第四章：Hilbert 空间

2023 年 6 月 9 日

1. (**Stein 中译本，P144，题 1**) 设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间，其上配备有内积 $(\cdot,\cdot)$，试用内积的定义证明 Cauchy-Schwarz 不等式和三角不等式成立.

证明. 设 $(f,g)=|(f,g)|\alpha$，这里 $\alpha\in\mathbb{C}$ 且 $|\alpha|=1$，令 $h=ge^{-i\theta}$，则 $(f,h)=|(f,g)|$ 而且 $\|h\|=\|g\|$. 考虑实函数：

$$F(\lambda)=(f+\lambda h,f+\lambda h)=\|f\|^2+2|(f,g)|\lambda+\lambda^2\|g\|^2.$$

以上关于 λ 的二次函数在 $-\frac{|(f,g)|}{\|g\|^2}$ 处取得最小值，令 λ 取该值，于是：

$$0\le\|f+\lambda g\|=\|f\|^2-\|g\|^{-2}|(f,g)|^2.$$

所以：

$$|(f,g)|\le\|f\|\|g\|.$$

等号成立当且仅当 $f+\lambda h=f+\lambda e^{-i\theta}g=0$.

对于三角不等式，只需注意到：

$$\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=\|f\|^2+\|g\|^2+(f,g)+\overline{(f,g)}\le\|f\|^2+\|g\|^2+2\|f\|\|g\|=(\|f\|+\|g\|)^2.$$

□

2. (**Stein 中译本，P144，题 2**) 在 Cauchy-Schwarz 不等式中，等号成立的情形我们有如下结论：若 $|(f,g)|=\|f\|\|g\|$ 且 $g\neq0$，则存在某个数 c 使得 $f=cg$.

证明. 不妨假设已经有 $\|f\|=\|g\|=1$，否则可以考虑 $\frac{f}{\|f\|}$ 和 $\frac{g}{\|g\|}$. 则此时 $|(f,g)|=1$. 所以存在 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $(f,g)=e^{i\theta}$. 若用 $fe^{-i\theta}$ 代替 f，则仍然有 $\left\|fe^{-i\theta}\right\|=1$，

所以不妨假设已经有 $(f,g)=1$，于是 $(f-g,g)=(f,g)-(g,g)=0$，由勾股定理可知

$$\|f\|^2=\|f-g\|^2+\|g\|^2.$$

所以 $\|f-g\|^2=0$，于是 $f=g$，合并前面的常数（$\|f\|,\|g\|,e^{i\theta}$）可得存在 c 使得 $f=cg$. □

3. (**Stein 中译本,P144,题 3**) 注意到 Hilbert 空间 H 的任何一对元素都有 $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2+2\operatorname{Re}(f,g)$. 作为一个结果，验证平行四边形法则：

$$\|f-g\|^2+\|f+g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

证明. 直接计算得

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&=(f+g,f+g)=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)\\&=(f,f)+(f,g)+\overline{(f,g)}+(g,g)=\|f\|^2+2\operatorname{Re}(f,g)+\|g\|^2.\end{aligned}$$

作为结果，将 $f-g$ 和 $f+g$ 代入上式得

$$\text{L.H.S.}=\|2f\|^2=4\|f\|^2.$$

$$\begin{aligned}\text{R.H.S.}&=\|f-g\|^2+2\operatorname{Re}(f-g,f+g)+\|f+g\|^2\\&=\|f-g\|^2+\|f+g\|^2+2(\|f\|^2-\|g\|^2)+2\operatorname{Re}[(f,g)-\overline{(f,g)}]\end{aligned}$$

注意 $(f,g)-\overline{(f,g)}$ 是一个纯虚数，于是对比等式两侧即可得到平行四边形法则：

$$\|f-g\|^2+\|f+g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

□

4. (**Stein 中译本，P144，题 4**) 用定义证明，$\ell^2(\mathbb{Z})$ 完备且可分.

证明.
- 先证明完备性. 令 $\{a^k\}_{k\geq1}$ 是 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中的一个 Cauchy 列，其中 $a^k=\{a_j^k\}_{j\geq1}\in\ell^2(\mathbb{Z})$. 由 $\{a^k\}_{k\geq1}$Cauchy 可知:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j^m-a_j^n|^2\to0\quad(m,n\to\infty).$$

所以

$$\sum_{j=-N}^{N}|a_j^m-a_j^n|^2\to0\quad(m,n\to\infty),\quad 对任何N\in\mathbb{N}.$$

因此，$|a_j^m - a_j^n| \to 0(m,n\to\infty)$ 对任何 j 成立，所以 $\{a_j^i\}_{i\geq 1}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列，所以它有极限 $b_j\in\mathbb{C}$. 令 $b=\{b_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$.

另一方面，注意到以下极限可以分步计算，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}|a_j^m - a_j^n|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=-N}^{N}|b_j - a_j^n|^2 = 0,$$

以上极限对任何 N 成立，于是：

$$\|b-a^n\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}|b_j - a_j^n|^2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

这就是说 $\{a^n\}_{n\geq 1}$ 在 ℓ^2 范数意义下收敛到数列 b. 最后注意到：

$$\|b\|_{\ell^2} \leq \|b-a^n\|_{\ell^2} + \|a^n\|_{\ell^2} < \infty.$$

这里用到 $\|b-a^n\|_{\ell^2}\to 0(n\to\infty)$ 以及 Cauchy 列在 ℓ^2 范数下的有界性，于是 $b\in\ell^2(\mathbb{Z})$.

所以 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 是完备的.

- 再证明可分性. 这是容易的，只需考虑 $\mathscr{B}=\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\subset\ell^2(\mathbb{Z})$，其中 e_i 指的是在第 i 项取 1，其他各项都取 0 的数列. 任取 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$，则有：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^2 < \infty.$$

所以

$$\sum_{|n|\geq N+1}|a_n|^2 \to 0 \quad (N\to\infty).$$

考虑 $\sum_{k=-N}^{N} a_k e_k \in \mathrm{Span}(\mathscr{B})$，则有：

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} a_k e_k - a\right\|_{\ell^2}^2 = \sum_{|n|\geq N+1}|a_n|^2 \to 0 \quad (N\to\infty).$$

这说明 $\mathrm{Span}(\mathscr{B})$ 在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中是稠密的. 所以，$\ell^2(\mathbb{Z})$ 是可分的.

□

5. (**Stein 中译本，P144，题 5**) 本题讨论 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 的关系：

(a) $L^2(\mathbb{R}^d)\subset L^1(\mathbb{R}^d)$ 以及 $L^1(\mathbb{R}^d)\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 都不成立;

(b) 若 f 支撑在有限测度的集合 E 上，且 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，则 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{m(E)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) 若 f 是有界的，即 $|f(x)| \le M$，且 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \sqrt{M}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.$$

证明. (a) 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$. 由极坐标公式计算得：

$$\int_{B(0,1)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma(S^{d-1}) \int_0^1 r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r.$$

$$\int_{B(0,1)} f(x)^2\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}} \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha}} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma(S^{d-1}) \int_0^1 r^{d-1-2\alpha}\mathrm{d}r.$$

$$\int_{B(0,1)^c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}} \int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma(S^{d-1}) \int_1^\infty r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r.$$

$$\int_{B(0,1)^c} f(x)^2\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}} \int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma = \sigma(S^{d-1}) \int_1^\infty r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r.$$

取 $\frac{d}{2} < \alpha < d$，则 $d-1-\alpha > -1$，$d-1-2\alpha < -1$，于是 $\int_0^1 r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r < \infty$，$\int_0^1 r^{d-1-2\alpha}\mathrm{d}r = \infty$，$\int_1^\infty r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r = \infty$，$\int_1^\infty r^{d-1-\alpha}\mathrm{d}r < \infty$.

所以，$f\chi_{B(0,1)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$，$f\chi_{B(0,1)} \notin L^2(\mathbb{R}^d)$，$f\chi_{B(0,1)^c} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$，$f\chi_{B(0,1)^c} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
所以，$L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ 都不成立.

(b) 因为 f 支撑在 E 上，所以 $f = f\chi_E$，所以由 Cauchy-Schwarz 不等式得：

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \int f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x \le \left(\int |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int \chi_E(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{m(E)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) 这是因为：

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \left(\int |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le \left(\int M|f(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{M}\left(\int |f(x)|\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{M}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.$$

□

6. (**Stein 中译本，P144，题 6**) 证明如下的集合是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的稠密子空间：

(a) 简单函数；

(b) 具有紧支撑的连续函数.

证明. (a) 在证明 L^2 空间的可分性时我们已经说明了，$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，对任何 $\varepsilon > 0$，都存在阶梯函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f-\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$，而阶梯函数都是简单函数，于是简单函数在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中稠密.

(b) 对任何 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，取截断 $g_n = \begin{cases} f, |x| \le n, |f| \le n \\ 0, \text{o.w.} \end{cases}$. 则对每个 g_n，几乎处处成立 $|f - g_n|^2 \le 4|f|^2$，且逐点成立 $g_n \to f(n \to \infty)$，所以由控制收敛定理可得 $\|f - g_n\|_{L^2}^2 \to 0(n \to \infty)$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$，存在 N，使得 $\|f - g_N\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. 由题 5 的结论可得 $g_N \in L^1$，所以存在具有紧支撑的连续函数 h，使得 $|h| < N$ 且 $\|g_N - h\|_{L^1} < \frac{\varepsilon^2}{8N}$. 根据题 5(c) 的结论：

$$\|g_N - h\|_{L^2} \le \sqrt{2N}\|f\|_{L^1}^{1/2} \le \sqrt{2N}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2N}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

最后：

$$\|h - f\|_{L^2} \le \|g_N - f\|_{L^2} + \|g_N - h\|_{L^2} < \varepsilon.$$

所以具有紧支撑的连续函数在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中稠密. □

7. (**Stein 中译本，P144，题 7**) 设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基. 证明，$\{\varphi_{k,j}\}_{1 \le k,j < \infty}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基，其中 $\varphi_{k,j}(x,y) = \varphi_k(x)\varphi_j(y)$.

证明. 首先证明这是一组标准正交向量组. 由 Fubini 定理计算得：

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi_{k,j}(x,y)\overline{\varphi_{k',j'}(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_k(x)\overline{\varphi_{k'}(x)}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(y)\overline{\varphi_{j'}(y)}\mathrm{d}y\right) = \delta_{kk'}\delta_{jj'}.$$

由此可见 $(\varphi_{k,j}, \varphi_{k',j'}) = 1$ 当且仅当 $(k,j) = (k',j')$，其他情况下等于 0，所以，这是一组标准正交向量组.

然后我们用标准正交基的等价定义来说明这是一组标准正交基. 设 $(F, \varphi_{k,j}) = 0$ 对任何 (k,j) 成立，若能推出 $F = 0$，则说明 $\varphi_{k,j}$ 是一组标准正交基. 对每个 j，考虑函数 $F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\overline{\varphi_j(y)}\mathrm{d}y$，则有 $\int F_j(x)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x = 0$ 对每个 j 成立. 因为 $\{\varphi_k\}_{k \ge 1}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基，且由 Fubini 定理可知 $F_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$，所以 $F_j = 0$ 对每个 j 都成立，再次根据 F_j 的定义以及 $\{\varphi_j\}_{j \ge 1}$ 是标准正交基得 $F(x,y) = 0$.

以上证明了 $\{\varphi_{k,j}\}$ 的确是 $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ 的一组标准正交基. □

8. (**Stein 中译本，P144，题 8**) 令 $\eta(t)$ 是 $[a,b]$ 上严格正的连续函数. 定义 $\mathcal{H}_\eta = L^2([a,b], \eta)$ 是由 $[a,b]$ 上可测函数 f 构成的空间，满足：

$$\int_a^b |f(t)|^2\eta(t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall f \in \mathcal{H}_\eta.$$

定义 $\mathcal{H}_\eta$ 上内积为：

$$(f,g)_\eta = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\eta(t)\mathrm{d}t.$$

(a) 证明，$\mathcal{H}_\eta$ 是 Hilbert 空间，且映射 $U: f \mapsto \eta^{1/2}f$ 给出了 $\mathcal{H}_\eta$ 和通常的空间 $L^2([a,b])$ 之间的一个酉对应;

(b) 将这一结果推广至 η 未必连续的情形.

证明. (a) 显然 $\mathcal{H}_\eta$ 是一个配备有内积的线性空间. 下面只需要说明它是完备的. 设 $\{f_j\}_{j\geq 1}$ 是 $\mathcal{H}_\eta$ 中的一个 Cauchy 列，与证明通常的 $L^2([a,b])$ 的完备性类似的构造方法得存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j\geq 1}$，并且令 $f(x) = f_{k_1} + \sum_{j=1}^\infty [f_{k_{j+1}} - f_{k_j}]$，则可说明 f 是绝对收敛，$f \in L^2([a,b],\eta)$，而且 f_j 依照内积 $(\cdot,\cdot)_\eta$ 诱导的 L^2 范数收敛到 f. 所以 $\mathcal{H}_\eta$ 是 Hilbert 空间. U 显然是一个线性映射，且由 $U^{-1}: g \mapsto \eta^{-1/2}g$ 可得 U 是双射，最后，对 $f \in L^2([a,b])$

$$\|Uf\|^2_{L^2([a,b],\eta)} = \int_a^b |f(t)|^2\eta(t)\mathrm{d}t = \|f\|^2_{L^2([a,b])}.$$

所以 U 是一个酉对应.

(b) 这一结果依然是正确的. 我们令 $\{f_j\}_{j\geq 1}$ 是 $\mathcal{H}_\eta$ 中 Cauchy 列，则 $\{f_j\eta^{1/2}\}_{j\geq 1}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的 Cauchy 列，根据 L^2 空间的完备性可得存在 $g \in L^2([a,b])$ 使得 $f_n\eta^{1/2} \to g$ 依照 L^2 范数成立. 因为 η 是正的，则可定义 $f = \frac{g}{\eta^{1/2}}$，计算 $\|f\|_{L^2([a,b],\eta)} = \left\|g\eta^{-1/2}\right\|_{L^2([a,b],\eta)} = \|g\|_{L^1} < \infty$，所以 $f \in \mathcal{H}_\eta$，再注意到：

$$\|f_j - f\|_{L^2([a,b],\eta)} = \left\|(f_j - f)\eta^{1/2}\right\|_{L^1} = \left\|f_j\eta^{1/2}\right\|_{L^1} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

也就是 $f_n \to f$ 在 $\mathcal{H}_\eta$ 的范数下成立. 所以此时 $\mathcal{H}_\eta$ 仍是 Hilbert 空间. 有关酉对应的结论同样成立. $\square$

9. (**Stein 中译本，P145，题 9**) 令 $\mathcal{H}_1 = L^2([-\pi,\pi])$ 是由单位圆周上的函数 $F(e^{i\theta})$ 组成的 Hilbert 空间，其上配备有内积 $(F,G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta})\overline{G(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta$. 令 $\mathcal{H}_2$ 是 $L^2(\mathbb{R})$. 考虑由 $\mathbb{R}$ 到单位圆周的映射：

$$x \mapsto \frac{i-x}{i+x}$$

证明：

(a) 映射 $U: F \mapsto f$ 定义为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(i+x)}F\left(\frac{i-x}{i+x}\right)$$

给出了一个从 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$ 的酉映射.

(b) 因此，
$$\left\{\frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n\frac{1}{i+x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$
是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组标准正交基.

证明. (a) 显然 U 是一个线性映射，且其逆映射为 $F(y)=\sqrt{\pi}(\frac{2i}{1+y})f(i\frac{1-y}{1+y})$，所以 U 是双射. 最后，

$$\begin{aligned}
\|UF\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}(i+x)}\right|^2\left|F\left(\frac{i-x}{i+x}\right)\right|^2\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{(\frac{2i}{1+e^{i\theta}})}\right|^2\left|F(e^{i\theta})\right|^2\frac{i[-ie^{i\theta}(1+e^{i\theta})-ie^{i\theta}(1-e^{i\theta})]}{(1+e^{i\theta})^2}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|1+e^{i\theta}|^2|F(e^{i\theta})|^2\frac{2}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\\
&= \|F\|_{L^2([-\pi,\pi])}^2.
\end{aligned}$$

所以 U 是一个酉映射.

(b) 我们知道 $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{H}_1$ 的一组标准正交基，又注意到它在酉同构 U 下的像就是 $\left\{\frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n\frac{1}{i+x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$，所以这是 $\mathcal{H}^2$ 的一组标准正交基. 这是因为酉映射保证内积从而保证正交性，另一方面，对 $\mathcal{H}_2$ 中的一个元素 f，考虑它在 $\mathcal{H}_1$ 中的逆像 F，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 G 是 $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 中有限个元素的线性组合，使得：
$$\|F-G\|_{\mathcal{H}^1}<\varepsilon.$$
则根据 U 的线性性可知 $g=UG$ 也是 $\left\{\frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n\frac{1}{i+x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 中有限个元素的线性组合，而且：
$$\|f-g\|_{\mathcal{H}^2}=\|UF-UG\|_{\mathcal{H}^2}<\varepsilon.$$
所以 $\left\{\frac{1}{\pi^{1/2}}\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n\frac{1}{i+x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 中有限个元素的线性组合在 $\mathcal{H}^2$ 中也是稠密的，以上证明了酉映射将一组 O.N. 基映为 O.N. 基. □

10. (**Stein 中译本，P145，题 10**) 设 E 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集，那么 $E^{\perp\perp}$ 包含 E 的最小的闭子空间.

证明. 我们先说明 $E^\perp$ 是闭子空间. 首先 $E^\perp$ 显然在线性运算下是封闭的，所以它是子空间. 另一方面，对任何 $E^\perp$ 中的收敛序列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $f_n \to f$，$\forall g \in E$，都有：

$$|(f,g)|^2 = |(f-f_n,g)|^2 \leq \|f-f_n\|^2\|g\|^2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

所以 $(f,g)=0$，$f\in E^\perp$，所以 $E^\perp$ 是闭的. 所以 $E^{\perp\perp}$ 也是闭的.

另一方面，对任何 $g\in E$，我们说明 $g\in E^{\perp\perp}$，这只需要说明对任何 $f\in E^\perp$ 都有 $g\perp f$. 而根据 $E^\perp$ 的定义自然有 $g\perp f$，所以 $E^{\perp\perp}$ 包含 E. 设 S 是另一个包含 E 的闭子空间，我们说明 $E^{\perp\perp}\subset S$. 首先注意到任取 $S^\perp$ 中的一个元素，它都必须与 E 中所有元素垂直，所以 $S^\perp\subset E^\perp$. 我们说明 $S^{\perp\perp}=S$，$S^{\perp\perp}\subset S$ 是显然的，另一方面，根据 S 是闭子空间可知 $\mathcal{H}=S^{\perp\perp}\oplus S^\perp = S\oplus S^\perp$，因此对所有 $x\in S$，y 有分解 $x=y+z$，其中 $y\in S^{\perp\perp}\subset S$，$z\in S^\perp$. 根据 S 是子空间得 $z=x-y\in S$，于是 $z\in S^\perp\cap S$，所以 $z=0$，因此 $x=y\in S^{\perp\perp}$，于是 $S=S^{\perp\perp}$. 于是由 $S^\perp\subset E^\perp$ 得 $E^{\perp\perp}\subset S^{\perp\perp}=S$. □

11. (**Stein 中译本，P145，题 11**) 令 P 是关于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 S 的正交投影，也就是，若 $f\in S$，则 $P(f)=f$；若 $f\in S^\perp$，则 $P(f)=0$.

(a) 证明 $P^2=P$，$P^*=P$;

(b) 反过来，如果 P 是满足 $P^2=P$ 以及 $P^*=P$ 的有界算子，则 P 是关于 $\mathcal{H}$ 的某个闭子空间的正交投影;

(c) 利用 P 证明如果 S 是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，则 S 也是一个可分的 Hilbert 空间.

证明. (a) 对任何 $f\in\mathcal{H}$，它存在唯一的分解 $f=g+h$，使得 $g\in S$，$h\in S^\perp$，于是：

$$P(f)=P(g)+P(h)=g+0=g.$$

$$P^2(f)=P(P(f))=P(g)=g.$$

所以 $P^2=P$. 为了证明 P 是自伴的，只需要验证 $(Px,y)=(x,Py)$ 对所有 $x,y\in\mathcal{H}$ 成立. 令 $x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$，其中 $x_1,y_1\in S$，$x_2,y_2\in S^\perp$，那么有：

$$(Px,y)=(x_1,y)=(x_1,y_1)+(x_1,y_2)=(x_1,y_1).$$

$$(x,Py)=(x,y_1)=(x_1,y_1)+(x_2,y_1)=(x_1,y_1).$$

所以 P 是自伴的，也就是 $P=P^*$.

(b) 令 $S=\operatorname{Im}P$，则容易验证 S 在线性运算下封闭，于是它是一个子空间. 下面说明 S 是紧的，设 $\{f_n\}$ 是 S 中一列元素，且依范数收敛到 $f\in\mathcal{H}$，于是

$$\|Pf-f\|\leq\|Pf-f_n\|+\|f-f_n\|=\|P(f-f_n)\|+\|f-f_n\|\leq 2\|f-f_n\|\to 0(n\to\infty).$$

所以 $Pf=f$，于是 $f\in S$，所以 S 是一个闭子空间. 下面说明 P 是关于 S 的正交投影. 前面已经说明若 $f\in S$，则 $P(f)=f$. 若 $f\in S^{\perp}$，则对任何 $g\in S$，都有

$$(Pf,g)=(f,Pg)=(f,g)=0.$$

所以 $Pf\in S^{\perp}$，但是另一方面 $Pf\in\operatorname{Im}P=S$，所以由闭子区间及其正交补的直和关系可得 $Pf=0$. 以上证明了 P 的确是关于 S 的正交投影.

(c) 因为 $\mathcal{H}$ 是可分的 Hilbert 空间，所以存在 $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ 使得其有限线性组合在 $\mathcal{H}$ 中稠密. 对任何 $f\in S$，$\forall\varepsilon>0$，不妨设

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{K}c_k\phi_k\right\|<\varepsilon$$

于是

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{K}c_KP\phi_k\right\|=\left\|P\left(f-\sum_{k=1}^{K}c_k\phi_k\right)\right\|\leq\left\|f-\sum_{k=1}^{K}c_k\phi_k\right\|<\varepsilon.$$

所以 $\{P\phi_k\}_{j\geq 1}$ 的有限线性组合在 S 中是稠密的，于是 S 是可分的 Hilbert 空间. □

12. (**Stein 中译本，P145，题 12**)E 是 $\mathbb{R}^d$ 可测子集，S 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中对 a.e.$x\notin E$ 都等于零的函数构成的子空间. 证明，S 上的正交投影 P 由 $P(f)=\chi_Ef$ 给出，其中 χ_E 是 E 的特征函数.

证明. 首先说明 S 是一个闭子空间. 设 f_n 是 S 中的序列，且依范数有 $f_n\to f$. 则

$$\|\chi_Ef-f\|\leq\|\chi_Ef-f_n\|\leq\|f_n-f\|\leq\|\chi_E(f-f_n)\|\leq\|f-f_n\|\leq 2\|f_n-f\|\to 0(n\to\infty).$$

所以 $\chi_Ef=f$a.e.，所以 $f\in S$，于是 S 的确是闭子空间.

下面我们用题 11 的 b 结论来验证 P 就是到 S 的正交投影. 为此，只需验证 P 是有界线性算子、$P^2=P$ 以及 $P^*=P$.

P 显然线性，其次，注意到 $|\chi_E(x)f(x)|\leq|f(x)|$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^d$，所以：

$$\|Pf\|=\|\chi_Ef\|\leq\|f\|.$$

所以 P 的确是有界线性算子.

另外，$\chi_E^2 = \chi_E$ 对任何 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立，所以，$P^2 f = \chi_E^2 f = \chi_E f = Pf$，因此 $P^2 = P$.

最后，对任何 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们都有：

$$(Pf, g) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\chi_E(x) g(x)} \mathrm{d}x = (f, Pg).$$

再根据 P 是有界线性算子知 $P = P^*$.

综上所述，P 的确是到子空间 $\operatorname{Im} P$ 的正交投影（根据题 11 的 b）. 然而，对所有在 E^c 上几乎处处为 0 的函数 f，$\chi_E f = f$ 在几乎处处的意义下. 因此，$f \in \operatorname{Im} P$，所以 $\operatorname{Im} P = S$，即 P 是对闭子空间 S 的正交投影. $\square$

13. (**Stein 中译本，P145，题 13**)P_1 和 P_2 分别是 S_1 和 S_2 上的正交投影，则 P_1P_2 也是正交投影当且仅当 P_1 和 P_2 交换. 在这种情形下，P_1P_2 是闭子空间 $S_1 \cap S_2$ 上的正交投影.

证明.

- 设 P_1 和 P_2 交换，则：

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = (P_1)^2(P_2)^2 = P_1P_2,$$

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2,$$

  综上所述，$(P_1P_2)^* = (P_1P_2)^2 = P_1P_2$. P_1 和 P_2 都是有界线性算子 $\Rightarrow$ P_1P_2 是有界线性算子，所以 P_1P_2 是到某个闭子空间的正交投影.

- 设 P_1P_2 是正交投影，则 $P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$.

- 在以上情况下，我们说明 P_1P_2 是对闭子空间 $S_1 \cap S_2$ 的正交投影. 首先，因为 S_1 和 S_2 的欧式闭子空间，所以 $S_1 \cap S_2$ 也是闭子空间，所以 H 有直和分解：

$$H = (S_1 \cap S_2) \oplus (S_1 \cap S_2)^{\perp}.$$

  $\forall f \in H$，存在唯一的 $g \in S_1 \cap S_2$，$h \in (S_1 \cap S_2)^{\perp}$，使得 $f = g + h$，于是有：

$$(P_1P_2)f = P_1P_2g + P_1P_2h = P_1g + P_1P_2h = g + P_1P_2h.$$

  因为 $P_1P_2h = P_2P_1h$，所以 $P_1P_2h \in S_1 \cap S_2$，于是根据 $h \in (S_1 \cap S_2)^{\perp}$：

$$\|P_1P_2h\|^2 = (P_1P_2h, P_1P_2h) = (h, (P_1P_2)^2h) = (h, P_1P_2h) = 0.$$

所以 $P_1P_2h = 0$，所以 $(P_1P_2)f = g$，所以 P_1P_2 的确是到 $S_1 \cap S_2$ 的正交投影.

$\square$

14. (**Stein 中译本，P146，题 14**) 假定 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是准 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_0$ 的两个完备化，证明存在 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}'$ 的酉映射 U，使得它是一个 $\mathcal{H}_0$-酉同构（即 $U|_{\mathcal{H}_0} = \mathrm{Id}|_{\mathcal{H}_0}$）.

证明. 任取一个 $f \in \mathcal{H}$，因为 $\mathcal{H}_0$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，所以存在一个 $\mathcal{H}_0$ 中的点列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 使得 $f_n \to f$. 因为它是 $\mathcal{H}_0$ 中的收敛列，所以必然是 $\mathcal{H}_0$ 中的 Cauchy 列. 根据 $\mathcal{H}'$ 的完备性可知 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 收敛到某个 $f' \in \mathcal{H}'$，且这个 f' 在 $\mathcal{H}'$ 中是唯一的，于是这给出了一个映射 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$，$f \mapsto f'$，根据唯一性可知它是良好定义的. 下面验证它是一个酉同构.

(1) 它是线性映射. 这是因为对 f 和 g 存在 $\mathcal{H}_0$ 中的 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{g_n\}_{n\geq 0}$ 分别收敛到 f 和 g，于是 $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n\geq 0}$ 也是 $\mathcal{H}_0$ 中的 Cauchy 列，收敛到 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}$. 另一方面 $f_n \to f' \in \mathcal{H}'$，$g_n \to g' \in \mathcal{H}'$，所以 $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f' + \beta g'$，所以 $U(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g' = \alpha Uf + \beta Ug$.

(2) 若 $Uf = 0$，则 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 收敛到 0，因此 0 的原像只能为 0，又因为 U 线性，所以 U 单射. 另外，对于任何 $f' \in \mathcal{H}'$，根据 $\mathcal{H}_0$ 在 $\mathcal{H}'$ 中稠密存在 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 是 $\mathcal{H}_0$ 中的点列使得 $f_n \to f'$，所以 f_n 是 $\mathcal{H}_0$ 中 Cauchy 列，所以 f_n 也收敛到某个点 $f \in \mathcal{H}$，所以 U 是满射. 综上所述 U 是双射.

(3) 注意到 $\|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \to 0$，$\|f_n - f'\|_{\mathcal{H}'} = \|f_n - Uf\|_{\mathcal{H}'} \to 0$，所以根据三角不等式得：

$$\|f\|_{\mathcal{H}} - \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \leq \|f_n\|_{\mathcal{H}_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} + \|f_n - f\|_{\mathcal{H}};$$

$$\|Uf\|_{\mathcal{H}'} - \|f_n - Uf\|_{\mathcal{H}'} \leq \|f_n\|_{\mathcal{H}_0} \leq \|Uf\|_{\mathcal{H}'} + \|f_n - Uf\|_{\mathcal{H}'}.$$

取 $n \to \infty$ 可得 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_0}$ 存在而且

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_0} = \|f\|_{\mathcal{H}} = \|Uf\|_{\mathcal{H}'}.$$

即对任何 $f \in \mathcal{H}$，都有：

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \|Uf\|_{\mathcal{H}'}.$$

$\square$

15. (**Stein 中译本，P146，题 15**) 令 T 是从 H_1 到 H_2 的线性算子，H_1 有限维，则 T 必是有界线性算子.

证明. 取 H_1 的一组标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 对任何 $x \in H_1$，x 表示成 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$，则 $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}$。令 $M = \max_{1\le i\le n} \|Te_i\|$，则：

$$\|Tx\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \|Te_i\| \le M \sum_{i=1}^n |x_i| \le \sqrt{2}M \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right) = \sqrt{2}M\|x\|.$$

□

16. (**Stein 中译本，P146，题 17**) 如下所述，Fatou 定理有一种推广的版本，即允许点趋向大区域的边界.

对每个 $0 < s < 1$ 和单位圆周上的点 z，考虑 $\Gamma_s(z)$ 定义为包含 z 和闭圆盘的最小闭凸集. 即，$\Gamma_s(z)$ 由连接 z 与 $D_s(0)$ 所有点的所有点的所有直线组成. 如书中图所示.

我们说定义在开单位圆盘上的函数 F 有一个非切向极限，如果对每个 $0 < s < 1$，极限

$$\lim_{\Gamma_s(z)\ni w\to z} F(w)$$

存在.

证明，若 F 在开圆盘上全纯且有界，则 F 在单位圆周上几乎每个点存在切向极限.

证明. 根据复分析，我们注意 $F(re^{i\theta})$ 可以用 Poisson 积分计算；

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\varphi})P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi.$$

所以我们只需要说明右边的 Poisson 积分几乎处处存在非切向极限即可.

我们首先证明关于 Poisson 积分的一个结论：

引理 1. *设 $P_r(\theta)$ 是 Poisson 核：*

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|}.$$

则对所有靠近 $e^{i\theta_0}$ 的 $re^{i\theta} \in \Gamma_s(e^{i\theta_0})$，存在一个和 s 有关的常数 $\beta > 0$，使得：

$$P_r(\theta) \le (1+\beta)^2 P_r(\theta_0).$$

证明.（引理的证明）根据三角不等式有：

$$\left|1-re^{i\theta_0}\right| \le \left|1-re^{i\theta}\right| + r\left|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}\right| \le |1-re^{i\theta}| + |\theta-\theta_0|.$$

下面估计 $|\theta-\theta_0|$. 记 $\delta=1-r$，则如图1所示，$|\theta-\theta_0|<\alpha=\angle AOB$.

记 $\gamma=\angle ABO$，在三角形 AOB 用余弦定理可得：

$$|OA|=\sqrt{1+\delta^2-2\delta\cos\gamma}.$$

再用正弦定理可得：

$$\sin\alpha=\frac{\delta\sin\gamma}{\sqrt{1+\delta^2-2\delta\cos\gamma}}.$$

即

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{\delta\sin\gamma}{1+\delta^2-2\delta\cos\gamma}\right)\le 3\delta\sin\gamma=\beta(s)\delta.$$

这里假设了 $re^{i\theta}$ 距离 $e^{i\theta_0}$ 足够近使得 $\delta<\frac{1}{3}$,此时 $1+\delta^2-2\delta\cos\gamma>1-2\delta\cos\gamma>\frac{1}{3}$. 于是：

$$|1-re^{i\theta_0}|\le|1-re^{i\theta}|+\beta\delta=|1-re^{i\theta}|+\beta(1-r)\le(1+\beta)|1-re^{i\theta}|.$$

因此立刻得到

$$P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|}\le(1+\beta)^2\frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta_0}|}=(1+\beta)^2P_r(\theta_0).$$

□

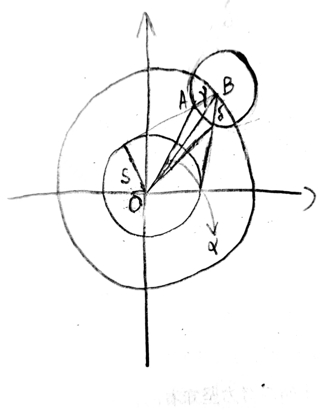

图 1: 引理 1 示意图

下面我们运用引理的结论证明 Poisson 积分几乎处处存在非切向极限，即极限：

$$\lim_{\substack{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}\\ re^{i\theta}\in\Gamma_s(e^{i\theta_0})}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{i\varphi})P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi=F(e^{i\theta_0}),\quad \text{对几乎处处 }\theta_0\text{ 成立}.$$

我们把积分分成两个部分来估计，考虑一段圆弧：

$$A_1(h)=\{e^{i\tau}:|\tau|<h,h>0,\tau\in[-\pi,\pi]\},$$

以及 $A_2(h)$ 为单位圆周去掉 $A_1(h)$ 剩余的部分，则有；

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{A_1(h)} + \int_{A_2(h)}.$$

对于第一部分，因为 $re^{i\theta}$ 在开凸集 $\Gamma_s(e^{i\theta_0})$ 中，所以我们选取 h 足够小就有 $re^{i(\theta-\varphi)} \in \Gamma_s(e^{i\theta_0})$.

首先，由引理的结论有如下估计：

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}[F(e^{i\varphi})-F(e^{i\theta_0})]P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}|F(e^{i\varphi})P_r(\varphi-\theta)|\mathrm{d}\varphi \\ &\leq \frac{(1+\beta)^2}{2\pi}\int_{A_1}|[F(e^{i\varphi})-F(e^{i\theta_0})]P_r(\varphi-\theta_0)|\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{(1+\beta)^2}{2\pi}((F-F(e^{i\theta_0}))*P_r)(e^{i\theta_0}).\end{aligned}$$

注意到 Poisson 核 $\{P_r\}$ 在 $r \to 1$ 时是一族恒同逼近，于是对所有 θ_0 在函数 $F(e^{i\theta_0})$ 的 Lebesgue 集中，都有：

$$\lim_{\substack{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}\\ re^{i\theta}\in\Gamma_s(e^{i\theta_0})}}((F-F(e^{i\theta_0}))*P_r)(e^{i\theta_0}) = \lim_{r\to 1^-}((F-F(e^{i\theta_0}))*P_r)(e^{i\theta_0}) = F(e^{i\theta_0})-F(e^{i\theta_0}) = 0.$$

而根据径向形式的 Fatou 定理，$F(e^{i\theta_0})$ 是一个 L^2 函数，因而也是 L^1 函数，于是对几乎处处 θ_0，θ_0 都是其 Lebesgue 点，所以极限式：

$$\lim_{\substack{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}\\ re^{i\theta}\in\Gamma_s(e^{i\theta_0})}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}[F(e^{i\varphi})-F(e^{i\theta_0})]P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\right| = 0.$$

对几乎处处 θ_0 成立.

另一方面，

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_2}[F(e^{i\varphi})-F(e^{i\theta_0})]P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\right| &\leq \frac{\|F\|_{L^1}+\|F\|_{L^\infty}}{2\pi}\int_{A_2}P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\|F\|_{L^1}+\|F\|_{L^\infty}}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\cap\{|\tau|>h\}}P_r(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

根据 $\{P_r\}$ 在 $r \to 1$ 是为恒同逼近可知：

$$\int_{[-\pi,\pi]\cap\{|\tau|>h\}}P_r(\tau) \to 0 \quad (r \to 1^-)$$

由此可知

$$\lim_{\substack{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}\\ re^{i\theta}\in\Gamma_s(e^{i\theta_0})}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_2}[F(e^{i\varphi})-F(e^{i\theta_0})]P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\right| = 0.$$

综上所述：

$$\lim_{\substack{re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}\\ re^{i\theta}\in\Gamma_s(e^{i\theta_0})}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\varphi})P_r(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi - F(e^{i\theta_0})\right| = 0,$$

对几乎处处 θ_0 成立. □

17. (**Stein 中译本，P146，题 18**) 令 H 是 Hilbert 空间，$L(H)$ 是 H 上所有有界线性算子组成的线性空间. 给定 $T\in L(H)$，定义算子范数：

$$\|T\| = \inf\{B : \|Tv\| \le B\|v\|, \text{for all } v\in H\}.$$

(a) 证明，只要 $T_1, T_2 \in L(H)$，就成立 $\|T_1+T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$.

(b) 证明，

$$d(T_1,T_2) = \|T_1 - T_2\|.$$

定义了 $L(H)$ 上的一个度量.

(c) 证明度量 d 下 $L(H)$ 是完备的.

证明. (a) 事实上 $\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$，于是：

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1x+T_2x\|}{\|x\|}\\ &\le \sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1x\|+\|T_2x\|}{\|x\|}\\ &\le \sup_{x_1\neq 0}\frac{\|T_1x_1\|}{\|x_1\|} + \sup_{x_2\neq 0}\frac{\|T_2x_2\|}{\|x_2\|}\\ &= \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

(b) 我们需要验证 d 满足正性、对称性和三角不等式.

根据定义 $\|T_1-T_2\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T_1x-T_2x\|}{\|x\|}$ 可知 $\|T_1-T_2\|\ge 0$ 且 $\|T_1-T_2\| = \|T_2-T_1\|$. 三角不等式由 (a) 可知成立.

(c) 设 $\{T_i\}_{i\ge 0}$ 是 $L(H)$ 中算子范数下的 Cauchy 列，于是 $\forall x\in H$，都有：

$$\|T_nx - T_mx\| \le \|(T_n-T_m)x\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| \to 0 \quad (m,n\to\infty).$$

所以 $\{T_ix\}_{i\ge 0}$ 是 H 中的 Cauchy 列. 根据 Hilbert 空间的完备性可知，存在唯一的 $y\in H$，使得依照 Hilbert 空间上的范数有：

$$T_ix \to y \quad (i\to\infty).$$

因此，我们可以定义一个映射 $T: H \to H$，$x \mapsto Tx$，其中 Tx 是上述的 y，下面证明 T 是一个有界线性算子.

首先证明线性性. 对于 $x, y \in H$，考虑 $\alpha x + \beta y \in H$，我们说明 $T_i(\alpha x + \beta y) \to \alpha Tx + \beta Ty$，从而 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$. 这是因为：

$$\|T_i(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty\| \leq |\alpha|\|T_i x - Tx\| + |\beta|\|T_i y - Ty\|.$$

注意到 $T_i x \to Tx (i \to \infty)$,$T_i y \to Ty (i \to \infty)$,所以 $\|T_i(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty\| \to 0 (i \to \infty)$，所以 T 的确是一个线性算子.

其次证明有界性. 注意 $\|Tx\| = \lim_{i\to\infty} \|T_i x\| \leq (\lim_{i\to\infty} \|T_i\|) \|x\|$. 因为由三角不等式可得 $|\|T_m\| - \|T_n\|| \leq \|T_m - T_n\|$，所以 $\|T_i\|$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 列，所以它收敛，因此 $\lim_{i\to\infty} \|T_i\|$ 存在且有限，因此 T 是有界算子.

以上证明了 T 是有界线性算子，最后说明 $\{T_i\}$ 按照算子范数收敛到 T. 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 N 足够大，设 $m > n > N$，则有 $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$，所以对任何 $x \in H$ 都有：

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

因为 $T_n x - T_m x$ 依 H 中的范数收敛到 $T_n x - T$（$m \to \infty$），所以

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|, \forall x \in H$$

于是：

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n x - Tx\|}{\|x\|} \leq \varepsilon, \forall n > N$$

□

18. (**Folland,Chap.5,Ex.63**)Let H be an infinite-dimensional Hilbert space.

(a) Every orthonormal sequence in H converges weakly to 0;

(b) The unit sphere $\mathbb{S} = \{x : \|x\| = 1\}$ is weakly dense in the closed unit ball $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$.(Every $x \in B$ is the weak limit of some sequence in $\mathbb{S}$.)

证明. (a) 设 $\{e_k\}_{k\geq 1}$ 是 H 中比标准正交序列，根据 Bessel 不等式，$\forall f \in H$，都有：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

所以 $\lim_k (f, e_k) = 0$. 于是 e_k 弱收敛到 0.

(b) 即证明单位球面在单位闭球中弱稠密. 取 $\mathbb{S}$ 中的一列标准正交序列 $\{e_k\}_{k\geq 1}$. 对任何 $x\in B$，考虑 $\varphi_k(\lambda)=\|x+\lambda e_k\|^2(\lambda\in\mathbb{R})$，则 $\varphi_k(\lambda)=(x+\lambda e_k,x+\lambda e_k)=\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x,e_k)\lambda+\lambda^2$. 因为 $0\leq\|x\|\leq 1$，根据二次函数的性质可知，对每个 k，存在 λ_k 使得 $|\varphi_k(\lambda_k)|=1$，即 $x+\lambda_k e_k\in\mathbb{S}$. 我们说明 $\{x+\lambda_k e_k\}_k\subset\mathbb{S}$ 实际上弱收敛到 x. 首先断言 $|\lambda_k|\leq 2,\forall k\in\mathbb{N}$，否则：

$$\|x+\lambda_k e_k\|\geq|\lambda_k|\|e_k\|-\|x\|>2-\|x\|\geq 1,$$

这与 $x+\lambda_k e_k\in\mathbb{S}$ 是矛盾的.

因此，根据 (a) 的结论：

$$|(x+\lambda_k e_k,f)-(x,f)|\leq|\lambda_k||(e_k,f)|\leq 2|(e_k,f)|\to 0(k\to\infty)$$

于是 $\lim_k(x+\lambda_k e_k,f)=(x,f)$. 这就证明了单位球面在单位闭球中弱稠密. □

19. (**Stein 中译本，P147，题 20**) 假设 H 是无穷维可分 Hilbert 空间. 我们已经见过这样的例子：即 $\{f_n\}\subset H$ 为 H 中的序列，满足对所有的 n 都有 $\|f_n\|=1$，但是 $\{f_n\}$ 的任何子列在 H 中不（依范数）收敛.

但是，对任何 H 中的序列 $\{f_n\}$ 满足 $\|f_n\|=1$，存在 $f\in H$ 以及子列 $\{f_{n_k}\}$，使得对任何 $g\in H$，都有

$$\lim_{k\to\infty}(f_{n_k},g)=(f,g).$$

我们称子列 $\{f_{n_k}\}$ **弱收敛**于 f.

证明. 因为 H 是无穷维可分 Hilbert 空间，取 H 的一个标准正交基 $\{e_i\}_{i\geq 1}$，对每个 f_n，令：

$$a_n^{(i)}=(f_n,e_i).$$

则根据 Parseval 恒等式，有：

$$\|f_n\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_n^{(i)}|^2=1.$$

由此可知每个 i，数列 $\{a_n^{(i)}\}_{n\geq 1}$ 都是有界数列. 特别地，对 $i=1$，$\{a_n^{(1)}\}_{n\geq 1}$ 有收敛子列 $\{a_{1n}^{(1)}\}_{n\geq 1}$，设其极限为 $a^{(1)}$. 其次，对数列 $\{a_{1n}^{(2)}\}_{n\geq 1}$，仍然是有界数列，于是存在收敛子列 $\{a_{2n}^{(2)}\}_{n\geq 1}$，设其极限为 $a^{(2)}$. 而且，根据 $\{a_{2n}^{(1)}\}$ 是 $\{a_{1n}^{(1)}\}$ 的子列可知 $a_{2n}^{(1)}\to a^{(1)}$. 这样依次操作下去，我们得到了一系列的点列：

$$\{f_{0n}\},\{f_{1n}\},\{f_{2n}\},\cdots.$$

其中，$\{f_{0n}\} = \{f_n\}$，且每个 $\{f_{(j+1)n}\}$ 是 $\{f_{jn}\}$ 的子列. 而且，对于 $\{f_{jn}\}$，有 $a_{jn}^{(i)} \to a^{(i)}(n \to \infty)$，对所有 $1 \le i \le j$ 都成立. 我们选取 $\{f_{nn}\}_{n\ge1}$，则对每个 i，当 $n \ge i$ 时，$a_{nn}^{(i)}$ 是 $a_{in}^{(i)}$ 子列，所以 $a_{nn}^{(i)} \to a^{(i)}(n \to \infty)$ 对每个 i 都成立. 我们定义 f 使得 $(f, e_i) = a^{(i)}$，则：$(f_{nn} - f, e_i) = a_{nn}^{(i)} - a^{(i)} \to 0(n \to \infty)$. 因为对任何 g，g 可以用有限个 e_i 的线性组合逼近，因此 $(f_n n - f, g) \to 0(n \to \infty)$ 即 $(f_n, g) \to (f, g)(n \to \infty)$ 对任何 $g \in H$ 都成立，所以 $\{f_{nn}\}$ 的确弱收敛到 g. 注意到 $\{f_{nn}\}$ 实际上是来自 $\{f_n\}$ 的一个子列，所以将其重新记为 $\{f_{n_k}\}$ 即证明了结论. □

评注 1. *该命题和 Arzelà-Ascoli 定理的证明方法是完全相同的.*

20. (**Stein 中译本，P147，题 21**) 可分 Hilbert 空间 H 上的有界算子空间 $L(H)$ 中的序列 $\{T_n\}$ 收敛到有界算子 T 有多种形式：

- **依范数收敛**：$\|T_n - T\| \to 0(n \to \infty)$；
- **强收敛**：逐点收敛，即 $\forall f \in H$，都有 $T_n f \to Tf(n \to \infty)$;
- **弱收敛**：即 $\forall f, g \in H$，都有 $(T_n f, g) \to (Tf, g)(n \to \infty)$.

(a) 举例说明：弱收敛无法推出强收敛，强收敛无法推出依范数收敛；

(b) 证明，对任何有界算子 T，存在有限秩的有界算子序列 $\{T_n\}$ 使得当 $n \to \infty$ 时，在强收敛意义下有 $T_n \to T$.

证明. (a) 弱收敛无法推出强收敛：设 $H = \ell^2(\mathbb{N})$，T_n 是平移算子，即：

$$T_n : (a_1, \cdots) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n\text{ 个}}, a_1, \cdots)$$

显然，T_n 是线性的，而且，对 $x \in \ell^2(\mathbb{N})$，有 $\|T_n x\| = \|x\|$，所以 T_n 是有界线性算子.

对 $x = (a_1, \cdots)$ 和 $y = (b_1, \cdots)$，我们有：

$$(T_n x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{n+k} = (x, S^n y).$$

其中 S 是向左平移的算子，定义为 $Sy = (b_2, b_3, \cdots)$. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|(T_n x, y)| \le \|x\|\|S^n y\| \to 0(n \to \infty).$$

这是因为，$\sum|b_n|<\infty$，所以其尾项之和即 $\|S^n y\|^2\to 0(n\to\infty)$. 这说明，$T_n$ 弱收敛到零算子 O. 但是我们指出 T_n 不强收敛到 O. 这是因为归纳可得 $\|T_n x\|=\|x\|$，对任何 n，所以取 $x\neq 0$ 即可得到 $T_n x\not\to Ox=0$.

强收敛无法推出依范数收敛：仍然设 $H=\ell^2(\mathbb{N})$，S 是向左平移的算子, 显然 S 是线性的. 因为：

$$\|Sy\|^2=\sum_{i=2}^{\infty}|b_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2-|b_1|^2=\|y\|^2-|b_1|^2\leq\|y\|^2.$$

所以，S 是有界线性算子. 令 $T_n=S^n$，则对任何 $x=(a_1,\cdots)\in\ell^2(\mathbb{N})$，我们有：

$$\|T_n x-Ox\|^2=\sum_{k\geq n+1}|a_n|^2\to 0(n\to\infty)$$

即 $T_n x\to Ox=0(n\to\infty)$，因此 $\{T_n\}$ 强收敛至零算子 O. 但是，我们指出 T_n 不依范数收敛到 O，这是因为：

$$\|T_n-O\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|T_n x\|}{\|x\|}\geq\frac{\|T_n(1,0,\cdots)\|}{\|(1,0,\cdots)\|}=\frac{1}{1}=1.$$

所以 $\|T_n-O\|\not\to 0(n\to\infty)$.

(b) 定义 $T_n e_i=\sum_{j=1}^{n}(Te_i,e_j)e_j$,其中 $\{e_i\}$ 是 H 一组标准正交基. 记 $a_{ij}=(Te_i,e_j)$. 注意 $\operatorname{Im}T_n\subset\operatorname{Span}(e_1,\cdots,e_n)$，所以 T_n 都是有限秩的. 设 $f\in H$，其中 f 由 $(f,e_i)=c_i$ 决定，于是 f 可表示为 $f=\sum_{i=1}^{\infty}c_i e_i$，则此时由 T_n、T 都是有界线性算子可得：

$$Tf=T\left(\lim_N\sum_{i=1}^{N}c_i e_i\right)=\lim_N\sum_{i=1}^{N}c_i T(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i a_{ij}e_j,$$

$$T_n f=T_n\left(\lim_N\sum_{i=1}^{N}c_i e_i\right)=\lim_N\sum_{i=1}^{N}c_i T_n(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}c_i a_{ij}e_j.$$

注意到 T 和 T_n 都是有界线性算子，所以以上级数都是绝对收敛的，由此可知：

$$Tf=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i a_{ij}e_j.$$

$$T_n f=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}c_i a_{ij}e_j.$$

绝对收敛性保证了求和顺序交换的合法性. 由此可知，$T_n f$ 就是 Tf 的部分和，所以 $T_n\to T$ 强收敛. $\square$

21. (**Stein 中译本，P147，题 22**) 如果对所有 $f \in H$，$\|Tf\| = \|f\|$，那么就称算子 T 是等距的.

(a) 证明若 T 是一个等距，则对每个 $f, g \in H$，$(Tf, Tg) = (f, g)$，特别地，$T^*T = I$;

(b) 若 T 是等距且是满射，则 T 是酉映射且 $TT^* = T^*T = I$;

(c) 给出一个是等距但不是酉映射的例子；

(d) 证明，若 T^*T 是酉映射，则 T 是等距.

证明. (a) 证明是考虑极化公式：

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\| - \|x-y\| + i\left\|\frac{x}{i} + y\right\| - i\left\|\frac{x}{i} - y\right\|\right),$$

代入 Tf 和 Tg 可得：

$$\begin{aligned}
(Tf, Tg) &= \frac{1}{4}\left(\|Tf+Tg\| - \|Tf-Tg\| + i\left\|\frac{Tf}{i} + Tg\right\| - i\left\|\frac{Tf}{i} - Tg\right\|\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|T(f+g)\| - \|T(f-g)\| + i\left\|T\left(\frac{f}{i} + g\right)\right\| - i\left\|T\left(\frac{f}{i} - g\right)\right\|\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|f+g\| - \|f-g\| + i\left\|\frac{f}{i} + g\right\| - i\left\|\frac{f}{i} - g\right\|\right) \\
&= (f, g).
\end{aligned}$$

因此等距是保持内积的. 特别地，$(Tf, Tg) = (f, T^*(Tg)) = (f, (T^*T)g), \forall f, g \in H$，即 $(f, (T^*T - I)g) = 0$，$\forall f, g \in H$. 取 $f = (T^*T - I)g$，则有 $\forall g \in H$，都有：

$$\|(T^*T - I)g\| = 0, \quad \forall g \in H.$$

所以 $(T^*T - I)g = 0$，$\forall g \in H$，所以 $T^*T - I = 0$ 即 $T^*T = I$.

(b) 我们断言 T 是单射. 否则，设 $f \neq g$，$Tf = Tg$，则两边同时作用 T^* 可得 $f = g$，这与 $f \neq g$ 矛盾，所以 T 是单射且满射，于是 T 是双射. 再根据 $T^*T = I$ 可得 $T^* = T^{-1}$，所以 $TT^* = I$. 最后，我们说明 T 是线性映射. 为此我们首先验证 T^* 是线性的，这是因为：

$$\begin{aligned}
(f, T^*(\alpha g_1 + \beta g_2)) &= (Tf, \alpha g_1 + \beta g_2) \\
&= (Tf, \alpha g_1) + (Tf, \beta g_2) \\
&= \overline{\alpha}(Tf, g_1) + \overline{\beta}(Tf, g_2) \\
&= \overline{\alpha}(f, T^*g_1) + \overline{\beta}(f, T^*g_2) \\
&= (f, \alpha T^*g_1) + (f, \beta T^*g_2) \\
&= (f, \alpha T^*g_1 + \beta T^*g_2).
\end{aligned}$$

对所有 f, g_1, g_2 都成立，类似 (a) 中的论证过程可得

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, g_1, g_2 \in H.$$

所以：

$$T(\alpha f + \beta g) = T[T^*(\alpha Tf + \beta Tg)] = (TT^*)(\alpha Tf + \beta Tg) = I(\alpha Tf + \beta Tg) = \alpha Tf + \beta Tg.$$

综上所述 T 是酉映射.

(c) 定义 $H^* \to H : \ell \mapsto g$，这里 g 定义为使得 $\ell(f) = (f, g)$ 对任何 $f \in H$ 成立的 H 中的元素. 根据 Riesz 表示定理，这样的 g 是唯一的，因此该映射是良定义的.

对于 Hilbert 空间 H^* 和 H，其上的范数分别为有界线性泛函的算子范数以及 H 中元素的范数. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \Rightarrow \frac{|\ell(f)|}{\|f\|} = \frac{|(f, g)|}{\|f\|} \leq \|g\|.$$

另一方面，当 $f = g$ 时，

$$\frac{|\ell(f)|}{\|f\|} = \frac{|(g, g)|}{\|g\|} = \frac{\|g\|^2}{\|g\|} = \|g\|.$$

所以 ℓ 的算子范数恰好就是 $\|g\|_H$，由此可知这一映射给出了 H^* 和 H 之间的等距.

但是我们指出该映射不是线性的. 这需要回忆 Riesz 表示定理的证明过程. 我们设 ℓ 的零空间为 $\ker \ell = \{x \in H : \ell(x) = 0\}$，则它是 H 的一个闭子空间. 如果 $\ker \ell = H$，则 ℓ 是零线性泛函，这时 $g = 0$. 如果 $\ker \ell \neq H$，则 $\ker \ell^\perp$ 是非平凡的，此时任取一个 $h \in \ker \ell^\perp$ 满足 $\|h\| = 1$，则 g 可以表示为 $g = \overline{l(h)} h$. 我们说明 $\ell(f) = (f, g)$ 对任何 $f \in H$ 成立，这是因为，可以考虑 $u = \ell(f)h - \ell(h)f$，则 $u \in \ker \ell^\perp$，$(u, h) = 0$. 所以：

$$0 = (u, h) = \ell(f)(h, h) - (f, \overline{l(h)} h) = \ell(f) - (f, g).$$

总结来说，线性泛函 ℓ 在该等距下的像可以表示为 $g = \overline{l(h)} h$. 对于线性泛函 $\alpha \ell$，$\alpha \in \mathbb{C}$，$\ker \alpha \ell = \ker \ell$，所以其像可以表示为 $g' = \overline{\alpha l(h)} h = \overline{\alpha} \overline{\ell(h)} h = \overline{\alpha} g \neq \alpha g$，这说明改等距不是线性的，因此不是酉的.

(d) 首先，根据 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\|Tf\|^2 = (Tf, Tf) = (f, T^*Tf) \leq \|f\| \|T^*Tf\| = \|f\|^2$$

所以，$\|Tf\| \leq \|f\|$，于是，另一方面，

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \|T^*Tf\|^2 = (T^*Tf, T^*Tf) &\leq (Tf, TT^*Tf) \\ &\leq \|Tf\|\|T(T^*Tf)\| \leq \|Tf\|\|T^*Tf\| = \|Tf\|\|f\|\end{aligned}$$

所以，$\|f\| \leq \|Tf\|$ 对所有 $f \in H$ 成立. 将两个不等号结合可知 $\|Tf\| = \|f\|$. □

22. (**Stein 中译本，P147，题 23**) 假定 $\{T_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 上一列有界线性算子，同时，对所有的 k，都有 $\|T_k\| \leq 1$，也假定对所有的 $k \neq j$，都有:

$$T_k T_j^* = T_k^* T_j = 0.$$

令 $S_N = \sum_{k=-N}^{N} T_k$ 证明，当 $N \to \infty$ 时，对每个 $f \in H$，都有 $S_N(f)$ 收敛. 若以 $T(f)$ 表示该极限，证明 $\|T\| \leq 1$.

证明. 首先考虑只有有限多个算子不为零的情形. 此时存在一个正整数 N 使得对所有的 $k > 0$ 都有：

$$S_{N+k}(f) = S_N(f).$$

所以按照定义 $S_N(f)$ 就收敛，记其极限为 $T(f)$，则有：

$$T(f) = \sum_{i=-N}^{N} T_i(f).$$

记 H 的一个闭子空间为 $V_i = \operatorname{Im} T_i$，则我们断言每个 V_i 相互正交，这是因为，对任何 $T_i x \in V_i$，$T_j y \in V_j$，$i \neq j$，都有：

$$(T_i x, T_j y) = (x, T_i^* T_j y) = 0.$$

所以，这些闭子空间相互正交. 我们设到闭子空间 V_i 的正交投影为 P_i. 同样，我们记 $V_i^* = \operatorname{Im} T_i^*$，同样的论述可得这些 V_i^* 也相互正交，记到 V_i^* 的正交投影为

Q_i. 由此可得，对所有 $\|f\| = \|g\| = 1$，$f, g \in H$：

$$\begin{aligned}
|(Tf,g)| &\leq \sum_{i=-N}^{N} |(T_i f, g)| = \sum_{i=-N}^{N} |(T_i f, P_i g)| = \sum_{i=-N}^{N} |(f, T_i^* P_i g)| \\
&= \sum_{i=-N}^{N} |(Q_i f, T_i^* P_i g)| = \sum_{i=-N}^{N} |(T_i Q_i f, P_i g)| \\
&\leq \sum_{i=-N}^{N} \|T_i\| |(Q_i f, P_i g)| \leq \sum_{i=-N}^{N} |(Q_i f, P_i g)| \\
&\leq \sum_{i=-N}^{N} \|Q_i f\| \|P_i g\| \leq \left(\sum_{i=-N}^{N} \|Q_i f\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=-N}^{N} \|P_i f\|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|f\| \|g\| = 1. \quad (*)
\end{aligned}$$

上式用到了 Cauchy-Schwarz 不等式以及 Bessel 不等式. 关于 Bessel 不等式的这个版本，其成立的原因是：

$$\begin{aligned}
\left(f - \sum P_i f, \sum P_i f \right) &= \sum (f, P_i f) - \left(\sum P_i f, \sum P_i f \right) \\
&= \sum (f, P_i f) - \sum_i \sum_j (P_i f, P_j f) \\
&= \sum (f, P_i f) - \sum_i (P_i f, P_i f) \\
&= \sum (f, P_i f) - \sum (f, P_i^* P_i f) \\
&= \sum (f, P_i f) - \sum (f, P_i f) \\
&= 0
\end{aligned}$$

其中，P_i 是对相互彼此正交的闭子空间 V_i 的正交投影，求和号为有限和. 上式用到了不同闭子空间彼此正交，以及 $P_i^* = P_i = P_i^2$ 这一基本性质，所以，根据勾股定理可得

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum P_i f \right\|^2 + \left\| \sum P_i f \right\|^2 \geq \left\| \sum P_i f \right\|^2 = \sum \|P_i f\|^2$$

此即 Bessel 不等式.

回到本题，对 $(*)$ 式两边取上确界可得：

$$\|T\| = \sup_{\|f\| = \|g\| = 1} |(Tf, g)| \leq 1.$$

以上证明了对只有有限多个算子不为零的情况下，结论是成立的.

对于一般情况，考虑 $S_N(f)=\sum_{i=-N}^{N}T_i(f)$，根据有限多个算子的情形可知：

$$\|S_N(f)\|\le\|S_N\|\|f\|\le 1\cdot\|f\|=\|f\|.$$

而且，根据正交性可得：

$$\|S_N(f)\|^2=\left(\sum T_if,\sum T_if\right)=\sum(T_if,T_if)=\sum_{i=-N}^{N}\|T_if\|^2<\|f\|^2.$$

所以，取 $N\to\infty$ 可得

$$\sum_{i=-N}^{N}\|T_if\|^2<\|f\|^2<\infty\Rightarrow\sum_{M+1\le|i|\le N}\|T_if\|^2\to 0(M\to\infty,N>M)$$

因此：

$$\|S_N(f)-S_M(f)\|^2=\sum_{M+1\le|i|\le N}\|T_if\|^2\to 0(N>M,M\to\infty).$$

所以 $\{S_Nf\}_N$ 是 H 中的 Cauchy 列，由 H 的完备性可知 S_Nf 收敛，将极限记为 Tf.

所以根据 $\|S_N\|\le 1$ 可得：

$$\|Tf\|=\lim_n\|S_Nf\|\le\|f\|.$$

所以 $\|T\|\le 1$. □

23. (**Stein 中译本，P148，题 24**) 令 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交基，若 $\{c_k\}_{k\ge1}$ 是正实数列，且 $\sum c_k^2<\infty$，则集合：

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k:|a_k|\le c_k\right\}.$$

在 H 中是紧的.

证明. 只需证明对任何 A 中的序列 $\{x_n\}_{n\ge1}$，它都有收敛到 A 中某个点的子列. 设 $x_n=\sum_n a_k^{(n)}e_k$，根据 $|a_1^{(n)}|<c_1$，可知 $\{a_1^{(n)}\}_n$ 是有界数列，于是有收敛子列 $\{a_1^{(1n)}\}_n$，设其极限为 a_1. 其次，对数列 $\{a_2^{(1n)}\}_n$，它仍是有界数列，选出其收敛子列 $\{a_2^{(2n)}\}_n$，记其极限为 a_2，根据它是 $\{a_1^{(1n)}\}_k$ 的子列可知 $a_1^{(2n)}\to a_1,n\to\infty$. 依此这样找下去，我们得到一系列点列：

$$\{x_{0n}\},\{x_{1n}\},\{x_{2n}\},\cdots$$

其中，$\{x_{0n}\} = \{x_n\}$，且每个点列都是前一个点列的子列. 而且，对某个 $\{x_{in}\}_n$，都有 $a_j^{(in)} \to a_j$ 对每个 $1 \le j \le i$ 成立. 我们定义 $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. 根据每个 $|a_k| \le c_k$ 可得 $\sum_k |a_k|^2 < \infty$，x 有意义而且 $x \in A$. 下面说明 $\{x_{nn}\}_n$ 将会收敛到 $x \in A$，这是因为，对每个 k，$\{x_{nn}\}_n$ 最终都是 $\{x_{kn}\}_n$ 的子列，于是：

$$a_k^{(nn)} - a_k \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由 Parseval 恒等式可得：

$$\|x_{nn} - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(nn)} - a_k|^2.$$

取极限 $\lim_n$，并根据正项级数极限和求和次序可交换可得：

$$\lim_n \|x_{nn} - x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n \left| a_k^{(nn)} - a_k \right|^2 = 0.$$

所以 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{nn}\}$ 收敛到 $x \in A$. □

24. (**Stein 中译本，P148，题 25**) 假定 T 是一个有界线性算子，而且被标准正交基 $\{\varphi_k\}$ 对角化，满足 $T\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$，则 T 是紧的当且仅当 $\lambda_k \to 0 (k \to \infty)$.

证明. 假设 $\lambda_k \to 0$. 我们考虑 $f \in H$ 满足 $\|f\| = 1$，P_n 是到闭子空间 $\mathrm{Span}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 的正交投影. 我们设 f 关于基 $\{\varphi_n\}$ 的展开为 $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$，则 Tf 关于这组基的展开为

$$Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

所以 $P_n T f$ 关于这组基的展开为：

$$P_n T f \sim \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k \varphi_k.$$

这根据 $(P_n T f, \varphi_m) = 0$ 对所有 $m \ge n+1$，以及 $(P_n T f, \varphi_m) = (Tf, P_n \varphi_m) = (Tf, \varphi_m)$ 对所有 $m \le n$ 立刻看出. 此外，由于该展开式中只有有限项，根据 $\{\varphi_n\}$ 是标准正交基以及范数意义下的收敛性可知实际上有：

$$P_n T f = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k \varphi_k = S_n(Tf).$$

其中 $S_n(Tf)$ 表示 Tf 展开式的部分和，于是，根据 Parseval 恒等式，有：

$$\|(P_n T - T) f\|^2 = \|S_n(Tf) - Tf\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 |\lambda_k|^2.$$

对任何 $\varepsilon>0$，取 n 足够大，则所有 $|\lambda_k|<\varepsilon$，对 $k\geq n+1$ 由此可知：

$$\|(P_nT-T)f\|^2\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2\varepsilon^2\leq\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\varepsilon^2\|f\|^2=\varepsilon^2.$$

取上确界可得：

$$\|P_nT-T\|=\sup_{\|f\|=1}\|(P_nT-T)f\|\leq\varepsilon.$$

对所有 n 足够大.

这就证明了在算子范数下有：$\|P_nT-T\|\to 0$.

因为 P_nT 是有限秩的有界线性算子，所以对每个 n，P_nT 都是紧算子，所以 T 作为其算子范数下的极限，T 也是紧算子.

反过来，假设 $\lambda_k\to 0$ 不成立，则存在 $\mu>0$，使得数列 $\{\lambda_k\}$ 有无限多项满足 $|\lambda_k|>\mu$. 取出该无限多项 $\{\lambda_{n_k}\}_k$，则该数列为 $\{\lambda_k\}$ 的子列. 因为 $\{\varphi_k\}$ 是标准正交基，所以 $\|\varphi_{n_k}\|_k\subset\mathbb{S}=\{x\in H:\|x\|=1\}$. 因为 T 是紧算子，所以 $\{T\varphi_{n_k}\}_k$ 在 H 中有收敛子列，但是：

$$\|T\varphi_{n_k}-T\varphi_{n_\ell}\|^2=\|\lambda_{n_k}\varphi_{n_k}-\lambda_{n_\ell}\varphi_{n_\ell}\|^2=|\lambda_{n_k}|^2+|\lambda_{n_\ell}|^2\geq 2\mu^2.$$

对 $k\neq\ell$. 所以，$\{T\varphi_{n_k}\}_k$ 的任何子列都不是 Cauchy 列，所以都不可能收敛，从而推出了矛盾. □

25. (**Stein 中译本,P148,题 26**) 假定 w 是 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数满足对 a.e.x,$0<w(x)<\infty$，且 K 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的可测函数满足：

(i) 对几乎每个 $x\in\mathbb{R}^d$，$\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|w(y)\mathrm{d}y\leq Aw(x)$；

(ii) 对几乎每个 $y\in\mathbb{R}^d$，$\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|w(x)\mathrm{d}x\leq Aw(y)$；

证明如下定义的积分算子：

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上有界而且满足 $\|T\|\leq A$.

作为一个特殊情形,若对所有的 x,$\int|K(x,y)|\mathrm{d}y\leq A$,且对所有的有 y,$\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|\mathrm{d}x\leq A$，则 $\|T\|\leq A$.

证明. 对 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们有：

$$\int|K(x,y)f(y)|\mathrm{d}y\leq A^{1/2}w(x)^{1/2}\left[\int|K(x,y)||f(y)|^2w(y)^{-1}\mathrm{d}y\right]^{1/2}.$$

根据非负可测函数的 Fubini 定理可知：

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x \\
&\leq A\int_{\mathbb{R}^d}w(x)\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)||f(y)|^2w(y)^{-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= A\int_{\mathbb{R}^d}w(y)^{-1}|f(y)|^2\int_{\mathbb{R}^d}|K(x,y)|w(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leq A\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|^2\left(Aw(y)\right)w(y)^{-1}\mathrm{d}y \\
&= A^2\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
&= A^2\|f\|^2.
\end{aligned}$$

因为 $A<\infty$，所以：

$$\|T\| \leq \sup_{f\in H-\{0\}}\frac{\|Tf\|}{\|f\|} \leq A.$$

所以 T 是有界线性算子而且 $\|T\|\leq A$.

特别地，如果取 $w\equiv 1$ 为满足题给条件的可测函数，则得到了一个特殊结论：即若 $\left\|\int_{\mathbb{R}^d}|K^x|\mathrm{d}x\right\|_{L^1}\leq A<\infty$ 且 $\left\|\int_{\mathbb{R}^d}|K^y|\mathrm{d}y\right\|_{L^1}\leq A<\infty$，则 $\|T\|\leq A$. $\square$

26. (**Stein 中译本，P148，题 27**) 证明算子

$$Tf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$$

在 $L^2(0,\infty)$ 上是有界的而且 $\|T\|\leq 1$.

证明. 令 $K(x,y)=\frac{1}{x+y}$ 是 $(0,\infty)^2$ 上非负可测函数，$w(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 是 $(0,\infty)$ 上处处有限函数，我们计算：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x+y}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\sqrt{y}\int_0^\infty\frac{1}{x+y}\mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{y}} \\
&= 2\sqrt{y}\cdot\frac{1}{y}\int_0^\infty\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+1}\mathrm{d}\sqrt{\frac{x}{y}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{y}}\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

因此我们有：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|K(x,y)|w(x)\mathrm{d}x\leq w(y).$$

对所有 y 都成立，以及对称地，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty |K(x,y)|w(y)\mathrm{d}y \le w(x).$$

对所有 x 都成立. 因此，根据题 26 的结论可得，T 是有界线性算子而且

$$\|T\| \le 1.$$

□

27. (**Stein 中译本，P148，题 28**) 假定 $H = L^2(B)$，其中 $B \subset \mathbb{R}^d$ 为单位球. 令 $K(x,y)$ 是 $B\times B$ 上满足存在 $\alpha > 0$ 使得 $|K(x,y)| \le A|x-y|^{-d+\alpha}$ 对所有 $x, y \in B$ 都成立的可测函数. 定义：

$$Tf(x) = \int_B K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

(a) 证明 T 是 H 上有界线性算子；

(b) 证明 T 是紧算子.

(c) T 是 Hilbert-Schmidt 算子，当且仅当 $\alpha > \frac{d}{2}$.（这里只能说明 $\frac{d}{2}$ 是保证 T 是 Hilbert-Schmidt 算子的最优下界，因为题目只给出了 K 的上界，无法退出反过来的结果）

证明. (a) 我们有如下估计：

$$\begin{aligned}
\int_B |K(x,y)|\mathrm{d}x &\le \int_B \frac{A}{|x-y|^d}|x-y|^\alpha \mathrm{d}x \\
&= \int_{B+y} \frac{A}{|x|^d}|x|^\alpha \mathrm{d}x \\
&\le \int_{2B} \frac{A}{|x|^d}|x|^\alpha \mathrm{d}x \\
&= \int_{S^{d-1}}\int_0^2 \frac{A}{r^d}r^\alpha r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \\
&= \sigma(S^{d-1})\int_0^2 Ar^{\alpha-1}\mathrm{d}r \\
&= \frac{2^\alpha A\sigma(S^{d-1})}{\alpha}
\end{aligned}$$

所以，$\|K^x\|_{L^1(B)} < \infty$，以及对称地，$\|K^y\|_{L^1(B)} < \infty$，所以，根据题 26 中 $w \equiv 1$ 的特殊情形可得，T 是有界线性算子.

(b) 考虑截断核

$$K_n(x,y)=\begin{cases}K(x,y), & |x-y|\ge \frac{1}{n}\\ 0, \text{otherwise}.\end{cases}$$

则对每个 $K_n(x,y)$，都有 $K_n(x,y)\le K(x,y)$，而且 $K_n(x,y)\le A|x-y|^{-d+\alpha}\le An^{d-\alpha}$.

根据 (a) 的估计过程可知 $K\in L^1(B\times B)$，所以 $K_n\in L^1(B\times B)$. 再根据 K_n 有界可知 $K_n\in L^2(B\times B)$. 于是，每个 T_n 定义为 $T_nf(x)=\int_B K_n(x,y)f(y)\mathrm{d}y$ 都是 Hilbert-Schmidt 算子，于是 T_n 是紧算子. 另一方面，对任何 $\varepsilon>0$，对所有足够大的 n，都有：

$$\begin{aligned}\|(K-K_n)^x\|_{L^1(B)} &\le A\int_{|x-y|<\frac{1}{n}}\frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}\mathrm{d}x\\ &= A\int_{|x|<\frac{1}{n}}\frac{1}{|x|^{d-\alpha}}\mathrm{d}x\\ &= A\int_{S^{d-1}}\int_0^{1/n}\frac{1}{r^{d-\alpha}}r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma\\ &= \frac{A\sigma(S^{d-1})}{\alpha n^{\alpha}}<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据题 26 的结论可知 $\|T-T_n\|<\varepsilon$ 对所有 n 足够大成立. 根据一列紧算子的极限仍是紧算子可知 T 是紧算子.

(c) 设 $\eta/2=\alpha-\frac{d}{2}>0$，则：

$$\begin{aligned}\|K(x,y)\|^2_{L^2(B\times B)} &\le \int_B\int_B\frac{A^2}{|x-y|^{2(d-\alpha)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le \int_B\int_{2B}\frac{A^2}{|y|^{2(d-\alpha)}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le \int_B\int_{2B}\frac{A^2}{|y|^{d-\eta}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &\le \int_B\int_{S^{d-1}}\int_0^2\frac{A^2}{r^{d-\eta}}r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x\\ &= \int_B\sigma(S^{d-1})\int_0^2 A^2r^{\eta-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x\\ &= \frac{2^{\eta}m(B)\sigma(S^{d-1})A^2}{\eta}<\infty.\end{aligned}$$

所以此时 T 是 Hilbert-Schmidt 算子. □

28. (**Stein 中译本，P149，题 29**) 令 T 是 Hilbert 空间 H 上紧算子，且假设 $\lambda\neq 0$.

(a) 证明，由：

$$\{g \in H : g = (\lambda \mathrm{Id} - T)f, \quad \text{for some } f \in H\}.$$

定义的 $\lambda\mathrm{Id} - T$ 的值域是 H 的闭子空间.

(b) 举例说明当 $\lambda = 0$ 时 (a) 的结果不成立.

(c) 证明 $\lambda\mathrm{Id} - T$ 的值域是整个 H，当且仅当 $\overline{\lambda}\mathrm{Id} - T^*$ 的零空间是平凡的.（这是 Fredholm 二择一定理的特殊情形）

证明. (a) 设 $g_j = (\lambda\mathrm{Id} - T)f_j$. 令 $V_\lambda = \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)$. 则 f_j 在相差 V_λ 的意义下唯一. 特别地，我们可以设 $f_j \in V_\lambda^T$，受此启发，令 L 是映射：$\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id} - T) \to V_\lambda^\perp$，$g \mapsto f$，其中 f 是使得 $g = (\lambda\mathrm{Id} - T)f$ 的 $V_\lambda^\perp$ 中的元素.

- 我们说明该映射良定义. 假设存在 $f' \neq f$ 也满足条件，则 $(\lambda\mathrm{Id} - T)f' = (\lambda\mathrm{Id} - T)f \Rightarrow \lambda(f' - f) = T(f' - f)$，因此 $f' - f \in V_\lambda$. 但是，根据 $V^\perp$ 是线性子空间可知 $f' - f \in V_\lambda^\perp$. 根据 V_λ 是闭的可知 $H = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$，因此 $f' - f \in V_\lambda^\perp \cap V_\lambda = \{0\}$ 即 $f' = f$.
- 此外，映射 L 是一个线性双射. 对于线性性，对于 $\alpha g_1 + \beta g_2 \in V_\lambda^\perp$，其中 $g_1 = (\lambda\mathrm{Id} - T)f_1$，$g_2 = (\lambda\mathrm{Id} - T)f_2$，其中 $L(g_i) = f_i \in V_\lambda^\perp$，$i = 1, 2$. 而另一方面 $(\lambda\mathrm{Id} - T)(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$，根据 $\alpha f_1 + \beta f_2 \in V_\lambda^\perp$ 以及唯一性可知 $L(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha L(g_1) + \beta L(g_2)$. 此外，若 $L(g) = 0$，则有 $g = (\lambda\mathrm{Id} - T)L(g) = 0$，所以 L 单射. 最后，对任何 $f \in V_\lambda^\perp$，它是 $(\lambda\mathrm{Id} - T)f$ 在 L 下的像，因此 L 满射. 以上说明 L 是线性双射. 特别地，$(\lambda\mathrm{Id} - T)|_{V_\lambda^\perp} = L^{-1}$.
- 我们说明 L 是 $\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id} - T)$ 上有界线性算子，即存在 $M > 0$，使得对任何 $x \in \mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id} - T)$，都有 $\|Lx\| \leq M\|x\|$，也即存在 $\eta > 0$，使得对任何 $y \in V_\lambda^\perp$，都有 $\|L^{-1}y\| \geq \eta\|y\|$. 如果不然，则存在 $V_\lambda^\perp$ 中的序列 $\{y_n\}$，使得 $\|y_n\| = 1$ 而且 $\|L^{-1}y_n\| = \|\lambda y_n - Ty_n\| \to 0$. 因为 T 是紧算子，所以 $\{Ty_n\}$ 有收敛子列 $\{Ty_{n_k}\}_k$，设极限为 $x \in H$，则

  $$\|\lambda y_{n_k} - x\| \leq \|\lambda y_{n_k} - Ty_{n_k}\| + \|Ty_{n_k} - x\| \to 0.$$

  因此 $\|x\| = \lim_k \|\lambda y_{n_k}\| = |\lambda| \cdot 1 > 0$. 另一方面，$\|L^{-1}\| \leq \|T\| + |\lambda|$，所以 L^{-1} 是有界线性算子，由此可知它是连续线性算子，因此：

  $$\left\|L^{-1}x\right\| = \lim_k \left\|L^{-1}y_{n_k}\right\| = 0.$$

所以 $L^{-1}x=0$，这与 $x\neq 0$ 以及 L 是双射矛盾，所以 L 是有界线性算子.

综上所述，我们证明了 L 是有界线性算子，所以，对所有 m,n，都有：

$$\|f_m-f_n\|=\|Lg_m-Lg_n\|\leq\|L\|\|g_m-g_n\|\to 0(m,n\to\infty).$$

所以 $\{f_j\}$ 是闭子空间 $V_\lambda^\perp$ 中 Cauchy 列，所以存在 $f\in V_\lambda^\perp$，使得 $f_j\to f$. 令 $g=(\lambda I-T)f\in\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)\in\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)$，则有：

$$\|g_j-g\|\leq(|\lambda|+\|T\|)\|f_j-f\|\to 0.$$

(b) 考虑 $T:\ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N})$，$\{x_n\}\mapsto\{\frac{x_n}{n}\}$. 显然 T 关于标准正交基 $\{e_n\}$ 是对角的且特征值为 $\frac{1}{n}\to 0$（其中 $\{e_n\}$ 是第 n 项是 1，其他各项都是 0 的数列），根据题 25 可知 T 是紧算子. 显然，$\{e_n\}$ 在 T 的值域中，而 $\{e_n\}$ 的有限线性组合在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中稠密，假设 T 的像集是闭的，则 T 应是满射. 但是，显然 $\{\frac{1}{n}\}$ 不在 T 的像集中，矛盾. 因此，T 是紧算子但是 $\mathrm{Im}\,T$ 不是闭的.

(c) 我们说明事实上 $\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)^\perp=\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)$. 若 $x\in\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)$，则对任何 $y\in H$，都有：

$$((\lambda\mathrm{Id}-T)y,x)=(y,(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)x)=0.$$

特别地，取 $y=(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)x$，则得到 $\left\|(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)x\right\|^2=0\Rightarrow(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)x=0$，所以 $x\in\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)$.

另一方面，如果 $x\in\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)$，则对任何 $y\in H$，都有：

$$((\lambda\mathrm{Id}-T)y,x)=(y,(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)x)=0.$$

所以 $x\in\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)^\perp$，综上所述，我们有：

$$\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)^\perp=\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*).$$

由 (a) 知 $\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)$ 是闭的,根据前面的题 10 可知 $(\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)^\perp)^\perp=\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)$，因此上式两边同时取正交补可得：

$$\mathrm{Im}(\lambda\mathrm{Id}-T)=\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)^\perp.$$

所以，左边是整个 H 当且仅当 $\ker(\overline{\lambda}\mathrm{Id}-T^*)$ 是平凡的. □

29. (**Stein 中译本，P149，题 30**) 设 $H=L^2([-\pi,\pi])$，固定一个有界复数列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，且将算子 Tf 定义为：

$$Tf(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n a_n e^{inx},\quad\text{whenever}\quad f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{inx}.$$

这样的算子称为 Fourier multiplier operator，$\{\lambda_n\}$ 叫做 multiplier sequence.

(a) 证明 T 是 H 上有界线性算子，且 $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$;

(b) 验证 T 与平移是可交换的，即 $\tau_h(x) = f(x-h)$，则对于每个 $h \in \mathbb{R}$，都有 $T \circ \tau_h = \tau_h \circ T$;

(c) 反过来，如果 T 是 H 上与平移可交换的有界线性算子，则 T 必然是 Fourier multiplier operator.

证明. (a) $f \in H$，$\|f\| = 1$，$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$，则根据 Parseval 恒等式可得

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = 1.$$

所以：

$$\|Tf\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 |a_n|^2 \le (\sup_n |\lambda_n|)^2 \sum_n |a_n|^2 = (\sup_n |\lambda_n|)^2,$$

对 $\|f\| = 1$ 取上确界可得：

$$\|T\| \le \sup_n |\lambda_n|.$$

另一方面，

$$T(e^{inx}) = \lambda_n e^{inx} \Rightarrow \|T\| \ge \left\|Te^{inx}\right\| = |\lambda_n|.$$

对 $n \in \mathbb{Z}$ 取上确界可得：

$$\|T\| \ge \sup_n |\lambda_n|.$$

所以，$\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$.

(b) 只需说明两者在基 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 上是可交换的.

$$(T \circ \tau_h)(e^{inx}) = T(e^{inx}e^{-inh}) = \lambda_n e^{inx-inh}.$$

$$(\tau_h \circ T)(e^{inx}) = \tau_h(\lambda_n e^{inx}) = \lambda_n e^{inx-inh}.$$

(c) 考虑 Te^{inx}，设：

$$Te^{inx} \sim \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m e^{imx}.$$

于是：

$$(T - b_n \mathrm{Id})e^{inx} \sim \sum_{m\neq n} b_m e^{inx}.$$

两边同时作用 τ_h，则 τ_h 与 T 和 Id 都交换，于是：

$$(T-b_n\mathrm{Id})e^{inx}e^{-inh}\sim\sum_{m\neq n}b_me^{imx}e^{-imh}.$$

即：

$$(T-b_n\mathrm{Id})e^{inx}\sim\sum_{m\neq n}b_me^{imx}e^{i(n-m)h}.$$

于是：

$$(T-b_n\mathrm{Id})e^{inx}\sim\sum_{m\neq n}b_me^{imx}e^{i(n-m)h}.$$

比较系数可得

$$b_me^{i(n-m)h}=b_m,\quad\forall m\neq n,\quad h\in\mathbb{R}.$$

所以 $b_m=0$，$\forall m\neq n$. 因此 $Te^{inx}=b_ne^{inx}$. 此外，根据 T 是有界线性算子可知 $\sup_n|b_n|<\infty$，于是 $\{b_n\}$ 有界. □

30. (**Stein 中译本，P149，题 31**) 考虑一种定义在 $[-\pi,\pi)$ 上的锯齿波：

$$K(x)=i(sgn(x)\pi-x),$$

且将其周期延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数.

设 $f\in L^1([-\pi,\pi])$（周期延拓后看成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数），且定义

$$Tf(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(y)f(x-y)\mathrm{d}y.$$

(a) 证明 $F(x)=Tf(x)$ 是绝对连续的，且如果 $\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\mathrm{d}y=0$，则 $F'=if$，a.e.x.

(b) 证明，T 是 $L^2([-\pi,\pi])$ 上对称紧算子.

(c) 证明，$\varphi\in L^2([-\pi,\pi])$ 是 T 的特征函数，当且仅当（在相差一个常数因子的意义下）$\varphi(x)=e^{inx}$，$n\neq0$ 为整数，特征值为 $1/n$，或 $\varphi(x)=1$，特征值为 0.

(d) 说明 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2([-\pi,\pi])$ 的标准正交基.

证明. (a) 简单计算可得：

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{i}F(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}(\pi sgn(x-y)-(x-y))f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-\pi}^{x}(\pi-(x-y))f(y)\mathrm{d}y+\int_{x}^{\pi}(-\pi-(x-y))f(y)\\&=(\pi-x)\int_{-\pi}^{x}f(y)\mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{x}yf(y)\mathrm{d}y-(\pi+x)\int_{x}^{\pi}f(y)\mathrm{d}y+\int_{x}^{\pi}yf(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-\pi}^{\pi}yf(y)\mathrm{d}y-x\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\mathrm{d}y+\pi\left(\int_{-\pi}^{x}f(y)\mathrm{d}y+\int_{\pi}^{x}f(y)\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$

根据 $f \in L^1([-\pi,\pi])$ 以及积分的绝对连续性可知 $F(x)$ 是绝对连续的，而且，如果 $\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{d}y = 0$，根据 Lebesgue 微分定理可得：

$$\frac{2\pi}{i}F'(x) = 2\pi f'(x).$$

对几乎处处 x 成立，即 $F' = if$ 对几乎处处 x 成立.

(b) 注意 $K(x-y)$ 是 $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ 上的有界函数，从而是 $L^1([-\pi,\pi]^2)$ 的，从而是 $L^2([-\pi,\pi]^2)$ 的. 因此，T 是 $[-\pi,\pi]^2$ 上 Hilbert-Schmidt 算子，故为紧算子.

根据 Fubini 定理：

$$\begin{aligned}
(Tf,g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Tf(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g(x)}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} i(sgn(x-y)\pi-(x-y))\overline{g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} \overline{i(sgn(y-x)-(y-x))g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\int_{-\pi}^{\pi} \overline{K(y-x)g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\overline{Tg(y)}\mathrm{d}y \\
&= (f,Tg).
\end{aligned}$$

(c) 首先，若 $n \neq 0$：

$$\begin{aligned}
T(e^{inx}) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi e^{in(x-y)})\mathrm{d}y + \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi e^{in(x-y)})\mathrm{d}y \\
&= -\frac{i}{2}e^{inx}\int_{-\pi}^{0} e^{-iny}\mathrm{d}y + \frac{i}{2}e^{inx}\int_{0}^{\pi} e^{-iny}\mathrm{d}y \\
&= \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{in}e^{inx} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{in}e^{inx} \\
&= \frac{1}{n}e^{inx}.
\end{aligned}$$

若 $n = 0$，令 $1(x)$ 表示 $1(x) \equiv 1$，则：

$$T(1(x)) = -\frac{i}{2}e^{inx}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}y + \frac{i}{2}e^{inx}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}y = 0.$$

反过来，如果 φ 是特征值为 λ 的特征函数，则 $T\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$. 根据 (a) 可得 $(T\varphi(x))' = i\varphi(x)$ 即 $\lambda\varphi'(x) = i\varphi(x)$. 解该 ODE 可得 $\varphi(x) = e^{ix/\lambda}$

计算

$$
\begin{aligned}
T(e^{ix/\lambda}) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi e^{i(x-y)/\lambda})\mathrm{d}y + \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi e^{i(x-y)/\lambda})\mathrm{d}y \\
&= -\frac{i}{2}e^{ix/\lambda}\int_{-\pi}^{0}e^{-iy/\lambda}\mathrm{d}y + \frac{i}{2}e^{ix/\lambda}\int_{0}^{\pi}e^{-iy/\lambda}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{i}{2}\cdot\frac{\lambda}{i}e^{ix/\lambda}(e^{i\pi/\lambda}-1) - \frac{i}{2}\cdot\frac{\lambda}{i}e^{ix/\lambda}(e^{-i\pi/\lambda}-1) \\
&= \left(1-\frac{e^{-i\pi/\lambda}+e^{i\pi/\lambda}}{2}\right)\lambda e^{ix/\lambda}.
\end{aligned}
$$

因此 $\frac{e^{-i\pi/\lambda}+e^{i\pi/\lambda}}{2}=0$，所以 $e^{2i\pi/\lambda}=1$，因此 $1/\lambda\in\mathbb{Z}$.

(d) 根据 (a) 和 (b) 可知 T 是对称紧算子，因此其特征函数集 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 相互正交且由 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 张成的子空间的闭包是整个 H. 所以，$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 H 一组标准正交基. □

31. (**Stein 中译本，P150，题 32**) 考虑算子 $L^2([0,1])$ 上的算子 $T: f(t)\mapsto tf(t)$.

(a) 证明 T 是 $L^2([0,1])$ 上对称的有界线性算子，但不是紧算子；

(b) 证明 T 没有特征向量.

证明. (a) 对 $\|f\|=1$，我们有：

$$
\|Tf\|^2=\int_0^1|f(t)|^2\cdot|t|^2\mathrm{d}t\le\int_0^1|f(t)|^2=\|f\|^2=1.
$$

所以 T 是有界线性算子. 另外，

$$
(Tf,g)=\int_0^1 tf(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\overline{tg(t)}\mathrm{d}t=(f,Tg).
$$

所以 T 是对称算子.

我们说明 T 不是紧算子，为此，我们考虑 $\{f_n\}_{n\ge1}\subset L^2([0,1])$，其中 $f_n(x)=((n+1)x^n)^{1/2}$，则该集合是 $L^2([0,1])$ 中有界集. 而 $Tf_n=((n+1)t^{n+2})^{1/2}$，计算可得

$$
\|Tf_n\|^2=\int_0^1(n+1)t^{n+2}\mathrm{d}t=\frac{n+1}{n+3}.
$$

假设存在子列 $Tf_{n_k}\to g$ 在 L^2 范数下成立，根据 Riesz 引理可知，存在 Tf_{n_k} 的一个子列 Tf_{n_ℓ}，使得 Tf_{n_ℓ} 几乎处处收敛于 g，但是注意到对任何 $t\in(0,1)$ 都有：

$$
\lim_{n\to\infty}\sqrt{(n+1)t^{n+2}}=0
$$

所以 g 几乎处处为 0，因此 $\|g\| = 0$. 但是，根据 Tf_{n_ℓ} 是 Tf_n 的子列可知 Tf_{n_ℓ} 依范数收敛到 g，于是有

$$\|g\| = \lim_{\ell} \|Tf_{n_\ell}\| = \lim_{n} \|T_n\| = \lim_{n} \frac{n+1}{n+3} = 1.$$

这与 $\|g\| = 0$ 矛盾. 所以，$\{Tf_n\}$ 并不存在收敛子列，这与 T 是紧算子矛盾.

(b) 假设 T 有特征向量 φ，$\varphi \neq 0$，特征值为 λ，则：

$$(T\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) = t\varphi(t), \text{a.e.} t \in [0,1].$$

这与 $\varphi(t) \neq 0$ a.e. t 矛盾. □

32. (**Stein 中译本，P150，题 33**) 令 H 是具有基 $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ 的 Hilbert 空间，验证如下定义的算子 T：

$$T(\varphi_k) = \frac{1}{k}\varphi_{k+1}$$

是紧算子，但是没有特征向量.

证明. 设 $\{\varphi_k\}$ 是标准正交基，我们定义 T_N 是满足：

$$T_N(\varphi_k) = \frac{1}{k}\varphi_{k+1}, \quad \forall k \leq N,$$

而且 $T_N(\varphi_k) = 0, \forall k \geq N+1$ 的算子. 则显然该算子是有限秩的有界线性算子. 另外，对任何 $f \in H$，设 f 按照 $\{\varphi_k\}$ 展开为：

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k.$$

根据 Parseval 恒等式可得 $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. 注意到：

$$T_N f \sim \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} a_k \varphi_{k+1}, \quad Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k \varphi_{k+1}.$$

所以

$$\|T_N f - Tf\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^2} |a_k|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|f\|^2.$$

所以，对 $\|f\| = 1$，$\forall \varepsilon > 0$，对足够大的 N，都有：

$$\|T_N - T\| = \sup_{\|f\|=1} \|T_N f - Tf\| \leq \frac{1}{(N+1)^2} < \varepsilon.$$

所以，$\|T_N - T\| \to 0 (N \to \infty)$. 因为 $\{T_N\}$ 是一列紧算子，所以 T 也是紧算子.

若 f 是 T 的特征向量，特征值为 λ，则

$$Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \varphi_k.$$

另一方面，

$$Tf \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} a_{k-1} \varphi_k.$$

因为 $f \neq 0$，所以 a_k 不全为零，所以 $\lambda \neq 0$，于是 $\lambda a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$，而且 $\frac{1}{k-1} a_{k-1} = \lambda a_k$ 对所有 $k > 1$ 都成立. $a_1 = 0 \Rightarrow \lambda a_2 = 1 \cdot a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$，归纳可得每个 $a_k = 0$，这与 f 是特征向量矛盾. □

33. (**Stein 中译本，P150，题 34**) 令 K 是实对称 Hilbert-Schmidt 核，由它定义的 Hilbert-Schimidt 算子 T 是对称紧算子. 设 T 被标准正交基 $\{\varphi_k\}$ 对角化，特征值为 λ_k，则：

(a) $\sum_k |\lambda_k|^2 < \infty$;

(b) 核 K 在 $\{\varphi_i(x)\varphi_j(y)\}$ 下的展开为

$$K(x,y) \sim \sum_k \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(y).$$

(c) 设 T 是紧对称的算子，则 T 是 Hilbert-Schmidt 型的，当且仅当 $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$，其中 $\{\lambda_n\}$ 是 T 的全体特征值（按重数计算）.

证明. 先解答 (b)，因为 K 是 H-S 核，所以 $K \in L^2(X \times X)$：

$$\begin{aligned}
(K(x,y), \varphi_i(x)\varphi_j(y)) &= \int_{X\times X} K(x,y)\varphi_i(x)\varphi_j(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_X \varphi_i(x) \int_X \varphi_j(y) K(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_X \varphi_i(x) T\varphi_j(x)\mathrm{d}x \\
&= (\varphi_i, T\varphi_j) \\
&= \begin{cases} \lambda_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.
\end{aligned}$$

因为 $\{\varphi_k\}$ 是紧算子 T 的特征向量集，所以 $\{\varphi_k\}$ 是 $L^2(X)$ 标准正交基. 如果 $F(x,y) \in L^2(X \times X)$，根据 Fubini 定理可知，对几乎处处 y，$F^y \in L^2(X)$，

所以，令 $a_i(y) = \int F^y(x)\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x \in L^2(X)$，因此对每个 $a_i(y)$ 都存在 b_j 使得 $a_i(y) = \sum_j b_j\varphi_j(y)$，于是：

$$F \sim \sum_i \sum_j a_i b_j \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

因此 $\varphi_i(x)\varphi_j(y)$，$i,j = 1,2,\cdots$ 是 $L^2(X\times X)$ 的一组标准正交基，所以，综上所述

$$K \sim \sum_k \lambda_k \varphi_k(x)\varphi_j(y).$$

□

(a) 由 $K \in L^2(X\times X)$ 可知 $\{\lambda_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

(c) 设紧算子 T 被标准正交基 $\{\varphi_k\}$ 对角化，特征值为 λ_k，定义截断核

$$K_n(x,y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_k(x)\varphi_k(y).$$

根据 (a) 可知 $\{\lambda_k\} \in \ell^2(\mathbb{N})$，所以，根据 Parseval 恒等式可知

$$\|K_m - K_n\|^2_{L^2(X\times X)} = \sum_{k=m}^n |\lambda_k|^2 \to 0(m,n\to\infty).$$

所以 $\{K_n\}$ 是 $L^2(X\times X)$ 中 Cauchy 列，根据 L^2 空间的完备性可知存在 $K \in L^2(X\times X)$，使得 $K_n \to K$. 我们说明，事实上 T 是由 K 定义的 H-S 算子. 令 T_n 为由 K 定义的 H-S 算子，因此：

$$T_n f = \int_0^1 K_n(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_k(x).$$

所以

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|f\|=1}\|T_n f - T\| \le \|f\||\lambda_n| \to 0(n\to\infty).$$

因此，T_n 按照算子范数收敛到 T，另一方面取 T' 是由 K 定义的 H-S 算子，则根据 Holder 不等式可得

$$\|T_n - S\| = \sup_{\|f\|=1}\|T_n f - Sf\| \le \|f\|\|K_n - K\|_{L^2(X\times X)} \to 0(n\to\infty).$$

所以 T_n 又按照算子范数收敛到 S，因此 $T = S$，即 T 是由 K 定义的 H-S 算子.

34. (**Stein 中译本，P150，题 35**) 令 H 是 Hilbert 空间.

(a) 若 T_1 和 T_2 是两个交换的对称紧算子（即 $T_1T_2 = T_2T_1$），则它们可以被同时对角化. 即，存在由 T_1 和 T_2 的共同特征向量组成的 H 的标准正交基.

(b) 称线性算子 T 是 H 上的正规变换，如果 $TT^* = T^*T$，证明如果 T 是正规紧算子，则 T 可对角化.

(c) 若 U 是酉变换，且 $U = \lambda I - T$，其中 T 是紧的，证明 U 可对角化.

证明. (a) 证明仿照对称紧算子的谱定理. 设 S 是由所有 T_1, T_2 的**公共**特征向量张成的子空间的闭包，则 S 是 H 的闭子空间，所以 $H = S \oplus S^\perp$. 我们说明 $S^\perp$ 是空集. 首先注意到 $T_iS \subset S$ 而且 $T_iS^\perp \subset S_i^\perp$（即 S 和 $S^\perp$ 都是 T_i-不变子空间，其中 $i = 1, 2$），所以 T_1 限制在 $S^\perp$ 上也是紧对称算子，而这说明存在 $x \in S^\perp, x \neq 0$ 使得它是 T_1 的特征向量，即 $T_1x = \lambda x$. 记 λ 对应的特征子空间为 $V_\lambda \subset S^\perp$，$V_\lambda \neq \varnothing$. 对任何 $y \in V_\lambda$，根据 T_1 和 T_2 交换可得：

$$(T_2T_1)y = T_2(\lambda y) = \lambda(T_2y) = T_1(T_2y).$$

所以 T_2y 也是 T_1 的特征向量，于是 V_λ 是 T_2-不变子空间，从而 T_2 限制在 V_λ 上仍是对称紧算子，因此有特征向量 $z \neq 0$，而 z 是 T_1 和 T_2 的共同特征向量，这与 S 的定义矛盾.

(b) 写

$$T = T_1 + iT_2 = \frac{T + T^*}{2} + i\frac{T - T^*}{2i}.$$

容易验证 T_1 和 T_2 都是对称的，另外，因为 T 紧，所以 T^* 紧，于是 T_1 和 T_2 也是紧的. 最后：

$$(T + T^*)(T - T^*) = T^2 + T^*T - TT^* - (T^*)^22 = (T - T^*)(T + T^*).$$

所以 T 正规保证了 T_1 和 T_2 可交换，根据 (a) 可知 T_1 和 T_2 可以同时对角化，于是 $T = T_i + T_2$ 也被这组基对角化.

(c) U 是酉的 $\Rightarrow U^*U = UU^* = I$，即 U 是正规的.

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^* = |\lambda|^2 I - \lambda T^* - \overline{\lambda}T - TT^*;$$

$$(\lambda I - T)^*(\lambda I - T) = |\lambda|^2 I - \overline{\lambda}T - \lambda T^* - T^*T.$$

由以上两式相等可得 T 是紧且正规的，所以存在 $\{\varphi_k\}$ 使得 T 在这组基下对角化，特征值为 μ_k，所以

$$U\varphi_k = (\lambda - \mu_k)\varphi_k.$$

即，U 也被这组特征值对角化，特征值为 $\lambda - \mu_k$. □