第六章习题：抽象测度与积分

2023 年 6 月 21 日

1. (**Stein 中译本，P233，题 1**) 设 X 是一个集合，$\mathcal{M}$ 是一个 X 的子集组成的代数. 证明如果 $\mathcal{M}$ 在补和不相交集合的可数并运算下封闭，则 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数.

   证明. 任取两个 $\mathcal{M}$ 中的不相交集合 A, B，则 $\varnothing = A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{M}$，所以 $\varnothing \in \mathcal{M}$，所以 $X = \varnothing^c \in \mathcal{M}$，下面只需要证明 $\mathcal{M}$ 在任意集合的可数并运算下封闭. 设 $E_1, \cdots, E_j, \cdots$ 为 $\mathcal{M}$ 中可数集族，取 $E_1' = E_1$，$E_2' = E_2 - E_1'$，$E_3' = E_3 - (E_2' \cup E_1')$，$\cdots$，则观察知：

   - 这些 $\{E_j'\}_{j\geq 1}$ 互不相交；
   - $E_1' \in \mathcal{M}$，对于 E_j'，设前面的 $E_1', \cdots, E_{j-1}'$ 都已经 $\in \mathcal{M}$，根据 E_j' 的构造以及 $\mathcal{M}$ 对不相交集合并运算以及补运算的封闭性可知，$E_j' \in \mathcal{M}$，由数学归纳法，这些 $E_j' \in \mathcal{M}$.
   - $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j' = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

   最后，根据可数并封闭可知 $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j' \in \mathcal{M}$. □

2. (**Stein 中译本，P233，题 2，测度空间的完备化**) 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间，我们定义它的完备化是：设 $\overline{\mathcal{M}}$ 是形如 $E \cup Z$ 的集合组成的集族，其中，$E \in \mathcal{M}$，$Z \subset F$，$F \in \mathcal{M}$，$\mu(F) = 0$（即 Z 是 $\mathcal{M}$ 中零测集的子集）. 定义 $\overline{\mu} : \overline{M} \to [0, \infty]$，$\overline{\mu}(E \cup Z) = \mu(E)$，则：

   (a)$\overline{\mathcal{M}}$ 是包含 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}$ 中所有零测集的子集的最小 σ 代数；

   (b) 函数 $\overline{\mu}$ 是一个测度，而且这个测度是完备的（即：零测集的子集都可测，$F \in \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu}(F) = 0, Z \subset F \Rightarrow Z \in \overline{\mathcal{M}}$.）

   证明. (a)$\overline{\mathcal{M}}$ 的元素形如 $E \cup Z$，因为 $\varnothing \in \mathcal{M}$，所以 $Z \in \overline{\mathcal{M}}$，即 $\overline{\mathcal{M}}$ 包含所有 $\mathcal{M}$ 中零测集的子集. 另外，$\varnothing$ 是每个 $F \in \mathcal{M}$ 的子集，从而对每个 $E \in \mathcal{M}$，$E = E \cup \varnothing \in \overline{\mathcal{M}}$，所以 $\overline{\mathcal{M}}$ 包含 $\mathcal{M}$. 下面证明 $\overline{\mathcal{M}}$ 是一个 σ-代数.

   首先 $\varnothing, X \in \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$，其次，对所有 $E \cup Z \in \mathcal{M}$，$(E \cup Z)^c = E^c \cap Z^c = E^c \cap (F^c \cup (F - Z)) = (E^c \cap F^c) \cup (E^c \cap (F - Z))$. 因为 $E^c \cap (F - Z) \subset F$，而 $E, F \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \cap F^c \in \mathcal{M}$，所以 $(E \cup Z)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. 最后，对 $\overline{\mathcal{M}}$ 中的一列集合 $E_j \cup Z_j$，其中 $Z_j \subset F_j$，F_j 是 $\mathcal{M}$ 中可测集，于是：

$$\bigcup_{j\geq 1}(E_j \cup Z_j) = \bigcup_{j\geq 1} E_j \cup \bigcup_{j\geq 1} Z_j.$$

因为 $\bigcup_{j\geq 1} Z_j \leq \bigcup_{j\geq 1} F_j$ 且后者是 $\mathcal{M}$ 中零测集，而 $\bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{M}$，所以根据定义可知 $\bigcup_{j\geq 1}(E_j \cup Z_j) \in \overline{\mathcal{M}}$.

以上证明了 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 X 上一个 σ-代数. 最后证明最小性，假设 $\mathcal{N}$ 也是一个满足条件的 X 上 σ 代数，那么对于任何 $\overline{\mathcal{M}}$ 中元素 $E \cup Z$，必有 $E \in \mathcal{N}$，$Z \in \mathcal{N}$，所以 $E \cup Z \in \mathcal{N}$，所以 $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{N}$.

(b) 要证明 $\overline{\mu}$ 是一个测度，只需要证明对一列互不相交的 $\{E_j \cup Z_j\}$，成立：

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cup Z_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_j \cup Z_j).$$

事实上，$\overline{\mu}(E_j \cup Z_j) = \mu(E_j)$，而 $\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cup Z_j) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j\right)$，而 $\bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$，而 $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ 是 $\mathcal{M}$ 中零测集. 所以，$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cup Z_j)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$. 因为 $\{E_j \cup Z_j\}$ 互不相交，所以 $\{E_j\}$ 也互不相交，根据 μ 是 $\mathcal{M}$ 上测度，所以：

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

因此：

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cup Z_j)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_j \cup Z_j).$$

□

3. (**Stein 中译本，P233，题 3**) 我们曾经用方体（开集）覆盖来定义 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 外测度 m_*. 证明 $\mathbb{R}^d$ 中的集合 E 是 Caratheodory 可测的，当且仅当 E 第一章意义下的 Lebesgue 可测集.

证明. 如果 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中 Lebesgue 可测集，T 是任何一个集合，根据 Lebesgue 外测度的定义（开集覆盖）容易证明存在 G_δ 集 H 使得 $H \supset T$ 而且 $m(H) = m_*(T)$. 我们要证明 $m_*(T) = m_*(T \cap E) + m_*(T \cap E^c)$，只需要证明 $m(H) = m_*(T \cap E) + m_*(T \cap E^c)$. 注意到 $T \cap E \subset H \cap E$，所以 $m_*((H \cap E) - (T \cap E)) \leq m_*((H - T) \cap E) \leq m_*(H - T) \leq m(H) - m_*(T) = 0$，所以 $(H \cap E) - (T \cap E)$ 是零测集，同理可知 $(H \cap E^c) - (T \cap E^c)$ 也是零测集，所以，

$$m_*(T \cap E) \geq m(H \cap E) - m_*((H \cap E) - (T \cap E)) = m(H \cap E).$$

$$m_*(T \cap E^c) \geq m(H \cap E^c) - m_*((H \cap E^c) - (T \cap E^c)) = m(H \cap E^c).$$

再结合外测度的单调性可知反向不等式也成立，所以 $m_*(T \cap E) = m(H \cap E), m_*(T \cap E^c) = m(H \cap E^c)$. 根据测度可加性可知

$$m(H) = m(H \cap E) + m(H \cap E^c).$$

所以，

$$m_*(T) = m_*(T \cap E) + m_*(T \cap E^c).$$

所以，E 是 Caratheodory 可测的.

反之，如果 E 是 Caratheodory 可测的而且 $m_*(E)<\infty$，根据 Lebesgue 外测度的定义可证明存在 G_δ 集 H，使得 $E\subset H$，而且 $m_*(E)=m(H)$，因此 $m_*(H-E)=m(H)-m_*(E)=0$. 而 G_δ 集和外测度为 0 的集合都是 Lebesgue 可测的，所以 $E=H-(H-E)$ 也是 Lebesgue 可测的. 最后，如果 $m_*(E)=\infty$，只需考虑 $E\cap B(0,N)$，则每个 $E\cap B(0,N)$ 是 Lebesgue 可测的，因此 $E=\bigcup_{n\geq 1}(E\cap B(0,N))$ 也是 Lebesgue 可测的. □

4. (**Stein 中译本，P233，题 4**) 设 r 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个旋转，利用 $x\mapsto r(x)$ 保持 Lebesgue 测度说明它诱导了一个 S^{d-1} 上测度为 $\mathrm{d}\sigma$ 的保测映射.

证明. 回忆保测映射的定义：

若能够证明对于 r，存在 S^{d-1} 上某个测度 σ，使得对于 S^{d-1} 上的可测集 E，都有 $\sigma(r(E))=\sigma(E)$，则 r 诱导了一个 S^{d-1} 上测度为 $\mathrm{d}\sigma$ 的保测映射.

我们定义 S^{d-1} 上的集族 $\mathcal{M}$ 如下：$E\subset S^{d-1}$，$E\in\mathcal{M}\Leftrightarrow\widetilde{E}\in\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Lebesgue 可测集所组成的集族，$\widetilde{E}=\{x\in\mathbb{R}^d:\frac{x}{|x|}\in E,x\in B(0,1)\}$. 于是 $\mathcal{M}$ 是 S^{d-1} 上一个 σ-代数. 对 $E\in\mathcal{M}$，我们定义 $\sigma(E)=dm(\widetilde{E})$，其中 m 是 $\mathbb{R}^d$ 中 Lebesgue 测度. 注意到 $E_1\cup E_2=\varnothing\Leftrightarrow\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_2=\varnothing$. 于是由 m 的可加性可知 σ 具有可加性，于是 σ 是 $\mathcal{M}$ 中的测度.

最后说明 $r|_{S^{d-1}}$ 是一个保测映射，对 $E\in\mathcal{M}$，去证明 $\sigma(r(E))=dm(\widetilde{r(E)})=\sigma(E)$，这只需要说明 $\widetilde{r(E)}=r(\widetilde{E})$ 并利用 Lebesgue 测度的旋转不变性. 而 $\widetilde{r(E)}=r(\widetilde{E})$ 是因为：

$$
\begin{aligned}
x\in\widetilde{r(E)}&\Leftrightarrow x=\rho r(y),\text{for some }0<\rho<1,y\in E\\
&\Leftrightarrow x=r(\rho y),\text{for some }0<\rho<1,y\in E\Leftrightarrow x\in r(\widetilde{E}).
\end{aligned}
$$

□

5. (**Stein 中译本，P233，题 5**) 用极坐标公式计算：

(1) 当 $d=2$ 时，$\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x=1$. 并由此推导出事实上该式对所有 d 都成立；

(2) $\left(\int_0^\infty e^{-\pi r^2}r^{d-1}\mathrm{d}r\right)\sigma(S^{d-1})=1$，因此 $\sigma(S^{d-1})=2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$；

(3) 若 B 是单位球，则 $v_d=m(B)=\pi^{d/2}/\Gamma(d/2+1)$.（这个量等于 $\left(\int_0^1 r^{d-1}\mathrm{d}r\right)\sigma(S^{d-1})$，参见第二章的习题 14）

解. (1) 先看 $d=2$ 的情形，由极坐标变换公式可得

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x&=\int_{S^1}\int_0^\infty re^{-\pi r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma(\alpha)=\sigma(S^1)\int_0^\infty re^{-\pi r^2}\mathrm{d}r\\
&=2m(\widetilde{S^1})\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\pi r^2}\,\mathrm{d}r^2\\
&=m(\widetilde{S^1})\cdot\frac{1}{\pi}.
\end{aligned}
$$

注意 $\widetilde{S^1}=\{x\in\mathbb{R}^2:0<|x|<1:\frac{x}{|x|}\in S^1\}=B(0,1)-\{0\}$，所以 $m(\widetilde{S^1})=\pi$.

所以当 $d=2$ 时 $\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x=1$.

对于 $d=2$ 的情形，由 Fubini 定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\mathrm{d}y\right) = \left(\int_R e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = 1.$$

所以该式对 $d=1$ 的情形成立，对任何 d，反复应用 Fubini 定理可得：

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x_1^2+\cdots x_d^2)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d = \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{-\pi x^2}\mathrm{d}x\right)^d = 1.$$

(2) 对一般情形，由极坐标变换公式得：

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x = \sigma(S^{d-1})\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\pi r^2}\mathrm{d}r = 1.$$

注意到

$$\int_0^\infty r^{d-1}e^{-\pi r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^\infty (r^2)^{d/2}e^{-\pi r^2}\,\mathrm{d}\big(r^2\big) = \frac{1}{2\pi^{d/2}}\Gamma(d/2).$$

所以

$$\sigma(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

(3) 若 B 是单位球，根据测度 σ 的定义可得：

$$\sigma(S^{d-1}) = dm(\widetilde{S^{d-1}}) = dm(B) = dv_d.$$

所以

$$v_d = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

注意到

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) = \frac{d}{2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right).$$

所以 $v_d = \pi^{d/2}/\Gamma(d/2+1)$. ♡

6. (**Stein 中译本，P233，题 6**)$\mathbb{R}^d$ 中的单位球 B 上的 Green 公式叙述如下. 设 $u,v\in C^2(\overline{B})$，则有：

$$\int_B (v\triangle u - u\triangle v)\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

这里 S^{d-1} 是具有测度 $\mathrm{d}\sigma$ 的单位球面，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 和 v 沿着单位球面内法向的方向导数. 说明这一结果可以通过前一章的引理 4.5 取 $\eta=\eta_\varepsilon^+$ 并令 $\varepsilon\to 0$ 得到.

证明. 我们取 $\eta=\eta_\varepsilon^+$ 为 “鼓包函数”，其中对 $|x|\le 1-\varepsilon$，$\eta_\varepsilon^+(x)=1$，对 $|x|\ge 1$，$\eta_\varepsilon^+(x)=0$，而且 $|\nabla\eta_\varepsilon^+(x)|\le\frac{c}{\varepsilon}$. 我们通过令 $\eta_\varepsilon^+(x)=\chi\left(\frac{|x|-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$，$1-\varepsilon\le|x|\le 1$，其中 χ 是 $[0,1]$ 上一个固定的 C^2 函数，在 $[0,\frac{1}{4}]$ 等于 1，在 $[\frac{3}{4},1]$ 上等于 0.

根据前一章的引理 4.5，我们有恒等式：

$$\int_B (v\triangle u - u\triangle v)\eta_\varepsilon^+\mathrm{d}x = \int_B u(\nabla v\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+) - v(\nabla u\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+)\mathrm{d}x.$$

对右边用极坐标积分公式得

$$\int_B u(\nabla v\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+) - v(\nabla u\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+)\mathrm{d}x = \int_{S^{d-1}}\int_{1-\varepsilon}^1 r^{d-1}[u(\nabla v\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+) - v(\nabla u\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+)](r\gamma)\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma(\gamma)$$

这里的 $\gamma=\frac{x}{|x|}$，$r=|x|$. 当 $1-\varepsilon\le r\le 1$ 时，

$$\nabla\eta_\varepsilon^+(r\gamma)=\chi'\left(\frac{r-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}\gamma.$$

所以，分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^1 r^{d-1}u\nabla v\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+\mathrm{d}r&=\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1 r^{d-1}\chi'\left(\frac{r-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)u(\nabla v\cdot\gamma)\mathrm{d}r\\&=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1 r^{d-1}\chi'\left(\frac{r-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}r\\&=-r^{d-1}u\frac{\partial v}{\partial n}\,\chi\left(\frac{r-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\Bigg|_{r=1-\varepsilon}^1+O(\varepsilon)\\&=-u((1-\varepsilon)\gamma)\frac{\partial v}{\partial n}((1-\varepsilon)\gamma)(1-\varepsilon)^{d-1}+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

同理可得，$\int_{1-\varepsilon}^1 r^{d-1}v\nabla u\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+\mathrm{d}r=-v((1-\varepsilon)\gamma)\frac{\partial u}{\partial n}((1-\varepsilon)\gamma)(1-\varepsilon)^{d-1}+O(\varepsilon)$，所以：

$$\begin{aligned}&\int_B u(\nabla v\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+)-v(\nabla u\cdot\nabla\eta_\varepsilon^+)\mathrm{d}x\\=&(1-\varepsilon)^{d-1}\int_{S^{d-1}}\left(v((1-\varepsilon)\gamma)\frac{\partial u}{\partial n}((1-\varepsilon)\gamma)-u((1-\varepsilon)\gamma)\frac{\partial v}{\partial n}((1-\varepsilon)\gamma)\right)\mathrm{d}\sigma+O(\varepsilon).\quad(*)\end{aligned}$$

再次注意到：

$$\int_B(v\triangle u-u\triangle v)\eta_\varepsilon^+\mathrm{d}x=\int_B(v\triangle u+u\triangle v)\mathrm{d}x+O(\varepsilon).$$

对 $(*)$ 式取 $\varepsilon\to 0$ 可得：

$$\int_B(v\triangle u-u\triangle v)=\int_{S^{d-1}}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right).$$

□

7. (**Stein 中译本，P234，题 8**)Lebesgue 测度在某种意义上可以由平移不变性唯一刻画. 具体来说，若 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上一个平移不变的 Borel 测度，而且在任何紧集上都有限，则 μ 必然是 Lebesgue 测度 m 的倍数. 我们通过下面的步骤证明这一事实.

   (a) 假设 Q_a 是一个边长为 a 的方体：$\{x:0<x_j\le a, j=1,2,\cdots,d\}$ 的一个平移，若令 $\mu(Q_1)=c$，则对每个整数 n 都有 $\mu(Q_{1/n})=\frac{c}{n^d}$.

   (b) 从而 μ 关于 m 绝对连续，从而存在一个局部可积的函数 f 使得：

   $$\mu(E)=\int_E f\mathrm{d}x.$$

   (c) 由 Lebesgue 微分定理（第三章推论 1.7）得到 $f(x)=c$ a.e. ，所以 $\mu=cm$.

证明. (a) 将 Q_1 的各边 n 等分得到 n^d 个小的方体，这些方体都是一个边长为 $\frac{1}{n}$ 方体的一个平移，所以它们的测度都为 $\mu(Q_{1/n})$，于是根据 Lebesgue 测度的可加性可知：

$$n^d\mu(Q_{1/n})=\mu(Q_1)=c.$$

因此 $\mu(Q_{1/n})=\frac{c}{n^d}$. 进一步地我们可以说明 $\mu(Q_{m/n})=\frac{cm^d}{n^d}$，其中 $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

(b) 先证明 μ 关于 m 绝对连续，这是因为如果 E 是 Lebesgue 零测集，则对任何 $\varepsilon > 0$，存在 E 的一个至多可数方体覆盖 $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset E$ 使得 $\sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) \leq \varepsilon$. 根据第一章练习可知我们可以假设这些方体的边长都是有理数，注意如下计算，对边长为有理数的任何方体 R，设其边长为 $r \in \mathbb{Q}$，则则根据 (a) 的结果可知：

$$\mu(R) = r^d c = cm(R).$$

因此：

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j) = c\sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) \leq c\varepsilon.$$

取 $\varepsilon \to 0$ 即可得到 $\mu(E) = 0$，所以 $\mu \ll m$. 由 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理可知，存在一个函数 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 使得：

$$\mu(E) = \int_E f \mathrm{d}m = \int_E f \mathrm{d}x.$$

(c) 我们回忆 $\mathbb{R}^d$ 上所有（边长为有理数的）方体所构成的集合簇是正则收缩集合簇，注意到：

$$\lim_{\substack{m(R)\to 0\\ R\ni x}} \frac{1}{m(R)} \int_R f(y)\mathrm{d}y = \lim_{\substack{m(R)\to 0\\ R\ni x}} \frac{1}{m(R)} \mu(R) = c.$$

其中 R 在上述方体组成的集簇中取.

另一方面，由 Lebesgue 微分定理，对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^d$（回忆 $\mathbb{R}^d$ 上几乎每个点属于局部可积函数的 Lebesgue 集），都有：

$$f(x) = \lim_{\substack{m(R)\to 0\\ R\ni x}} \frac{1}{m(R)} \int_R f(y)\mathrm{d}y = c.$$

即 $f(x) = c$，a.e.$x \in \mathbb{R}^d$，所以 $\mu = cm$. □

8. (**Stein 中译本，P234，题 9**) 令 $C([a,b])$ 表示有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数构成的线性空间. 假设给定了 $[a,b]$ 上的一个 Borel 测度 μ，满足 $\mu([a,b]) < \infty$，则：

$$f \mapsto \ell(f) = \int_a^b f \mathrm{d}\mu$$

是 $C([a,b])$ 上的一个线性泛函. 其中 ℓ 是正的，即当 $f \geq 0$ 时有 $\ell(f) \geq 0$.

反之，对任何 $C([a,b])$ 上的线性泛函 ℓ，ℓ（在上述意义下）是正的，则存在唯一的有限 Borel 测度 μ，使得对 $f \in C([a,b])$，$\ell(f) = \int_a^b f \mathrm{d}\mu$.

证明. (1) 容易验证 ℓ 是一个线性泛函（根据积分的线性性），另外，若 f 是非负函数，因为 μ 是一个（正）Borel 测度，所以 $\int_a^b f \mathrm{d}\mu \geq 0$. 所以 ℓ 是一个正的线性泛函.

(2) 不失一般性，可假设 $a = 0$，对 $u \geq 0$ 定义 $F(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ell(f_{u,\varepsilon})$，其中 $f_{u,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq u, \\ 0, & u+\varepsilon \leq x, \end{cases}$ 且 $f_{u,\varepsilon}$ 在 u 和 $u+\varepsilon$ 之间是线性的. 我们下面说明 F 是递增和右连续的. 对 $v \geq u$，我们观察对固定的 ε，对每个 $x \in [a,b]$，都成立 $f_{v,\varepsilon}(x) - f_{u,\varepsilon}(x) \geq 0$. 根据泛函 ℓ 的线性性和正性以及极限运算性质可得：

$$F(v) - F(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ell(f_{v,\varepsilon} - f_{u,\varepsilon}) \geq 0.$$

所以 F 是递增的. 下面说明 F 是右连续的，这只需要说明对任何 $\eta > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 \le v - u \le \delta$ 时成立 $F(v) - F(u) < \eta$. 首先取 ε 足够小使得 $\ell(f_{u,\varepsilon}) \le F(u) + \eta$. 考虑函数 $(1 + \frac{\eta}{F(u)})f_{u,\varepsilon}$，则存在一个 $\varepsilon > \delta > 0$，使得当 $u \le x \le u + \delta$ 时有 $(1 + \frac{\eta}{F(u)})f_{u,\varepsilon} \ge 1$. 因为 $0 \le v - u \le \delta$，考虑 $f_{v,\varepsilon'}$，其中 $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon - \delta}{2}$，则根据构造可知处处成立 $f_{v,\varepsilon'}(x) \le (1 + \frac{\eta}{F(u)})f_{u,\varepsilon}(x)$. 根据泛函的正性和线性性有如下计算：

$$F(v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ell(f_{v,\varepsilon}) \le \ell(f_{v,\varepsilon'}) \le (1 + \frac{\eta}{F(u)})\ell(f_{u,\varepsilon}) \le (1 + \frac{\eta}{F(u)})(F(u) + \eta) = F(u) + (2 + F(u))\eta.$$

事实上，对任何 $\eta > 0$，我们对 $\frac{\eta}{2+F(u)}$ 取相应的 δ，则当 $0 \le v - u \le \delta$ 时成立：

$$F(v) \le F(u) + \eta.$$

所以 F 是右连续的. 因此 F 确定了一个唯一的 Borel 测度 μ，且 $\mu((c, d]) = F(d) - F(c)$. 我们令 $L(f) = \int_a^b f \mathrm{d}\mu$. 因为连续函数可以实现为一列递减的阶梯函数在 L^1 范数下的极限（这总是可以做到，回忆书中关于满足条件的简单函数列的构造可知，只要将书中取每个区间的下界改为取上界就得到递减的简单函数逼近，以此为基础就可以得到递减的阶梯函数逼近），所以对任何 $f \in C([a, b])$，存在阶梯函数 g，使得 $g \ge f$ 且 $L(g) \le L(f) + \eta$.

$$g = \sum c_k \chi_{(a_k, b_k]}.$$

其中区间 $(a_k, b_k]$ 互不相交. 根据阶梯函数积分的定义：

$$L(g) = \sum c_k \mu((a_k, b_k]) = \sum c_k [F(b_k) - F(a_k)].$$

另一方面，对于 $f_{b_k,\varepsilon}$ 和 $f_{a_k,\varepsilon}$，取 ε 足够小，则有：

$$\ell(f_{b_k,\varepsilon}) - F(b_k) \le \frac{\eta}{2^k}.$$

最后，我们取 $\widetilde{g} = \sum_k c_k \chi_{(a'_k, b_k]}$，其中 $a'_k < a_k$，且 $\sum_k (a_k - a'_k)$ 足够小使得 $L(\widetilde{g}) \le L(g) + \eta$（根据积分的绝对连续性）. 于是 $g \le \widetilde{g}$. 我们不妨设 ε 足够小使得 $\varepsilon < \min_k (a_k - a'_k)$，则此时 $f \le g \le \sum_k c_k (f_{b_k,\varepsilon} - f_{a'_k,\varepsilon})$.

有了上述结果，根据泛函 ℓ 的正性和线性性可得：

$$\ell(f) \le \sum c_k [\ell(f_{b_k,\varepsilon}) - \ell(f_{a'_k,\varepsilon})] \le \sum c_k [F(b_k) - F(a'_k)] + \eta = L(\widetilde{g}) + \eta \le L(g) + 2\eta \le L(f) + 3\eta.$$

取 $\eta \to 0$ 可得 $\ell(f) \le L(f)$. 考虑 $-f$，则 $\ell(-f) \le L(-f)$，由线性性 $\ell(f) \ge L(f)$，所以 $\ell(f) = L(f) = \int_a^b f \mathrm{d}\mu$. □

9. (**Stein 中译本，P234，题 10**) 设 ν, ν_1, ν_2 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的符号测度，μ 是其上的正测度，则：

   (a) 若 $\nu_1 \perp \mu$，$\nu_2 \perp \mu$，则 $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

   (b) 若 $\nu_1 \ll \mu$ 且 $\nu_2 \ll \mu$，则 $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

   (c) $\nu_1 \perp \nu_2$ 蕴含 $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

   (d) $\nu \ll |\nu|$.

   (e) 若 $\nu \perp \mu$ 而且 $\nu \ll \mu$，则 $\nu = 0$.

证明. (a) 因为 $\nu_1 \perp \mu$，$\nu_2 \perp \mu$，所以存在 E_1, F_1, E_2, F_2，$E_i \cap F_i = \varnothing$，$E_i \cup F_i = X$，其中 $i = 1, 2$.supp$\mu \subset F_i$，supp$\nu_i \subset E_i$. 取 $F = F_1 \cap F_2$，$E = E_1 \cup E_2$，容易验证 $F \cup E = X$ 且 $F \cap E$，而且，supp$\mu \subset F$. 另一方面，对任何 $A \in \mathcal{M}$，$(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \nu_1(A \cap E) + \nu_2(A \cap E) = (\nu_1 + \nu_2)(A \cap E) \Rightarrow \text{supp}(\nu_1 + \nu_2) \subset E$，所以 $(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$.

(b) 因为 $\nu_1 \ll \mu$ 且 $\nu_2 \ll \mu$，所以，对任何 $E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(E) = 0$，都有 $\nu_1(E) = \nu_2(E) = 0$. 所以 $(\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = 0$，所以 $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(c) 若 $\nu_1 \perp \nu_2$，则存在 E, F 使得 supp$\nu_1 \ll E$ 且 supp$\nu_2 \ll F$，$E \cup F = X$，$E \cap F = \varnothing$. 根据 Hahn 分解可知存在 P_i, N_i，使得 $P_i \cup N_i = X$，$P_i \cap N_i = \varnothing$，且 $\nu_i^+(A) = \nu_i(A \cap P_i)$，$\nu_i^-(A) = -\nu_i(A \cap N_i)$，$i = 1, 2$，$\forall A \in \mathcal{M}$.

现在，对任何 $A \in \mathcal{M}$，$|\nu_1|(A) = \nu_1(A \cap P_1) - \nu_1(A \cap N_1) = \nu_1(A \cap P_1 \cap E) - \nu_1(A \cap N_1 \cap E) = |\nu_1|(A \cap E)$，同理 $|\nu_2|(A) = |\nu_2|(A \cap F)$，因此 supp$|\nu_1| \subset E$，supp$|\nu_2| \subset F$，所以 $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(d) 若 $E \in \mathcal{M}$ 且 $|\nu|(E) = 0$，则 $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$，因为 ν^+ 和 ν^- 都是正的测度，所以 $\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = 0$. 所以 $\nu \ll |\nu|$.

(e) 用反证法，假设 ν 不恒为零. 因为 $\nu \perp \mu$，所以存在 E, F，使得 $E \cup F = X$，$E \cap F = \varnothing$，而且 supp$\nu \subset E$，supp$\mu \subset F$. 回忆，若 ν 不恒为零且 $\nu \ll \mu$，supp$\nu \subset E$，则 $\mu(E) > 0$. 而 $E = F^c$. 所以 $\mu(F^c) > 0$，这与 supp $\subset F$ 矛盾. □

10. (**Stein 中译本，P235，题 11**) 假设 F 是 $\mathbb{R}$ 上递增，且在每个不连续点都右连续的函数，令 $F = F_A + F_C + F_J$ 是第三章习题 24 中 F 的分解. 回忆，F_A 是绝对连续的，F_C 是连续的而且 $F_C' = 0$ 几乎处处成立，而 F_J 是一个跳跃函数. 令 $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$，其中 μ, μ_A, μ_C 和 μ_J 分别是与 F, F_A, F_C, F_J 相关联的 Borel 测度，证明：

(1) μ_A 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的，且对所有 Lebesgue 可测集 E，都成立：

$$\mu_A(E) = \int_E F'(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 F 绝对连续，则当 f 和 fF' 可积时，有：

$$\int f\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}F = \int f(x)F'(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\mu_C + \mu_J$ 与 Lebesgue 测度相互奇异.

证明. (1) 不失一般性，我们考虑 F 定义在 $[a, b]$ 上，根据第三章习题 24 的结论可知 $F_A(x) = \int_a^x F'(y)\mathrm{d}y$ 是递增、绝对连续函数，而且 F_A 在至多相差一个常数的意义下是唯一的. 所以由 F_A 定义的 Borel 测度 μ_A 是唯一的. 考虑测度 $\widetilde{\mu_A}(E) = \int_E F_A'(x)\mathrm{d}x$，则根据绝对连续函数的微积分基本定理可知 $\widetilde{\mu_A}((a, b]) = F_A(b) - F_A(a)$，根据 Borel 测度的构造过程以及唯一性可知 $\mu_A = \widetilde{\mu_A}$，所以

$$\mu_A(E) = \int_E F_A'(x)\mathrm{d}x.$$

我们指出虽然按照书中的方法只够造出了唯一的 Borel 测度，但是 E 可以是 Lebesgue 可测集，因为任何一个 Lebesgue 可测集和某个 Borel 集相差零测集，而这不影响（Lebesgue）积分的值. 最后注意到 F_J' 和 F_C' 的导数几乎处处为 0 可得

$$\mu_A(E)=\int_E F'(x)\mathrm{d}x$$

对所有 Lebesgue 可测集 E 都成立. 当 $m(E)=0$ 时显然 $\mu_A(E)=0$，所以这也立刻得到了 μ_A 关于 Lebesgue 测度是有限的.

(2) 因为 F 是绝对连续的（不妨设是递增、绝对连续的，否则可以考虑 $\frac{1}{2}(F+T_F)$ 和 $\frac{1}{2}(T_F-F)$，两者仍是绝对连续的），所以根据 (1) 的证明可知

$$\mu(E)=\int_E F'(x)\mathrm{d}x.$$

对所有 Lebesgue 可测集 E 成立. 因此对所有简单函数 f 要证明的命题成立，接着根据单调收敛定理可知对所有非负可测函数 f 要证的命题成立，最后根据线性可知对所有可积函数 f 上述命题成立.

(3) 我们只需要证明 μ_J 和 μ_C 分别关于 m 是相互奇异的即可. 对于 μ_J 这是容易的，因为 μ_J 是纯跳跃函数，所以由它产生的 Borel 测度满足 $\mu_J(\{x_n\})=\alpha_n$ 且在任何一个不包含跳跃点 x_n 的集合都有 $\mu_J(E)=0$. 我们记 $A=\{x_n\}_{n\geq 1}$，则 $m(A)=0$，$\mu_J(A^c)=0$. 于是 μ_J 和 m 是相互奇异的.

下面证明 μ_C 和 m 是相互奇异的. 设 $A=\{F_C'\neq 0\}$，则存在 G_δ 集 G，使得则 $m(G)=0$ 且 $G\supset A$，考虑 $B=G^c$，则 B 是 F_σ 集且在 B 上有 $F_C'(x)=0$，$\forall x\in B$. 我们说明 $\mu_C(B)=0$，为此不妨设 $B\subset[0,1]$. 否则考虑每个 $B\cap[n,n+1]$，一旦证明了 $\mu(B\cap[n,n+1])=0$ 对任何 n，则 $\mu(B)\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu(B\cap[n,n+1])=0$.

对任何 $\varepsilon>0$. 因为 $F_C'(x)=0$，所以对任何 $x\in B$，存在 $1\geq h_x>0$，使得 $|F_C(x+h_x)-F_C(x-h_x)|\leq 2h_x\varepsilon$. 因此 $\mu_C((x-h_x,x+h_x))\leq 2h_x\varepsilon$. 注意 B 是 F_σ 集而且 $B\subset[0,1]$，所以 $B=\bigcup_n B_n$,其中每个 B_n 是紧集. 对所有 $x\in B_n$ 都可以构造这样的区间 $\{(x-h_x,x+h_x)\}_{x\in B_n}$，于是这构成了紧集 B_n 的一个开覆盖，它必然存在有限子覆盖 $\{(x_i-h_{x_i},x_i+h_{x_i})\}_{i=1}^N$. 根据 Vitali 覆盖方法可知存在该有限区间族的子族 $\{R_i\}_{i=1}^M$，使得 R_i 互不相交而且 $\sum_{i=1}^N\mu_C((x_i-h_{x_i},x_i+h_{x_i}))\leq\sum_{i=1}^M 3\mu_C(R_i)$.

由此可知：

$$\begin{aligned}\mu_C(B_n)&\leq\sum_{i=1}^N\mu_C((x_i-h_{x_i},x_i+h_{x_i}))\leq\sum_{i=1}^M 3\mu_C(R_i)\leq\sum_{i=1}^M 3|R_i|\varepsilon\\&\leq 3m\left(\bigcup_{i=1}^\infty(x_i-h_{x_i},x_i+h_{x_i})\right)\varepsilon\leq 3m([-1,2])\varepsilon=9\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$ 可得 $\mu_C(B_n)=0$，所以 $\mu_C(B)=\mu_C\left(\bigcup_{n\geq 1}B_n\right)=0$.

所以 μ_C 和 μ 是相互奇异的. 所以 $\mu_C+\mu_J$ 关于 μ 是相互奇异的. 事实上，注意到 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理中的唯一性，$\mu=\mu_A+\mu_C+\mu_J$ 就是与 F 相关联的 Borel 测度的 Radon-Nikodym 分解，且 μ_A 关于 m 绝对连续，其 Radon-Nikodym 导数为 $\frac{\mathrm{d}\mu_A}{\mathrm{d}m}=F'(x)$. $\square$

11. (**Stein 中译本, P235, 题 12**) 假设 $\mathbb{R}^d-\{0\}$ 表示为极坐标 $\mathbb{R}_+\times S^{d-1}$, 其中 $\mathbb{R}_+=\{0<r<\infty\}$, 则 $\mathbb{R}^d-\{0\}$ 中的每个开集都可以写成可数个该乘积空间中开矩形的并.

证明. 考虑由形如:

$$\{r_j<r<r'_k\}\times\{\gamma\in S^{d-1}:|\gamma-\gamma_l|<\frac{1}{n}\}$$

组成的集合簇，其中 r_j 和 r'_k 在所有的正有理数中取，$\{\gamma_l\}$ 则取成 S^{d-1} 上的一个可数稠密子集（这总是可以做到，例如将球面表示为 $d-1$ 维球坐标，然后 γ_l 是每个分量取有理数的那些点，根据球坐标表示的连续性可知这构成了 S^{d-1} 上的一个可数稠密子集)，于是上述集合簇是一个可数簇.

对集合 $O\subset\mathbb{R}^d-\{0\}$ 是开集，我们设 $\{Q_j\}$ 是以上集簇中包含在 O 中的所有方体，下面说明 $\bigcup_{j=1}^\infty Q_j\supset O$. 这是因为，对任何 $x=(r,\gamma)\in O$，因为 O 是开集，所以存在一个开矩形 $O_1\times O_2\ni x$ 使得 $O_1\times O_2\subset O$，下面说明 $O_1\times O_2$ 可以 "改进" 为某个 Q_j 使得这个 Q_j 仍然包含 x. 因为 O_1 和 O_2 都是开集，所以存在 r_j,r'_k 是正有理数使得 $r\in(r_j,r'_k)\subset O_1$，且存在 $B(\gamma,\frac{2}{n})\subset O_2$，这里的开球 B 是针对 S^{d-1} 上的度量 $d(\cdot,\cdot)=|\cdot-\cdot|$ 而言的. 因为 $\{\gamma_l\}$ 是稠密子集，所以存在 γ_l 使得 $|\gamma_l-\gamma|<\frac{1}{n}$，于是 $B(\gamma_l,\frac{1}{n})\subset B(\gamma,\frac{2}{n})\subset O_2$，所以存在矩形 $\{r_j<r<r'_k\}\times\{\gamma\in S^{d-1}:|\gamma-\gamma_l|<\frac{1}{n}\}\subset O$，它正好是某个 Q_j，所以 $x\in Q_j$，所以 $O\subset\bigcup_{j=1}^\infty Q_j$. □

12. (**Stein 中译本，P235，题 13**) 令 m_j 是空间 $\mathbb{R}^{d_j}$，$j=1,2$ 上的 Lebesgue 测度，考虑乘积空间 $\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$（$d=d_1+d_2$），其中 m 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，证明 m 是乘积测度 $m_1\times m_2$ 的完备化.

证明. 这只需说明 (1) 形如 $E\cup Z$ 的集合是 $\mathbb{R}^d$ 中 Lebesgue 可测集，其中 E 是 $m_1\times m_2$-可测集，Z 是某个 $m_1\times m_2$-零测集 F 的子集；(2)$m(E\cup Z)=(m_1\times m_2)(E)$.

因为 E 是 $m_1\times m_2$-可测集，根据定义，E 落在 $\mathscr{A}=\{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 中有限多个矩形的无交并$\}$ 生成的 σ 代数中. 而显然 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 中的矩形是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Lebesgue 可测集（根据第二章命题 3.6)，所以 E 作为 Lebesgue 可测集经过至多可数次交、并和补运算得到的集合，仍是 Lebesgue 可测集. 另外，若 F 是 $m_1\times m_2$-零测集，则对任何 $\varepsilon>0$，存在至多可数 $\mathscr{A}$ 中的矩形 Q_j 使得 $F\subset\bigcup_{j=1}^\infty Q_j$，且 $\sum_{j=1}^\infty(m_1\times m_2)(Q_j)=\sum_{j=1}^\infty m_1(Q_{j,1})m_2(Q_{j,2})=\sum_{j=1}^\infty m(Q_j)<\varepsilon$. 其中，最后一个等于号是根据第二章的命题 3.6，根据定义可知 F 也是 $\mathbb{R}^d$ 中 Lebesgue 零测集，于是 Z 也是，于是 $E\cup Z$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 Lebesgue 可测集且 $m(E\cup Z)=m(E)$. 我们已经说明 m 限制在 $\mathscr{A}$ 上与 $m_1\times m_2$ 相同，所以对 $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 集 A，有 $m(A)=(m_1\times m_2)(A)$（根据测度的极限运算性质容易看出）. 因为 E 是 $m_1\times m_2$-可测集，所以存在 $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 集 A 使得 $(m_1\times m_2)(A)=m(A)=(m_1\times m_2)(E)$，于是 $(m_1\times m_2)(E-A)=0$，所以 $E-A$ 是 $m_1\times m_2$-零测集从而是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Lebesgue 零测集，所以 $m(E\cup Z)=m(E)=m(A)=(m_1\times m_2)(E)$.

□

13. (**Stein 中译本，P235，题 15**) 加一些条件后，我们可以将乘积测度理论扩张为无限个因子的情形. 我们考虑测度空间 $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$，其中除了有限个 j 之外都有 $\mu_j(X_j) = 1$，定义一个"柱集"E 如下：

$$E = \{x = (x_j) : x_j \in E_j, E_j \in \mathcal{M}_j, \text{对除了有限多个 } j \text{ 以外，都有 } E_j = X_j\}.$$

对这样的集合定义 $\mu_0(E) = \prod_{j=1}^{\infty} \mu_j(E_j)$. 设 $\mathscr{A}$ 是由上述"柱集"所构成的集合生成的代数，则 μ_0 可以扩张成代数 $\mathscr{A}$ 上的预测度，应用定理 1.5 可由该预测度诱导一个在由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数上的测度.

证明. 我们验证：μ_0 可以扩展为 $\mathscr{A}$ 上的预测度，从而根据定理 1.5，可以由该预测度诱导一个由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数上的测度. 我们设 $\mathcal{E}$ 是所有柱集所构成的集合簇，我们说明：

(1) $\varnothing \in \mathcal{E}$. 这是显然的，例如我们可以将空集写成 $\varnothing = \varnothing \times X_2 \times \cdots$，根据定义可知，这是一个柱集.

(2) 若 $E, F \in \mathcal{E}$，则 $E \cap F \in \mathcal{E}$. 这是因为 $\left(\prod_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cap \left(\prod_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \prod_{j=1}^{\infty}(E_j \cap F_j)$. 观察可知，对至多有限个 j 有 $E_j \cap F_j \neq X_j$，所以对除了有限个 j 之外都有 $E_j \cap F_j = X_j$，所以 $E \cap F \in \mathcal{E}$.

(3) 若 $E \in \mathcal{E}$，则 E^c 是有限多柱集的无交并. 不失一般性，我们设 $E = E_1 \times \cdots \times E_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots$，其中 $E_i \neq X_i$ 对 $i \leq N$，此时 $E^c = E_1^c \times \cdots \times E_N^c \times \prod_{i \geq N+1} X_i$. 因为 $E_j^c \in \mathcal{M}_j$，所以 E^c 本身也是一个柱集（从而是有限多个柱集的无交并）.

综上所述，$\mathcal{E}$ 是一个"elementary family"，所以由有限多个柱集的无交并构成的集合簇是一个代数，从而是包含所有柱集的最小代数 $\mathscr{A}$（这一小的技术性结果来自 G.B.Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, 2nd Edition 的第 23-24 页）. 此时我们可以在 $\mathscr{A}$ 上定义一个预测度 μ_0 如下：对可数多个 $\{A_j\}_{j \geq 1} \subset \mathscr{A}$，其中 A_j 互不相交且 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{A}$，可写 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} E_j^k = \bigcup_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{\infty} F_j^k$，即此时可数多个互不相交的柱集并等于有限多个互不相交的柱集并，由此这些可数多个互不相交的柱集 $\{\prod_{j=1}^{\infty} E_j^k\}_{k \geq 1}$ 可被分为 n 组，每组内部的柱集共用相同的"底面". 由此可知，我们只需要对任何一个分解为有限多个小的柱集的大柱集：$\prod_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{\infty} E_j^k$ 证明可加性即可，其中每个小柱集 $\prod_{j=1}^{\infty} E_j^k$ 互不相交.

注意到：

$$\prod_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j^k}(x_j).$$

其中所有的特征函数都是非负可测，根据 Levi 收敛定理的推论（对 $\int_{X_1} \mathrm{d}\mu_1(x_1)$ 使用）可得：

$$\mu_1(E_1) \prod_{j=2}^{\infty} \chi_{E_j}(x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(E_1^k) \prod_{j=2}^{\infty} \chi_{E_j^k}(x_j).$$

不断重复这一过程，我们指出对左边来说，至多有限次即收敛（不妨设 ℓ 次后收敛），因为经过有限次后，剩下的所有特征函数都是 $\chi_{X_j}(x_j) \equiv 1$，因此左边变为 $\mu_1(E_1) \cdots \mu_\ell(E_\ell) = \prod_{j=1}^{\infty} \mu_j(E_j) = \mu_0(\prod E_j)$. 对于右边，$\ell$ 次以后我们得到 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(E_1^k) \cdots \mu_\ell(E_\ell^k) \prod_{j=\ell+1}^{\infty} \chi_{E_j^k}(x_j)$，

我们对 ℓ 使用 Levi 收敛定理的推论可得其极限为：

$$\lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_1(E_1^k)\cdots\mu_\ell(E_\ell^k)\prod_{j=\ell+1}^{\infty}\chi_{E_j^k}(x_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\mu_j(E_j^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(\prod E_j^k).$$

以上证明了：

$$\mu_0(\prod E_j)=\sum_k\mu_0(\prod E_j^k).$$

所以 μ_0 是 $\mathscr{A}$ 上的预测度，运用定理 1.5 即延拓为乘积空间上的一个测度. □

14. (**Stein 中译本，P236，题 16**) 考虑 d 维环面 $\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$，将 $\mathbb{T}^d$ 写成 $\mathbb{T}^1\times\cdots\times\mathbb{T}^1$（$d$ 个因子）并令 μ 是 $\mathbb{T}^d$ 上由 $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_d$ 给出的乘积测度，这里 μ_j 是等同于圆周 $\mathbb{T}$ 的 X_j 上的 Lebesgue 测度，即，如果将 X_j 上每个点唯一地表示为 x_j，其中 $0<x_j\leq 1$，则 μ_j 就是将 $\mathbb{R}^1$ 上 Lebesgue 测度限制在 $(0,1]$ 上所诱导的测度.

(a) 验证 μ 的完备化是立方体 $Q=\{x:0<x_j\leq 1:j=1,\cdots,d\}$ 上诱导的 Lebesgue 测度；

(b) 对 Q 上任何函数 f，设 $\widetilde{f}$ 表示其在 $\mathbb{R}^d$ 上的周期延拓，即对每个 $z\in\mathbb{Z}^d$ 都有 $\widetilde{f}(x+z)=\widetilde{f}(z)$，则 f 在 $\mathbb{T}^d$ 可测当且仅当 $\widetilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测；f 在 $\mathbb{T}^d$ 上连续当且仅当 $\widetilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上连续.

(c) 假设 f 和 g 在 $\mathbb{T}^d$ 上可积，证明由 $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 定义的积分对几乎处处 x 是有限的；并且 $f*g$ 在 $\mathbb{T}^d$ 可积；且 $f*g=g*f$.

(d) 对任何 $\mathbb{T}^d$ 上可积函数 f，写：

$$f\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}a_ne^{2\pi in\cdot x}$$

来表示 $a_n=\int_{\mathbb{T}^d}f(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x$，证明，若 g 也可积且 $g\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}b_ne^{2\pi in\cdot x}$，则：

$$f*g\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}.$$

(e) 验证：$\{e^{2\pi in\cdot x}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 的一组 O.N. 基，从而有：

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}|a_n|^2.$$

(f) 令 f 是 $\mathbb{T}^d$ 上任意周期函数，则 f 可以被 $\{e^{2\pi in\cdot x}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 中的有限个指数函数的线性组合一致逼近.

证明. (a) 我们回忆习题 13 的结果，若 m_j 是每个空间的上的 Lebesgue 测度，则乘积空间上的 Lebesgue 测度 m 是乘积测度 $\prod m_j$ 的完备化. 在本题中，μ_j 是每个 $\mathbb{T}^1$ 上的测度（相当于 $(0,1]$ 上的 Lebesgue 测度），于是 $(0,1]^d$ 上的 Lebesgue 测度 m 是乘积测度 $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_d$ 上的完备化.

(b) f 是可测函数当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是可测集，对 U 是开集，当且仅当 $\widetilde{f}^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集，当且仅当 $\widetilde{f}$ 是可测集函数. 将上述“可测集”换成“开集”又得到关于连续性的判断. 注

意其中 $\widetilde{f}^{-1}(U)$ 是 $f^{-1}(U)\subset Q$ 关于格点 $\mathbb{Z}^d$ 的平移，因此它是开集（resp. 可测集）当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是开集（resp. 可测集）.

(c) 根据非负可测函数的 Fubini 定理可知：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d}|(f*g)(x)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^d}\left|\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{T}^d)}<\infty.\end{aligned}$$

所以 $f*g$ 是可积函数，所以 $f*g$ 几乎处处有限. 最后，卷积的交换性可以由变量替换 $u=x-y$，以及积分的平移和反射不变性可得到：

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=\int f(u)g(x-u)\mathrm{d}u=(g*f)(x).$$

(d) 只需证明：

$$\left(\int_{\mathbb{T}^d}f(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{T}^d}g(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x\right)=\int_{\mathbb{T}^d}(f*g)(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x.$$

我们计算右边，根据 $|f(x-y)g(y)e^{2\pi in\cdot x}|=|f(x-y)g(y)|\in L^1(\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d)$ 以及 Fubini 定理可知：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d}(f*g)(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)g(y)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)g(y)e^{2\pi in\cdot(x-y)}\cdot e^{2\pi in\cdot y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{T}^d}g(y)e^{2\pi in\cdot y}\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)e^{2\pi in\cdot(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{T}^d}g(y)e^{2\pi in\cdot y}\int_{\mathbb{T}^d}f(x-y)e^{2\pi in\cdot(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{T}^d}g(y)e^{2\pi in\cdot y}\int_{\mathbb{T}^d}f(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_{\mathbb{T}^d}f(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{T}^d}g(x)e^{2\pi in\cdot x}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

(e) 同样是 Fubini 定理的应用.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d}e^{2\pi in\cdot x}\cdot e^{2\pi im\cdot x}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{T}^1}\cdots\int_{\mathbb{T}^1}e^{2\pi i(n_1x_1+\cdots n_dx_d)}\cdot e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_dx_d)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d\\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^1}e^{2\pi in_1x_1}\cdot e^{2\pi im_1x_1}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int_{\mathbb{T}^1}e^{2\pi in_dx_d}\cdot e^{2\pi im_dx_d}\mathrm{d}x_d\right)\end{aligned}$$

在一维情形：

$$\int_{\mathbb{T}^1}\overline{e^{2\pi inx}}\cdot e^{2\pi imx}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m,\end{cases}$$

由此可知对于 d 维情形有 $\int_{\mathbb{T}^d}e^{2\pi in\cdot x}\cdot e^{2\pi im\cdot x}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m,\end{cases}$ 所以这是一组 O.N. 基.

(f) 令 $g(x)=g_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d}$，若 $0<x_j\le\varepsilon, j=1,\cdots,d$，在 Q 的其他点定义 $g_\varepsilon(x)=0$. 于是：

$$|f(x)-(f*g)(x)|=\left|f(x)\int g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x-\int f(x-y)g_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\right|\le\int|f(x)-f(x-y)||g_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y.$$

因为 f 在 Q 上是一致连续的，所以对任何 $\eta>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|y|<\delta$ 时成立 $|f(x)-f(x-y)|<\eta$，此时，对 $\varepsilon<\delta$，我们有：

$$|f(x)-(f*g)(x)|\le\int\eta g_\varepsilon(y)\mathrm{d}y=\eta.$$

所以当 $\varepsilon\to0$ 时 $f*g_\varepsilon\rightrightarrows f$.

另一方面，$(f*g_\varepsilon)(x)\sim\sum a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}$，我们要证明实际上等号几乎处处成立. 因为 f 和 g_ε 都是 L^2 可积的，所以 $\sum|a_n|^2<\infty$，$\sum|b_n|^2<\infty$，根据 Cauchy-Schwarz 不等式，$\sum|a_nb_n|<\infty$. 这说明 $\widehat{f*g_\varepsilon}\in L^1$，因此由 Fourier 反演公式可知 $f*g_\varepsilon\in L^1$ 而且：

$$f*g_\varepsilon=\sum a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}.$$

对几乎处处 x 成立. 我们将 Fourier 展开式截断为 $\sum_{\max n_j\le N}a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}$.

根据一致收敛性，对任何 $\eta>0$，存在 ε 足够小使得 $|f*g_\varepsilon-f|<\frac{\eta}{2}$，对这一 η，因为 $\sum|a_nb_n|<\infty$ 绝对收敛，所以对足够大的 N，尾项 $\sum_{\min n_j\ge N+1}|a_nb_n|<\frac{\eta}{2}$，所以：

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\max n_j\le N}a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}-f\right|&=|f(x)-(f*g_\varepsilon)(x)|+\left|(f*g_\varepsilon)(x)-\sum_{\max n_j\le N}a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}\right|\\&=|f-f*g_\varepsilon|+\left|\sum_{\min n_j\ge N+1}a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}\right|\\&\le|f-f*g_\varepsilon|+\sum_{\min n_j\ge N+1}|a_nb_n|\\&\le\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{2}\\&=\eta.\end{aligned}$$

因此连续函数可以用有限指数函数的线性组合一致逼近. □

15. 设 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则其全变差函数 $T_F(a,x)$ 也是绝对连续的.

证明. 任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\sum_{j=1}^n(b_j-a_j)<\delta$ 时，成立 $\sum_{j=1}^n|F(b_j)-F(a_j)|<\varepsilon$. 设 $x_j,y_j\in(a,b)$，不妨 $x<y$，根据全变差的加性可知：

$$T_F(a,x_j)+T_F(x_j,y_j)=T_F(a,y_j).$$

设 $\sum_{j=1}^n(y_j-x_j)<\delta$，对小区间 (x_j,y_j) 的任何分划 Δ_j，每个 (x_j,y_j) 分成的所有小区间的长度加起来小于 δ，根据前面的不等式可知：

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k,\Delta_j}|F(x_{k+1})-F(x_k)|<\varepsilon.$$

对每个 Δ_j 都取上确界可得

$$\sum_{j=1}^{n} T_F(x_j, y_j) < \varepsilon, \quad \text{即} \sum_{j=1}^{n} |T_F(a, x_j) - T_F(a, y_j)| < \varepsilon.$$

所以 T_F 在 $[a, b]$ 是绝对连续的.

事实上，根据前面做的习题可知，当 F 是绝对连续函数时，全变差可以表示成：$T_F(a, x) = \int_a^x |F'(y)|\mathrm{d}y$. 由绝对连续性可知 F' 几乎处处存在而且是局部可积的，因此由 Lebesgue 积分的绝对连续性可直接得到 T_F 是绝对连续函数. $\square$

16. 设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上带号测度. 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中递增的集合列，则 $\mu\left(\bigcup_j E_j\right) = \lim_j \mu(E_j)$；若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中递减的集合列，且 $\mu(E_1) < \infty$，则 $\mu\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \mu(E_j)$.

证明. 令 $F_1 = E_1, F_2 = E_2 - E_1, F_3 = E_3 - E_2, \cdots$，则 F_j 互不相交而且 $\bigcup_j E_j = \bigcup_j F_j$，由带号测度的可加性知 $\mu(\bigcup_j F_j) = \sum_j \mu(F_j) = \lim_N \sum_{j=1}^N \mu(F_j)$. 再注意到 $\mu(E_N) = \mu(\bigcup_{j=1}^N F_j) = \sum_{j=1}^N \mu(F_j)$ 可得 $\mu(\bigcup_j E_j) = \lim_N \mu(E_N)$.

对于第二个事实，令 $G_1 = \varnothing, G_j = E_1 - E_j$，则 $\{G_j\}$ 是单调递增集合列且 $\bigcup_j G_j = E_1 - \bigcap_j E_j$. 根据已经证明的第一个事实可知 $\lim_j \mu(G_j) = \mu(E_1) - \mu(\bigcap_j E_j)$，所以：$\mu(\bigcap_j E_j) = \lim_j [\mu(E_1) - \mu(G_j)] = \lim_j \mu(E_1 - G_j) = \lim_j \mu(E_j)$. $\square$

17. $\nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu \iff \nu^+ \ll \mu \quad \text{and} \quad \nu^- \ll \mu$.

证明.

- $\nu \ll \mu \Rightarrow \forall E \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(E) = 0$，都有 $\nu(E) = 0$. 根据 Hahn 分解定理，存在 $P, N \in \mathcal{M}$，$P \cup N = X$，$P \cap N = \varnothing$，存在 ν^+，ν^- 为正测度，使得 $\nu = \nu^+ - \nu^-$，而且 $\mathrm{supp}\nu^+ \subset P$，$\mathrm{supp}\nu^- \subset N$. 因为 μ 是正测度，所以 $\mu(E \cap P) = \mu(E \cap N) = 0$，所以 $\nu(E \cap P) = 0$，$\nu(E \cap N) = 0$. 注意 $\nu^+(E) = \nu^+(E \cap P) = \nu(E \cap P) = 0$，同理 $\nu^-(E) = \nu^-(E \cap N) = \nu(E \cap N) = 0$，所以此时 $|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$. 以上证明了只要 $\mu(E) = 0$，就有 $|\nu|(E) = 0$，因此 $|\nu| \ll \mu$.
- $|\nu| \ll \mu \Rightarrow \forall E$ 满足 $\mu(E) = 0$，$\nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$. 因为 ν^+ 和 ν^- 都是正测度，所以 $\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$. 综上所述 $\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$.
- $\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu \Rightarrow \forall E$ 满足 $\mu(E) = 0$，$\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$，所以 $\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = 0$. 综上所述 $\nu \ll \mu$.

$\square$

18. $(X, \mathcal{M})$ 为可测空间，ν 是其上 σ-有限的带号测度，μ 和 λ 是其上 σ-有限的正测度，且满足 $\nu \ll \mu \ll \lambda$. 则 $\nu \ll \lambda$ 而且

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \quad \lambda\text{-a.e.}$$

其中记号（例如）$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$ 表示 ν 关于 λ 的 Radon-Nikodym 导数.

证明. 不妨假设 ν 是正测度，否则可以分别考虑其正变差和负变差. 我们首先证明如果 $g \in L^1(\nu)$，那么 $g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \in L^1(\mu)$ 而且成立：

$$\int g\mathrm{d}\nu = \int g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu \quad (*).$$

首先根据 $\nu \ll \mu$，由 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理可得

$$\int \chi_E \mathrm{d}\nu = \nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \int \chi_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu.$$

由此可知 $(*)$ 式对 $g = \chi_E$ 成立，因此对简单函数成立. 根据 Levi 收敛定理可得对非负可测函数成立，最后由线性可知对 $L^1(\nu)$ 可积函数 g 也成立. 在 $(*)$ 中将 ν, μ 换成 μ, λ 并代入 $g = \chi_E\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$（根据前面的论述可得 $\chi_E\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \in L^1(\mu)$），得到：

$$\nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \quad \lambda\text{-a.e.}$$

□

19. (**Stein 中译本，P239，问题 1**) 假设 Φ 是从 $\mathbb{R}^d$ 的开集 O 到另一个 $\mathbb{R}^d$ 中开集 O' 的一个 C^1 双射.

(a) 若 E 是 O 的一个可测子集，则 $\Phi(E)$ 也是可测的.

(b) $m(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)|\mathrm{d}x$，其中 Φ' 是 Φ 的 Jacobi 矩阵.

(c) 当 f 在 O' 上可积时，$\int_{O'} f(y)\mathrm{d}y = \int_O f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\mathrm{d}x$.

证明. (a) 设 E 是 O 的可测子集，于是存在一个 O 中的 G_δ 集 H，$H \supset E$，$m(H - E) = 0$. 写 $H = \bigcap_{n\geq 1} O_n$，则由 Φ 是双射可知 $\Phi(\bigcap_{n\geq 1} O_n) = \bigcap_{n\geq 1} \Phi(O_n)$. 因为 Φ 是 C^1 微分同胚，所以 $\Phi(O_n)$ 均为开集，所以 $\bigcap_{n\geq 1} \Phi(O_n) \supset \Phi(E)$ 是 G_δ 集. 另一方面，对 $H - E$，因为 $H - E$ 是 Lebesgue 零测集，所以存在可数且几乎不相交方体 $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ 使得 $H - E \subset \bigcup_{j\geq 1} Q_j$ 并且 $\sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j) \leq \varepsilon$. 我们估计立方体 $B_\infty(x_0, \delta)$ 和它在 Φ 下的形变 $\Phi(B_\infty(x_0, \delta))$ 的 Lebesgue 测度的关系. 我们不妨设 $\Phi'(x_0) = I$ 为单位阵，则根据 C^1 可知，对任何 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时：

$$\|\Phi'(x) - I\| < \eta \Rightarrow \|\Phi'(x)\| \leq \|I\| + \eta = \eta + 1.$$

其中 $\|\|$ 指的是矩阵的算子范数. 根据有限增量定理可知：

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\infty \leq (1 + \eta)\|x - x_0\|_\infty.$$

其中，$\|\|_\infty$ 指的是 $\mathbb{R}^d$ 上无穷范数，于是得到 Lebesgue 测度的关系：

$$m(\Phi(B(x_0, \delta))) \leq (1 + \eta)^d m(B(x_0, \delta)).$$

我们对上述可数不相交方体做改进使得每个立方体在无穷范数下的半径小于 δ，于是有：

$$m(\Phi(H-E)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(\Phi(Q_j)) \leq (1+\eta)^d \sum_{j=1} m(Q_j) \leq (1+\eta)^d \varepsilon.$$

令 $\eta \to 0, \varepsilon \to 0$ 可得 $\Phi(H-E)$ 是零测集，于是 $\Phi(E) = \Phi(H) - \Phi(H-E)$ 是可测集.

(b) 我们首先假设 E 是一个有界开集，写 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$，其中 Q_n 是几乎不相交的方体，并且每个方体的直径小于 δ，设 x_k 是 Q_k 的中心，则对于 $x \in Q_k$，使得：

$$\Phi(x) = \Phi(x_k) + \Phi'(x_k)(x - x_k) + o(\delta).$$

于是：

$$(1 - o(1))\Phi'(x_k)(Q_k - x_k) \subset \Phi(Q_k) - \Phi(x_k) \subset (1 + o(1))\Phi'(x_k)(Q_k - z_k)(\delta \to 0).$$

所以根据 Lebesgue 测度在线性变换下的相对不变性、平移不变性可知：

$$m(\Phi(E)) = \sum_k m(\Phi(Q_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} |\det \Phi'(x_k)| m(Q_k) + o(1), \quad (\delta \to 0).$$

另一方面，根据 Φ 是 C^1 映射，根据导数的连续性可知：

$$\int_E |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |\det(x)| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} |\det \Phi'(x_k)| m(Q_k) + o(1). \quad (\delta \to 0).$$

所以：

$$m(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x + o(1) \quad (\delta \to 0).$$

上式中两项均与 δ 无关，于是取 $\delta \to 0$ 即可得

$$m(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x.$$

再设 K 紧集，容易证明存在开集列 $O_1 \supset O_2 \supset \cdots \supset \cdots \supset K$，由此可知

$$m(\Phi(K)) \leq m\left(\bigcap_{n \geq 1} G_n\right) = \lim_n m(\varphi(G_n)) = \lim_n \int_{G_n} |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x = \int_K |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x.$$

对于一般情形，根据 Lebesgue 测度的正则性质可知 E 去掉一个零测集之后可以写成紧集的可数并 $\bigcup_{j=1} K_j$，设它是一个递增紧集列，因为 Φ 将零测集映为零测集，根据测度的单调极限可知：

$$m(\Phi(E)) = m\left(\bigcup_n \Phi(K_n)\right) = \lim_n m(\Phi(K_n)) = \int_{\bigcup_n K_n} |\det \Phi'(x)| \mathrm{d}x = \int_E \det |\Phi'|.$$

(3) 不妨假设 f 是非负可积函数，否则可以分别考虑 f^+ 和 f^-. 首先对特征函数 f 换元公式显然成立，对于一般的非负可积函数，f 有如下表示：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{E_k}(x).$$

其中 E_k 是可测集，$c_k > 0$ 是常数.

由 Levi 收敛定理的推论可知:

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(O)} f(y)\mathrm{d}y &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\Phi(O)} \chi_{E_k}(y)\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{O} \chi_{E_k}(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_O \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_{E_k}(\Phi(x))\right)|\det\Phi'(x)|\mathrm{d}x = \int_\Omega f(\Phi(x))|\det\Phi'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

20. (**Folland,Chap.3,Ex.13**) For $j=1,2$ let μ_j,ν_j be σ- finite measures on $(X_j,\mathcal{M}_j)$ such that $\nu_j \ll \mu_j$. Then $\nu_1\times\nu_2 \ll \mu_1\times\mu_2$ and:

$$\frac{\mathrm{d}\nu_1\times\nu_2}{\mathrm{d}\mu_1\times\mu_2}(x_1,x_2) = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

证明. 因为 ν_j,μ_j 都是 σ 有限的，而且 $\nu_j \ll \nu_j$. 所以根据 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理可知存在 $\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1} \in L^1(\mu_1)$，$\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2} \in L^1(\mu_2)$，使得对于 $E\in\mathcal{M}$，有：

$$\nu_i(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu_i}{\mathrm{d}\mu_i}\mathrm{d}\mu_i.$$

我们回忆一个引理. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{N},\nu)$ 是两个 σ 有限的测度空间，设由它们构造出的乘积测度空间为 $(X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N},\mu\times\nu)$. $f\in L^1(\mu)$，$g\in L^1(\nu)$ 是两个可积函数，则 $fg\in L^1(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$，而且：

$$\int_{X\times Y} fg\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_Y g\mathrm{d}\nu\right).$$

该引理的证明可以从特征函数出发（这是显然的），然后逐步过渡到简单函数、非负可测函数以及可积函数.

令 $\mathscr{A} = \{$有限多矩形的无交并$\}$，对一个矩形 $A\times B$，我们有：

$$(\nu_1\times\nu_2)(A\times B) = \nu_1(A)\nu_2(B) = \left(\int_A \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\mathrm{d}\mu_1\right)\left(\int_B \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\mathrm{d}\mu_2\right) = \int_{A\times B}\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2).$$

因此对于 $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 集 $F=\bigcap_k\bigcup_n A_n^{(k)}\times B_n^{(k)}$，我们有：

$$\begin{aligned}(\nu_1\times\nu_2)(F) &= \inf_k\sup_n(\nu_1\times\nu_2)(A_n^{(k)}\times B_n^{(k)}) \\ &= \inf_k\sup_n\int_{A_n^{(k)}\times B_n^{(k)}}\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2) \\ &= \int_F\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)\end{aligned}$$

对于 $(\mu_1\times\mu_2)$-零测集，因为 $\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\in L^1(\mu_1\times\mu_2)$，所以积分为零，因此该集合也是 $(\nu_1\times\nu_2)$-零测集.

因为 E 和某个 $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 集 F 相差 $(\mu_1\times\mu_2)$-零测集，所以 $(\nu_1\times\nu_2)(E) = (\nu_1\times\nu_2)(F) = \int_F\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\,\mathrm{d}(\nu_1\times\nu_2) = \int_E\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}\,\mathrm{d}(\nu_1\times\nu_2)$. 因此有：

$$\frac{\mathrm{d}\nu_1\times\nu_2}{\mathrm{d}\mu_1\times\mu_2} = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}.$$

□