而且，这一分解在加上一个常数的意义下是唯一的.

证明. 因为 F 是递增函数，所以由习题 15 的证明过程可知 F 可以分解为一个连续递增函数 G 和一个跳跃函数 F_J，而且这个分解在相差一个常数的意义下是唯一的. 所以，下面只需证明一个连续递增函数 G 可以分解为一个绝对连续函数和一个连续但导数几乎处处为零的连续函数.

因为 G 连续递增，所以 G' 几乎处处存在而且非负. 所以积分 $F_A(x) = \int_a^x G'(y)\mathrm{d}y$ 是有意义的. 另一方面，因为 G 是连续递增函数，所以 G' 至多在端点上是无限值，所以 G' 在 $[a,b]$ 局部可积，根据积分的绝对连续性可知 F_A 绝对连续.

对于 $F_C = G - F_A$，因为 G 和 F_A 都连续所以 F_C 也连续. 而且 $F_C' = G' - F_A'$，因为 $F_A' = G'$ 几乎处处成立，所以对几乎处处 $x \in [a,b]$ 使得 $F_C'(x) = 0$.

下面说明唯一性. 如果还存在 $\widetilde{F}_C$ 和 $\widetilde{F}_A$ 也满足条件. 则考虑 $\widetilde{F}_A - F_A$，则 $\widetilde{F}_A - F_A$ 是绝对连续函数而且对几乎处处 $x \in [a,b]$ 使得 $\widetilde{F}_A' - F_A' = 0$. 于是 $\widetilde{F}_A - F_A$ 是常数. □

24. (**Stein 中译本，P112，题 25**) 这个习题说明了 Lebesgue 微分定理中必须允许去掉一个零测集，因为 Lebesgue 微分定理在一个零测集上不一定成立. 令 E 是一个 $\mathbb{R}^d$ 中的零测集，证明：

(a) 存在非负可积函数 f，使得

$$\liminf_{\substack{m(B)\to 0\\x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y = \infty.$$

对任何 $x \in E$ 成立.

(b) 一维的情形还可以用 Dini 导数来叙述，也就是，存在连续连续且递增的函数 F，使得：

$$D_+(F)(x) = D_-(F)(x) = \infty, \quad \text{for each } x \in E.$$

证明. (a) 因为 E 是零测集，所以对所有正整数 n 存在开集 O_n 使得 $O_n \supset E$ 且 $m(O_n) \le \frac{1}{2^n}$. 我们令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{O_n}(x)$，则 f 是非负级数，根据 Levi 收敛定理的推论可知：

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{O_n} = \sum_{n=1}^{\infty} m(O_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

所以 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 我们下面说明 $\liminf_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y = \infty$.

因为 O_n 都是开集，对每个 N，$\bigcap_{n=1}^{N} O_n$ 也是开集，于是存在 $B(x, r_N) \subset \bigcap_{n=1}^{N} O_n$，我们不妨设 $r_N < \frac{1}{N}$. 注意到若 $\mathrm{radius}(B) < \frac{1}{3} r_N$，则必然成立 $B \subset B(x, r_N) \subset \bigcap_{n=1}^{N} O_n$，即

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{m(B)} \int_B N\mathrm{d}x = N.$$

对所有这些满足 $\mathrm{radius}(B) < r_N$ 的球取下确界得

$$\inf_{\mathrm{radius}(B)<1/3r_N} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y \ge N.$$

取极限 $N \to \infty$，根据我们的构造可知：

$$\liminf_{\substack{m(B)\to 0\\ x\ni B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y = \lim_{N\to\infty} \inf_{\mathrm{radius}(B)<1/3r_N} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y = \infty.$$

(b) 注意 Dini 左导数的定义为

$$D_-(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x-h) - F(x)}{h}.$$

因为 F 是绝对连续函数，根据微积分基本定理：

$$\liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x-h) - F(x)}{h} = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} F'(y)\mathrm{d}y.$$

事实上，因为 f 可积，所以可以令 $F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$，则 F 绝对连续且几乎处处成立 $F' = f$. 取 f 是和 (a) 相同的函数，完全重复 (a) 的过程，只不过这里的满足 $\mathrm{radius}(B) < \frac{1}{3} r_N$ 的下确界是对那些以 x 为右端点的闭球中取的. 这样证明了 $D_+(F)(x) = \infty$，同理可以证明 $D_-(F)(x) = \infty$. □

25. (**Stein 中译本，P112，题 26**) 外测度 $m_*(E)$ 可以定义在任何集 E 上. 其另一个定义方法是将用方体覆盖 E 改为用球覆盖. 即，假定我们定义 $m_*^B(E)$ 是 $\inf_{j=1}^{\infty} m(B_j)$，其中下确界是对所有开球覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ 的开球取的. 则，$m_*(E) = m_*^B(E)$. 注：可以用该等价定义直接验证 Lebesgue 测度的 “旋转不变性”.

$m_*(E) \le m_*^B(E)$ 根据外测度的单调性是显然的. 要证明相反方向的不等式，可以先证明如下的结论：对任何 $\varepsilon > 0$，存在球族 $\{B_j\}$ 使得 $E \subset \bigcup_j B_j$ 而 $\sum_j m(B_j) \le m_*(E) + \varepsilon$. 注意到对任何给定 δ，我们总是能够选取球的直径 $< \delta$.

证明. 首先假设 E 是可测集，则对任何 $\varepsilon' > 0$，可以选取开集 O，使得 $m(O - E) < \varepsilon'$. 接下来，我们设 $\mathcal{B}$ 是所有包含在 O 中的开球组成的球族，于是 $\mathcal{B}$ 组成了 E 的一个 Vitali 覆盖. 于

是存在 $\mathcal{B}$ 中有限且互不相交的成员 $B_1,\cdots,B_N$ 使得 $\sum_{i=1}^N |B_i| \geq m(E)-2\varepsilon'$，此时有：

$$
\begin{aligned}
m(E-\bigcup_{i=1}^N B_i) &\leq m(E\cup\bigcup_{i=1}^N B_i-\bigcup_{i=1}^N B_i) \leq m(E\cup\bigcup_{i=1}^N B_i)-m(\bigcup_{i=1}^N B_i)\\
&= m(O)-m(\bigcup_{i=1}^N B_i) \leq m(O-E)+m(E)-m(\bigcup_{i=1}^N B_i)\\
&\leq \varepsilon'+2\varepsilon'=3\varepsilon'.
\end{aligned}
$$

因为 $E-\bigcup_{i=1}^N B_i$ 是可测集,所以存在方体覆盖 $\bigcup_{j=1}^\infty Q_j \supset E-\bigcup_{i=1}^N B_i$,而且满足 $m(\bigcup_{j=1}^\infty Q_j) \leq m(E-\bigcup_{i=1}^N B_i)+\varepsilon' \leq 4\varepsilon'$. 最后，这些方体的外接球组成的球簇 $\{R_j\}_{j=1}^\infty$，则 $\bigcup_{j=1}^\infty R_j \supset E-\bigcup_{i=1}^N B_i$ 而且 $m(\bigcup_{j=1}^\infty R_j) \leq 4C(d)\varepsilon'$. 将 R_j 与前面的 $B_1,\cdots,B_N$ 合并为新的球簇 $\{B_k'\}_{k=1}^\infty$，则 $\bigcup_{k=1}^\infty B_k' \supset E$，而且:

$$
m(\bigcup_{k=1}^\infty B_k') \leq m(\bigcup_{j=1}^\infty R_j)+\sum_{j=1}^N m(B_j) \leq m(E)+(4C(d)+2)\varepsilon'.
$$

所以

$$
\inf\sum_{j=1}^\infty m(B_j) \leq m(E)+(4C(d)+2)\varepsilon'.
$$

令 $\varepsilon'\to 0$ 即可得到相反方向的不等式.

对一般情况下的 E，首先根据外测度定义存在 Q 是至多可数的方体并，$Q\supset E$ 且 $m(Q)\leq m_*(E)+\varepsilon'$.

对 Q 用上述结论可得：

$$
m(\bigcup_{k=1}^\infty B_k') \leq m(Q)+(4C(d)+2)\varepsilon' \leq m_*(E)+(4C(d)+3)\varepsilon'.
$$

同理可得结论. □

26. (**Stein 中译本，P113，题 30**) 若有界函数 F 在任何有限子区间 $[a,b]$ 都是有界变差的且 $\sup_{a,b} T_F(a,b)<\infty$，则称它在 $\mathbb{R}$ 上有界变差.

证明这样的 F 具有如下两个性质：

(a) 存在常数 A，使得对所有 $h\in\mathbb{R}$，都成立 $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|\mathrm{d}x \leq A|h|$.

(b) $\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\right| \leq A$. 其中 φ 在紧支撑而且满足 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\leq 1$ 的所有 C^1 函数中取.
(a)

证明. 对任意选定的 x 和 h，找到包含 $x+h$ 和 x 的一个区间 $[-Nh,(N-1)h]$，N 为正整数，则 $F\in BV([-Nh,(N-1)h])$，由有界变差函数的结构定理可知，存在递增有界函数 F_1 和 F_2，使得 $F=F_1-F_2$. 而且，根据 $\sup_{a,b} T_F(a,b)<\infty$ 可知 F_1 和 F_2 的上界 M_1 和 M_2 可以取成和 N,h 都无关的常数. 此时成立：

$$
|F(x+h)-F(x)| \leq F_1(x+h)-F_1(x)+F_2(x+h)-F_2(x).
$$

对 F_1，考虑

$$\begin{aligned}\int_{-Nh}^{(N-1)h}|F_1(x+h)-F_1(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{k=-N}^{N-1}\int_{kh}^{(k+1)h}|F_1(x+h)-F_1(x)|\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=-N}^{N-1}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[kh,(k+1)h]}(x)(F_1(x+h)-F_1(x))\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=-N}^{N-1}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,h]}(x)(F_1(x+(k+1)h)-F_1(x+kh))\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,h]}(x)\sum_{k=-N}^{N-1}(F_1(x+(k+1)h)-F_1(x+kh))\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,h]}(x)(F_1(x+Nh)-F_1(x-Nh))\mathrm{d}x\\ &\le M_1 h.\end{aligned}$$

这一估计用到了 Levi 收敛定理的推论.

对上面的估计取极限 $N\to\infty$ 可得，$\int_{-\infty}^{+\infty}|F_1(x+h)-F_1(x)|\mathrm{d}x\le M_1h$. 同理可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}|F_2(x+h)-F_2(x)|\mathrm{d}x\le M_2h$，所以：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x+h)-F(x)|\le(M_1+M_2)h.$$

其中 M_1,M_2 是和 h,N 都无关的常数. □

(b)

证明. 我们计算

$$\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right|$$

事实上，

$$F(x+h)\varphi(x+h)-F(x)\varphi(x)=F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))+(F(x+h)-F(x))\varphi(x).$$

因为 φ 紧支撑而且 $\|\varphi\|_\infty\le 1$，而 F 有界 $\Rightarrow$ 局部可积，所以

$$\int_{\mathbb{R}}F(x+h)\varphi(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_{\mathbb{R}}F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)(F(x+h)-F(x))\mathrm{d}x=0.$$

所以：

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}F(x)(\varphi(x+h)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)(F(x+h)-F(x))\mathrm{d}x\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)(F(x+h)-F(x))|\mathrm{d}x\\ &\le \|\varphi\|_\infty\int_{\mathbb{R}}|F(x+h)-F(x)|\mathrm{d}x\\ &\le A|h|.\end{aligned}$$

所以：

$$\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x\right| \le A.$$

我们取 $h=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x+1/n)-\varphi(x)}{1/n}=\varphi'(x)$，根据控制收敛定理可得

$$\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\right| \le A.$$

□

27. (**Stein 中译本, P113, 题 32**) 令 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 证明 f 对某个 M 和所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|.$$

当且仅当 f 满足：(i)f 绝对连续；(ii) 对 a.e.x，$|f'(x)|\le M$.

证明. 先证明 $\Rightarrow$. 若能证明一致连续，根据

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\le M \Rightarrow \limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\le M,$$

因此只要能说明 f' 几乎处处存在，就有 $|f'(x)|\le M$. 而绝对连续 $\Rightarrow$ 有界变差 $\Rightarrow$ f' 几乎处处存在，所以只需要说明 f 绝对连续.

我们用定义说明. 对任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，对 $[a,b]$ 的子区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$ 互不相交且满足 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$，都有：

$$\sum_{k=1}^N|f(b_k)-f(a_k)|\le M\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

根据定义可知 f 绝对连续.

再证明 $\Leftarrow$，因为 f 绝对连续 $\Rightarrow$ f 有界变差，所以 f' 几乎处处存在且可积，且成立微积分基本定理：

$$f(x)-f(y)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t.$$

根据积分的三角不等式：

$$|f(x)-f(y)|\le\int_{(x,y)}|f'(t)|\mathrm{d}t\le M|x-y|.$$

所以 f 满足系数为 M 的 Lipschitz 条件. □

28. (**Stein 中译本，P114，问题 1**) 证明如下情形的 **Vitali 覆盖引理**：若 E 在 Vitali 意义下被球簇 B 覆盖，且 $0<m_*(E)<\infty$，且对每个 $\eta>0$，存在 B 中互不相交的成员 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$，使得

$$m_*(E\backslash\bigcup_{j=1}^\infty B_j)=0 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^\infty|B_j|\le(1+\eta)m_*(E).$$

证明. 我们首先需要一个 5 球覆盖方法作为引理：

引理 1. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭球族，$\sup\{\operatorname{diam}(B):B\in\mathcal{B}\}<\infty$，则存在至多可数的互不相交子族 B_i，使得

$$\bigcup_{\mathcal{B}} B\subset\bigcup_{i\geq 1}5B_i.$$

我们记 $1/2\sup_{B\in\mathcal{B}}\operatorname{diam}(B)=R$. 将 $\mathcal{B}$ 划分为子族 $\mathcal{B}_n$，其中 $\mathcal{B}_n$ 的定义为：

$$\mathcal{B}_n=\left\{B\in\mathcal{B}:B\text{ 的半径在 }\left(\frac{R}{2^n},\frac{R}{2^{n-1}}\right]\right\}.$$

我们先假设 $\mathcal{B}$ 具有这样的形式：$\mathcal{B}=\{B(x,r(x)):x\in A\}$，即 $\mathcal{B}$ 中成员的球心组成的集合为 A，我们假设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的有界子集. 记 A_1 是 $\mathcal{B}_1$ 中成员的球心构成的集合，即：

$$A_1:=\{x\in A:\frac{1}{2}R<r(x)\leq R\}.$$

对 A_1，任选一个点 x_1，若 $A_1\backslash 3B(x_1,r(x_1))$ 不是空集，则任选一个点 $x_1\in A_1\backslash 3B(x_1,r(x_1))$，重复以上过程，得到一个点列：

$$x_{k+1}\in A_1\backslash\bigcup_{i=1}^{k}3B(x_i,r(x_i)).$$

由 A_1 的定义，对 A_1 中的任意两个球，其中一个球的半径不超过另一个球的两倍，于是根据构造可知每个 $B(x_i,r(x_i))$ 是互不相交的. 我们指出这个流程至多进行有限步，因为 $A_1\subset A$ 是有界集，因而被一个紧集包含，但我们不可能在一个紧集中堆放无限多个半径大于一个常数 $\frac{R}{2}$ 且互不相交的球，所以，存在 n_1 使得 $A_1\backslash\bigcup_{i=1}^{n_1}3B(x_i,r_(x_i))$ 是空集，于是我们得到了 A_1 的一个有限覆盖：

$$A_1\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}3B(x_i,r(x_i)).$$

对 A_1 中任何一个点 x，因为对 A_1 中任何两个球其中一个的半径都不超过另一个的两倍，所以对任何 $i=1,2,\cdots,n_1$，都有 $r(x)\leq 2r(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n_1$，所以：

$$\bigcup_{\mathcal{B}_1}B=\bigcup_{x\in A_1}B(x,r(x))\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}5B(x_i,r(x_i)).$$

其次考虑 A_2，我们从 A_2 中去除掉那些和 $\bigcup_{i=1}^{n_1}B(x_i,r(x_i))$ 有交的球得到 A_2'，对于那些在 $A_2\backslash A_2'$ 中的点 x，假设它对应的球 $B(x,r)$ 与球 $B(x_i,r(x_i))$ 相交，则：

$$d(x,x_i)\leq r(x)+r(x_i)\leq 3r(x_i).$$

所以这些点都将被 $\bigcup_{i=1}^{n_1}3B(x_i,r(x_i))$ 覆盖. 我们对 A_2' 重复上述过程，又找到 n_2-n_1 个互不相交的球 $B_{n_1+1},\cdots,B_{n_2}$，满足 $\bigcup_{x\in A_2'}B(x,r(x))$ 被对应的 5-球覆盖，所以：

$$\bigcup_{\mathcal{B}_2}B=\bigcup_{x\in(A_2\backslash A_2')\cup A_2'}B(x,r(x))\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}3B(x_i,r(x_i))\cup\bigcup_{i=n_1+1}^{n_2}5B(x_i,r(x_i))\subset\bigcup_{i=1}^{n_2}5B(x_i,r(x_i)).$$

对 $\{A_n\}$ 重复此过程，得到可数多个球 $\{B_i\}$，使得：

$$\bigcup_{\mathcal{B}}B=\bigcup_{n}\bigcup_{\mathcal{B}_n}B\subset\bigcup_{i\geq 1}5B_i.$$

引理证明完毕.

回到本题，首先假设 E 是有界集. 根据外测度的定义，存在开集 $O \supset E$，使得：

$$m(O) \le (1 + \frac{1}{7^d}) m_*(E).$$

我们对一切包含在开集 O 中的球族运用引理，于是存在互不相交的至多可数子球族 $\{B_i\}_{i\ge 1} \subset O$，使得：

$$E \subset \bigcup_{i\ge 1} 5B_i.$$

由此可知

$$m_*(E) \le \frac{1}{5^d} \sum_{i=1}^{\infty} m(5B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i).$$

因为 B_i 互不相交而且包含在有界集中，因此 $\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \infty$，所以，存在整数 N，使得：

$$m_*(E) \le \frac{1}{6^d} \sum_{i=1}^{N_1} m(B_i).$$

记 $E_1 = E \backslash \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$，则：

$$m_*(E_1) \le m_*(E \backslash \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i) \le m(O) - \sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \le (1 + \frac{1}{7^d} - \frac{1}{6^d}) m_*(E).$$

现在，E_1 包含在开集 $O \backslash \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$ 中，根据外测度的定义可知，存在开集 O_1 使得 $E_1 \subset O_1 \subset O \backslash \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$，使得：

$$m(O_1) \le (1 + \frac{1}{7^d}) m_*(E_1).$$

对 O_1 和 E_1 重复以上过程，又找到互不相交的球族 $B_i \subset \mathcal{B}$，$i = N_1 + 1, \cdots, N_2$，使得

$$m_*(E_2) \le (1 + \frac{1}{7^d}) m_*(E_1) \le (1 + \frac{1}{7^d})^2 m_*(E).$$

这里 $E_2 = E_1 \backslash_{i=N_1+1}^{N_2} B_i = A \backslash \bigcup_{i=1}^{N_2} B_i$.

显然所有的球都不相交，n 步后：

$$m_*(E \backslash \bigcup_{i=1}^{N_n} B_i) \le (1 + 7^{-d} - 6^{-d})^n m_*(E).$$

取 $n \to \infty$ 可得

$$m_*(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0.$$

而且，对 $\eta > 0$，我们选择 ℓ 足够大使得 $\frac{1}{7^{\ell+d}} < \eta$，根据球族 $\mathcal{B}$ 包含在 O 中，并把开头的 $\frac{1}{7^d}$ 换成 $\frac{1}{7^{d+\ell}}$ 可得：

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| \le m(O) \le (1 + \frac{1}{7^{d+\ell}}) m_*(E).$$

这就证明了 Vitali 覆盖定理的两个结论.

以上我们假设了 E 是有界集，下面对于一般情况，我们将 $\mathbb{R}^d$ 写成 $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$，其中 Q_j 是几乎不相交的立方体，对每个 $E \cap Q_j$ 运用已经证明的结论并结合 $m_*(E \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j) = 0$ 就得到一般情况下的结论. $\square$

29. (**Stein 中译本，P115，问题 5**) 设 F 在 $[a,b]$ 上连续，对每个 $x\in(a,b)$，$F'(x)$ 都存在，而且 $F'(x)$ 可积. 则，F 绝对连续而且成立

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 我们证明如下引理：

引理：若对几乎处处 $x\in[a,b]$ 都有 $F'(x)\geq 0$，且对每个 $x\in(a,b)$ 都有 $D_+(F)>-\infty$，则 $F(b)\geq F(a)$.

引理的证明：设 $E=\{x\in[a,b]:F'(x)<0\text{或不存在}\}$，则 E 是零测集. 根据习题 25 可知存在递增且绝对连续的函数 Φ 满足 $D_+(\Phi)(x)=\infty$，对任何 $x\in E$.

对 $\delta>0$，考虑函数 $F+\delta\Phi$，根据 D_+ 的定义可知 $D_+(F+\delta\Phi)=D_+(F)+\delta D_+(\Phi)$. 因为 Φ 递增，所以 $D_+(\Phi)\geq 0$. 若 $x\in E$，根据 $D_+(F)<\infty$ 和 $D_+(\Phi)=\infty$ 可知 $D_+(F+\delta\Phi)=\infty>0$，若 $x\notin E$，则根据 $D_+(F)=F'(x)\geq 0$ 可知 $D_+(F+\delta\Phi)\geq 0$，综上所述 $D_+(F+\delta\Phi)\geq 0$ 对每个 $x\in[a,b]$ 成立. 根据习题 23(a) 的结果可知 $F+\delta\Phi$ 递增，取 $\delta\to 0+$ 可知 F 递增，所以 $F(b)\geq F(a)$.

回到本题. 要证明题给结论，只需要证明 $F(x)-F(a)=\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y$ 对每个 $x\in[a,b]$ 成立即可，此时 F 显然绝对连续而且微积分基本定理成立. 为此，我们证明 $F(x)-F(a)\geq\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y$. 令 $G(x)=F(x)-F(a)-\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y$. 为了使用引理的结果，我们取截断函数 $f_n(x)=\min\{n,F'\}$，$G_n(x)=F(x)-F(a)-\int_a^x f_n$，于是 $G_n'=F'-f_n\geq 0$ 对几乎处处 $x\in[a,b]$ 成立. 而且，根据构造可知 $D_+(G_n)>-\infty$ 对每个 $x\in[a,b]$ 成立. 所以根据引理可知：

$$\int_a^x f_n(y)\mathrm{d}y\leq F(x)-F(a).$$

因为 F 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，所以 F 在 $[a,b]$ 有界，根据控制收敛定理可知：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(y)\mathrm{d}y=\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y\leq F(x)-F(a).$$

用 $-F$ 替代 F 可得：

$$\int_a^x(-F'(y))\mathrm{d}y\leq -F(x)+F(a)\Rightarrow\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y\geq F(x)-F(a).$$

所以对 $x\in[a,b]$，成立：

$$\int_a^x F'(y)\mathrm{d}y=F(x)-F(a).$$

□