

高中數學講義

Gao's Lectures on Gaokao Mathematics

(第一卷) (淮北一中实验班试用)

A stylized handwritten signature in black ink, likely belonging to the author, Gao.

July 2022

This page intentionally left blank



本作品采用
《知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议》
(<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)
进行许可

酌奇而不失其真，玩华而不坠其实。

——刘勰，《文心雕龙·辨骚》

《高中数学讲义》序言

答应给这本书做序，我义不容辞，同时又深感荣幸！

当我开始认真敲打这些文字的时候，我正坐在济南的一间会议室里，看着自己的学生自习。李昊恩也曾是他们中的一员，不过他又有些不一样，他是我的数学课代表，但不搞数学竞赛。这其中一部分原因是他更热爱化学，可能多少也与我的教学让他不那么喜欢数学有点关系。不过好在他不是那么讨厌数学，不然这本书就无从谈起了。

当我回首李昊恩同学在高中学习数学的生涯，有几点令我印象深刻，想一起分享给读者。首先，是他学习数学的方式，他是一个爱思考善思考的孩子。我的课堂上总是留有一些思考题，他总是不满足于问题的解决，而是想找到我留这个问题思考的目的。我不喜欢故弄玄虚，所以他时常让我觉得有些内容我们已心照不宣了。其次，是他的数学笔记，也是这本书的重要底本。学生的笔记大多是整理课堂内容，而他是似乎是在写文学批注，充满个人见解以及一些个性化又能加深理解的语言。我记得他对“端点效应”验证充分性时分类讨论的解释用到的两个词——“悬崖勒马”和“执迷不悟”，真难为他怎么想的。最后，是他数学学习的心态，永不满足。李昊恩同学的优秀，我在此不再做更多的赘述，读者可以去从校史馆了解。但他从不因为自己的成绩而放松，在数学学习上主动向老师同学们请教，不断吸收，最终形成个人的体系并加以运用。从我的角度来看，这些才是数学学习的正道！

事实上，这本书的大部分内容我都是熟悉的。我自己深知这份工作的艰辛，所以，当李昊恩决定要做这件事情的时候，我既欣慰又惭愧。欣慰的是，以他的水平对这东西做整理，必能让这本书的高度得到保证，书中的内容也有些真正的价值。惭愧的是，我已经工作近十年，却从没有如他一般有热情，并坚持到底。因此，我得知他们有一个编委会，就知道这件事一定能做成。更有趣的是，编委会的四位同学高中时所参与的学科竞赛正好覆盖了数、理、化、生四个学科，真正是强强联合！在此，也再次向李昊恩、周皓然、马天宇、于秉钧四位同学的辛勤付出表达我的敬意。

这本书我已经在去年见到了初稿，并在新一届的教学中使用了一段时间。说实话，对自己曾经的教学也有些反思，希望日后能不断增删，毕竟，学习一直在路上。这两天，借着外出培训的时间，我又看了一下完整稿，深感这一年在清华学习对李昊恩的影响。这本讲授高中数学的书，读起来竟是大学教材的格式，一下把我拉回到读书的时光。值得一提的是，这本书的写作使用 $\text{\LaTeX}$ 完成的，因为我使用 $\text{\LaTeX}$ 整理资料，方便为他提供一些习题。但我仅仅是入门水平，李昊恩已经可以用它完成著作了。我很荣幸拜读自己学生的大作，毕竟自己肯定是写不出这个水平的。

在他们这一届高三备考的很多日子里，李昊恩坐在办公室里我办公桌的隔壁构思行文，终于完成这本讲义。他说，这本书是他的“儿子”，希望日后他的学弟学妹们，能多多关注这个“大侄子”。开卷有益，自己定会有些收获，也让这本书茁壮成长。

最后，还是要对李昊恩同学说一句——爱徒，辛苦了！

高 雷

2022 年 8 月于济南

前言

我是淮北一中 2021 届奥赛班的一名毕业生，曾在一中度过了难忘的三年时光。其间，有幸能够领略高老师讲授的数学课。一直觉得这样精彩又独特的数学课需要有一套专门的、系统的讲义，在上高二时，突然萌生了俟毕业后将课堂笔记的内容整理成讲义的想法，希望留作纪念，更希望对以后老师的教学以及同学们的学习提供一点方便。2020 年冬天我通过参加化学竞赛决赛获得了保送资格，一下子有了大把空闲的时间，向高老师说明我的想法后，他希望我能尽快将讲义整理完毕，当时我不假思索地答应下来。但事实与理想状况总有差距，开始修改课堂笔记时我遇到了很多困难，首先我的很多课堂笔记都已散佚，其次，用于给自己备忘的课堂笔记和一个可以称做讲义的稿子完全不是一回事，由于那时候的自己对这本讲义的内容和样式尚没有清晰的规划，尝试写了一些却总不能满意，只好暂时放下，这样一拖再拖到了 2021 年六月毕业季（本书封面上的 Euler 公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 就是当时高老师题写的毕业寄语），总算有了初步的规划，于是着手编写这份讲义，撰写书稿、编辑、排版、审稿同步进行，经过近一整年的努力，讲义终于编成了。

本书的主体内容是基于新教材的知识覆盖范围，同时也结合了现行高考的要求。在内容上，除包含了教材的全部基本内容外，这份讲义的特别之处在于加入了许多对重要概念的理解，并且一旦必要且有益，我们都会做适当的补充。高中数学对包括笔者在内的一部分同学而言往往是相对难学的，因此本书希望对每一个概念和问题都进行细致和认真的分析，通过这些分析使读者能够准确把握住这些要点，从而使得自己也具有分析问题和解决问题的能力。

全书分为十二章，包括集合，基本初等函数（含三角函数），平面向量与复数，数列，立体几何，解析几何，导数和概率统计等若干大模块。每一个小节都加入了相当数量的典型问题作为例题，并逐一作了分析和解答，不是简单地向读者提供问题的答案，而是提供了笔者思考这些问题的方式和完整的过程。讲义中的大部分内容和问题来自课堂笔记，即高老师在课堂上讲授过的内容和分析过的问题，在此基础上加入了笔者的部分理解。在每一节后配有一定数量的习题，这些习题绝大部分选自近年来高中数学联赛的预赛试题，最初是由高老师整理出来，供数学竞赛的同学备考高中数学联赛一试和奥赛班同学在高考一轮复习期间使用的，在此对他致以诚挚的敬意和感谢！也正因如此，部分习题可能难度较大、技巧性较强，更适于作为巩固练习，而不建议选用这些问题代替日常的作业。

在此，我想向参与编写本书的所有同学表示感谢。本书的第六章和第十二章初稿由马天宇同学完成，第十章的部分初稿由秉钧同学完成，第十一章的部分初稿由周皓然同学完成。这些同学在高中时的数学成绩便名列前茅，而且都对高中数学有扎实的掌握程度以及很多独到的见解，感谢你们为这本讲义付出了自己的智慧！另外还要特别感谢周皓然、王春晖、朱浩宇和孙文辉等同学帮助我整理了大部分的习题答案，没有他们的付出，这本书很难顺利完成。在初稿的基础上，我们进行了交

又审稿，并结合了高老师的想法进行了修改，感谢高老师一直以来对本书编写工作的关心，并感谢他特地拨冗为本书撰写序言。

由于本书的准备时间比较仓促，对很多内容，尤其是解析几何和导数中的一些处理问题的思想介绍较少，有待于在以后的继续修订中加以改进。另外，由于笔者的水平有限，难免有很多疏漏和不当之处，敬请各位读者批评指正。我的电子邮箱是 lhe21@mails.tsinghua.edu.cn，欢迎随时来信与我讨论！另外，如果读者有我的微信、QQ 等联系方式，也欢迎通过它们和我聊。对于任何有益的建议和意见，这里都会有清华的小纪念品聊表心意。

另外要特别感谢养育、陪伴了我十九个年头的父母。本书完成的大部分阶段我都负笈于北京，不似高中时期的朝夕相伴，这才想起他们在我生活、求学时对我无微不至的体贴和无条件的支持，是他们无私的关爱使得这本讲义充盈着温暖的底色，这本讲义献给你们！

本书杀青之际，听闻母校即将乔迁，不禁倍感欣喜和艳羡。新校区有了更新、更好的环境以及更加优越的条件，希望一代代一中学子能够再接再厉，争创更加精彩的成绩，不负好时光！希望母校的发展越来越好！

最后，感谢教导过我的所有老师，感谢所有帮助过我的人，谢谢你们！

李昊恩

2021 年 12 月于清华园

(2022 年 7 月略作修改)

目录

第一章 集合与简易逻辑用语	1
1.1 集合	1
1.1.1 集合的概念与表示法	1
1.1.2 包含关系, 子集	2
1.1.3 集合的运算与容斥原理	4
习题 1.1	7
1.2 简易逻辑用语	11
1.2.1 命题与逻辑联结词	11
1.2.2 量词	13
1.2.3 充分条件和必要条件	15
第二章 基本初等函数 I	17
2.1 映射与函数	18
2.1.1 映射, 单射, 满射和一一映射	18
2.1.2 函数	19
2.1.3 函数的对称、平移、伸缩和翻折变换	23
习题 2.1	25
2.2 函数的单调性, 奇偶性与周期性	26
2.2.1 单调性	26
2.2.2 奇偶性与对称性	29
2.2.3 周期性	31
2.2.4 抽象函数的性质	33
习题 2.2	35
2.3 二次函数与二次方程	37
2.3.1 二次函数的图像与性质	37
2.3.2 函数的界与最值, 二次函数的闭区间最值问题	38
2.3.3 二次方程根的分布	41
2.3.4 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$	43
2.3.5 二次函数绝对值区间最值, 平口单峰函数	46

习题 2.3	48
2.4 幂函数, 指数函数和对数函数	49
2.4.1 幂函数	50
2.4.2 指数函数	50
2.4.3 对数与对数函数	55
2.4.4 反函数, 逆映射存在的充要条件	63
2.4.5 指对幂增长的比较	65
习题 2.4	65
第三章 基本初等函数 II	69
3.1 三角函数	69
3.1.1 任意角与弧度制	69
3.1.2 三角函数概念与单位圆的三角函数线, 诱导公式	73
3.1.3 正、余弦函数的图像和性质	77
3.1.4 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质	83
3.1.5 正切函数的图像和性质	89
习题 3.1	91
3.2 三角恒等变形	92
3.2.1 同角三角函数的基本关系	92
3.2.2 两角和与差的三角函数, 辅助角公式	94
3.2.3 倍角, 半角的三角函数, 和积互化	100
习题 3.2	106
第四章 平面向量与复数	111
4.1 平面向量	111
4.1.1 向量的加减与数乘向量	111
4.1.2 平面向量基本定理与向量的坐标表示	114
4.1.3 向量的数量积, 模与夹角, 平面向量数量积的应用	123
4.1.4 三角不等式和柯西不等式	130
习题 4.1	132
4.2 复数	137
4.2.1 数系的扩充, 复数的模与共轭	137
4.2.2 复数的运算	139
4.2.3 复数的三角表示	142
习题 4.2	146
第五章 解三角形	149
5.1 正弦定理和余弦定理的应用	149

习题 5.1	156
5.2 解三角形的综合应用	156
5.2.1 求三角形的面积	157
5.2.2 解母子三角形	160
习题 5.2	163
第六章 不等式	169
6.1 不等式的基本性质	169
6.2 基本不等式	173
6.3 柯西不等式	176
6.4 不等式的证明及多元不等式	177
6.5 绝对值不等式与含绝对值的函数	179
6.6 第 6 章综合习题	180
第七章 数列	187
7.1 数列的概念及表示法	187
7.2 等差数列和等比数列	190
7.2.1 等差数列	190
7.2.2 等比数列	199
习题 7.2	204
7.3 求数列的通项公式	207
7.3.1 累加法和累乘法	207
7.3.2 S_n 法	209
7.3.3 一阶常系数线性递推数列	211
7.3.4 二阶常系数线性递推数列	215
7.3.5 不动点在求数列通项公式中的应用	218
习题 7.3	221
7.4 数列求和	224
习题 7.4	228
7.5 数学归纳法与数列不等式的证明	233
习题 7.5	240
第八章 附录	243
8.1 习题参考答案	243

第一章 集合与简易逻辑用语

集合以及元素的属于关系是高中数学的基础. 在这一讲中, 我们将用尽可能简洁的语言来描述它的相关内涵和外延, 以保留这些概念朴素、直观、自然的特性. 以这些概念为基础, 我们还会介绍一些与高考相关的小专题.

God is in the details.

1.1

集合

1.1.1 集合的概念与表示法

指定的互不相同对象的无序总体称为**集合**, 这是集合的一般概念. 常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 来标记集合. 集合中的对象称为**元素**. 在数学上我们关注的对象是数, 集合中的元素是数的集合称为**数集**. 一般我们讨论的集合专指数集.

由集合的概念我们立刻知道集合中的元素有如下性质:

- 1° 确定性: 作为集合中的元素必须是确定的, 不能确定或没有事先指定的对象不能构成集合. 也就是说给定一个集合, 任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.
- 2° 互异性: 集合中的任何两个元素都必须是不同的对象. 相同的两个对象归入同一集合时, 只能算作一个元素.
- 3° 无序性: 集合中的元素之间没有先后顺序之分.

元素与集合的关系分为**属于**和**不属于**两种. 如果对象 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$. 否则, 如果对象 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$.

另外指出: 集合中的元素个数也是不规定的, 可以没有, 可以有有限个, 也可以有无限个. 集合 A 中元素的个数称为集合 A 的**势**, 记作 $|A|$ 或 $\text{card}(A)$. 特别地, 若 $|A| = 0$, 则集合 A 为**空集**, 记作 $\emptyset$. 若 $|A| \in \mathbb{N}_+$ (其中 $\mathbb{N}_+$ 表示所有正整数组成的集合, 称为**正整数集**), 则称集合 $|A|$ 为**有限集**. 若 $|A| = +\infty$, 则集合 A 为**无限集**.

集合的表示法有: 列举法、描述法. 下面举例介绍这些方法:

例 1.1. 列举法：将集合中的元素一一列举出来，元素之间用逗号隔开，并写在大括号内的方法. 其一般形式为 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. 列举法只适合表示元素个数较少的有限集，同时提醒初学者注意：集合中元素无顺序且不能重复.

例如由小于 8 的所有质数组成的集合可以表示成 $\{2, 3, 5, 7\}$.

描述法：用集合中的一个代表元素 x 加上集合中的元素应当满足的确定条件 $p(x)$ 表示某些对象属于一个集合，并写在大括号内的方法. 其一般形式为 $\{x|p(x)\}$ ，有时也用 $\{x \in I|p(x)\}$. 描述法的优势在于简洁、概括.

例如所有小于 3 的整数组成的集合可以表示成 $\{x|x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$ (其中 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数组成的集合，称为整数集). 所有非负奇数组成的集合可以表示成 $\{x|x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}_+\}$.

评注 1.1.1. 通过本例题，我们了解了表示集合的两个常用方法. 尤其希望读者能够体会到使用描述法的优势和重要性，并能够做到理解和熟练应用.

本小节最后，我们介绍常用的数集和记法，如下表所示：

表 1.1: 常用的数集和记法

数集	含义	记号
自然数集	所有自然数组成的集合	$\mathbb{N}$
正整数集	所有正整数组成的集合	$\mathbb{N}_+$ 或 $\mathbb{N}^*$
整数集	全体整数组成的集合	$\mathbb{Z}$
有理数集	全体有理数组成的集合	$\mathbb{Q}$
正有理数集	所有正有理数组成的集合	$\mathbb{Q}^+$
实数集	全体实数组成的集合	$\mathbb{R}$
正实数集	所有正实数组成的集合	$\mathbb{R}^+$
复数集	全体复数组成的集合	$\mathbb{C}$

例 1.2. 若集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 中只有一个元素，则 $a =$ ()

- (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) 0或4

解. 根据集合中元素的互异性，集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 中只有一个元素等价于关于 x 的方程 $ax^2 + ax + 1 = 0$ 有唯一解. 当 $a = 0$ 时，方程无解，不符合题意，当 $a \neq 0$ 时原方程关于 x 为二次方程，等价于 $\Delta = a^2 - 4a = 0$ ，解得 $a = 4$ 或 0 (舍去). 故选择 A 项. ♡

1.1.2 包含关系，子集

在这一小节中，我们讨论集合概念的外延：集合与集合的关系以及子集的概念.

观察 设 A 和 B 是两个集合，表示集合之间关系的图示称为文氏图 (Venn diagram)，如图1.1所示.

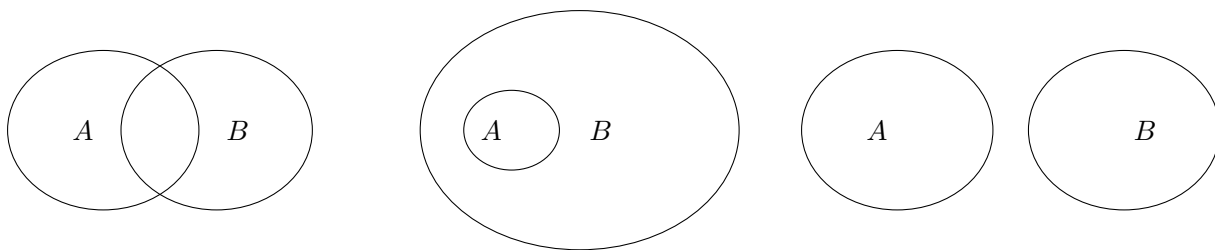


图 1.1: Venn 图

我们称 A **包含于** B , 如果 A 中的所有元素都是 B 中的元素, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 即 $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对 $\forall a \in A$, 必有 $a \in B$. 这时, 我们说 A 是 B 的**子集**. 如图1.1所示, 左边和右边的情况表示 A 不是 B 的子集, 中间的情况表示 A 是 B 的子集.

特别地, 如果 A 中的所有元素都是 B 中的元素, 与此同时, B 中的所有元素也是 A 中的元素, 我们就说集合 A 和集合 B 相等. 这是**集合相等**的的一般定义. 这一定义与两集合的元素完全相同是等价的, 这是一件很自然的事情.

另一方面, 从子集的角度理解, $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 故集合相等是子集的一种特殊情况.

例 1.3. 试用 Venn 图表示 $A = B$.

这个例题留给读者自己完成.

观察 我们回过头来看图1.1中间的情况, 我们已经知道它对应着 $A \subseteq B$. 你在例1.3中画的 Venn 图表示 $A = B$, 当然也表示 $A \subseteq B$. 这两者有何不同?

若集合 A, B 满足 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A **真包含于** B , 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$. 这时, 我们称 A 是 B 的**真子集**.

我们特别规定: 空集是任意集合的子集; 空集是任意非空集合的真子集. 即 $\forall A, \emptyset \subseteq A$; $\forall A \neq \emptyset, \emptyset \subsetneq A$.

例 1.4. 集合 $A = \{0\}$, 集合 $B = \{\emptyset\}$. 则 $0 \in A$, $\emptyset \subsetneq A$, $\emptyset \in B$, $\emptyset \subsetneq B$.

评注 1.4.1. 这个比较无聊的例题是为了澄清一些概念: 空集 $\emptyset$ 和只由空集组成的单元素集合 $\{\emptyset\}$ 是完全不同的概念; 同时要注意区分包含, 真包含和属于这三个概念, 前两个概念用来描述的是集合与集合的关系, 而包含关系描述的则是元素与集合的关系.

包含关系具有如下的重要性质:

1° 传递性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

2° 自反性: 对于 $\forall$ 集合 A , $A \subseteq A$.

3° 反对称性: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

4° 设有条件 $p(x)$, 条件 $q(x)$, 集合 $A = \{x|p(x)\}$, 集合 $B = \{x|q(x)\}$. 则 $A \subseteq B \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.

这条性质说明, 集合 A 包含于集合 B 与条件 p 是条件 q 的充分条件相互等价.

5° 若 $|A| = n \in \mathbb{N}_+$, 则 A 有 2^n 个子集, $2^n - 1$ 个非空子集, $2^n - 1$ 个真子集, $2^n - 2$ 个非空真子集.

证明. 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 考虑 A 的子集 B , 对于任意一个 a_i , 都有 $a_i \in B$ 和 $a_i \notin B$ 两种情况, 因此 A 不同的子集共有 $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ 个}} = 2^n$ 个, 进一步地, 考虑到 A 的子集中包括 A 自身和空集 $\emptyset$, 故 A 有 $2^n - 1$ 个非空子集, $2^n - 1$ 个真子集, $2^n - 2$ 个非空真子集. $\square$

例 1.5. 集合 $A = \{n | n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{n | n = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$. 证明 $A = B$.

证明. 先证明 $A \subseteq B$. 对于 $\forall n = 3k + 1 \in A$, $n = 3(k + 1) - 2$. 因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k + 1 \in \mathbb{Z}$, 所以 $n \in B$, 根据包含关系的定义, $A \subseteq B$.

再证明 $B \subseteq A$. 对于 $\forall n = 3k - 2 \in B$, $n = 3(k - 1) + 1$. 因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k - 1 \in \mathbb{Z}$, 所以 $n \in A$, 根据包含关系的定义, $B \subseteq A$.

综合以上, 根据集合相等的定义, $A = B$. $\square$

1.1.3 集合的运算与容斥原理

在这一小节中, 我们讨论集合概念的另一外延: 集合的运算.

定义集合的交运算如下: 一般地, 由属于 A 的元素且属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

交集用文氏图表示如下:

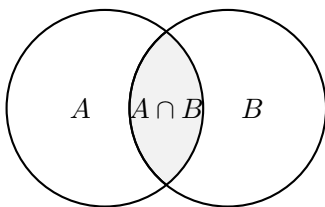


图 1.2: 交集

根据定义, 结合交集的意义, 我们知道交集有如下基本性质:

对于任意的两个集合 A, B , $A \cap B$ 总有意义, 且有:

1° $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$;

这条性质阐述了交集的意义: $A \cap B$ 集合 A 和 B 的所有公共元素所组成的集合, 因此 $A \cap B$ 既包含于 A , 也包含于 B . 特别地, 如果 A 和 B 没有公共元素, 则 $A \cap B = \emptyset$, 而不能说 A 和 B 没有交集.

2° $A \cap A = A$;

3° $A \cap \emptyset = \emptyset$;

4° 交换律与结合律: $A \cap B = B \cap A, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

根据定义 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 很容易证明交运算具有交换律和结合律.

5° 若 $A \subseteq B$ (A 是 B 的子集), 则 $A \cap B = A$, 反之若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$ (A 是 B 的子集). 特别地, 如果 $A = B$, 则 $A \cap B = A = B$, 反之也成立.

这条性质提供了包含关系和交运算的一个等价关系, 我们今后会经常用到这个等价的转化. 读者可以试着用文氏图表示这条性质, 从而在直观上理解这条性质的含义.

与交运算对偶的运算是并运算, 仿照前者, 定义集合的并运算如下: 一般地, 由属于 A 的元素或属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

并集用文氏图表示如下:

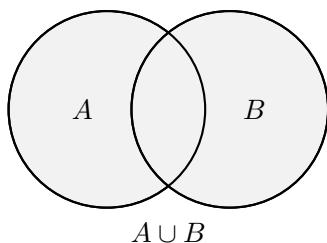


图 1.3: 并集

根据定义, 结合并集的意义, 我们知道并集有如下基本性质:

对于任意的两个集合 A, B , $A \cup B$ 总有意义, 且有:

1° $A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B)$;

2° $A \cup A = A$;

3° $A \cup \emptyset = A$;

4° 交换律与结合律: $A \cup B = B \cup A, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

5° 若 $A \subseteq B$ (A 是 B 的子集), 则 $A \cup B = B$, 反之若 $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$ (A 是 B 的子集). 特别地, 如果 $A = B$, 则 $A \cup B = A = B$, 反之也成立.

这条性质提供了包含关系和并运算的一个等价关系, 我们今后会经常用到这个等价的转化. 读者同样可以试着用文氏图从直观上表示这条性质.

例 1.6. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + x + a = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的范围.

解. $A \cup B = A \xLeftrightarrow{\text{性质 5}} B \subseteq A$.

解关于 x 的二次方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 2$, 因此 $A = \{-1, 2\}$.

若 $B = \emptyset$, 则关于 x 的二次方程 $x^2 + x + a = 0$ 没有实数解, 故 $\Delta = 1 - 4a < 0$, 解得 $a > \frac{1}{4}$.

若 $B \neq \emptyset$, 则 $-1 \in B$ 或 $2 \in B$. 若 $-1 \in B$, 则 $a = 0$, 此时 $B = \{-1, 0\}$, $B \not\subseteq A$, 不符合题意; 若 $2 \in B$, 则 $a = -6$, 此时 $B = \{2, -3\}$, $B \not\subseteq A$, 不符合题意.

综上, a 的范围是 $\{a | a > \frac{1}{4}\}$.

♡

评注 1.6.1. 本例题考查了性质 5 的等价转化的一个应用, 同时意在提醒读者注意 $B \subseteq A$ 也包括 $B = \emptyset$ 的情况, 且在解题时这种情况通常需要单独分类出来进行讨论, 初学者常常漏掉这种情况! 另外在本题求参数范围的过程中, 我们的转化并不等价, 因此得到结果后要进行检验, 否则会出现增根导致出错.

本题也可以采用其他的分类标准, 例如按照 B 中的元素个数进行分类讨论. 分类讨论的标准往往不唯一, 但是必须遵循不重复不遗漏的原则, 对于那些过于繁复的分类标准也不宜采用.

在研究某些集合时, 这些集合往往都是某个给定集合的子集, 我们将这个给定的集合称为**全集**, 常用符号 U 来表示. 全集含有我们所要研究的这些集合的全部元素. 例如: 如果我们研究的对象是实数, 那么我们讨论到的所有数集都是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集; 如果我们研究的对象仅限于自然数, 那么就可以取 $\mathbb{N}$ 为全集.

定义集合的补运算如下: 设 U 为全集, A 是 U 的一个子集, 则 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 U 中**子集 A 的补集**, 记作 $\complement_U A$. 即:

$$\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

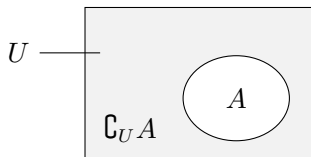


图 1.4: 补集

根据定义, 结合补集的意义, 我们知道补集有如下基本性质:
对于全集 U , 以及任意一个子集 A , 有:

$$1^\circ A \cup \complement_U A = U, A \cap \complement_U A = \emptyset;$$

$$2^\circ \text{ 补运算具有对称性, } A \text{ 与 } \complement_U A \text{ 互为补集, 即 } \complement_U(\complement_U A) = A. \text{ 特别地, } \complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset.$$

例 1.7. 全集 $U = \{x | x \leq 4\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, 求 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$, $A \cap (\complement_U B)$.

解. 如图1.5所示, $\complement_U A = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}$, $\complement_U B = \{x | x < -3 \text{ 或 } 2 < x \leq 4\}$.

$$\text{因此 } A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\}, (\complement_U A) \cup B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}, A \cap (\complement_U B) = \{x | 2 < x < 3\}.$$

♡

评注 1.7.1. 用数轴来表示通过不等式给出的集合, 往往会使集合的运算更加直观.

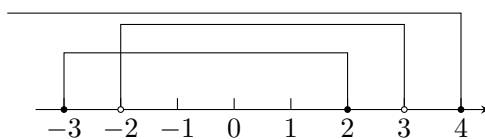


图 1.5:

交、并、补这三种运算是集合的基本运算，为了简化交、并、补的综合运算，我们讨论如下的常用的运算律：

1° (交运算对并运算的分配律，并运算对交运算的分配律)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2° (Morgan 律)

$$\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B); \complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$

Morgan 律是两条对偶的性质，可以记忆为“并之补 = 补之交，交之补 = 补之并”。

例 1.8. 50 名学生参与甲、乙两项体育活动，每人至少参加一项，参加甲项的学生有 30 名，参加乙项的学生有 25 名，则仅参加了一项活动的学生人数为_____。

解. 设集合 A, B 分别表示参加甲、乙两项活动的学生的集合，则 $|A| = 30, |B| = 25, |A \cup B| = 50$ ，因为 A 与 B 的交集是由两项活动均参加的学生组成的，因此仅参加了一项活动的学生人数为 $50 - |A \cap B|$ 。如何计算 $|A \cap B|$ 呢？

观察 观察文氏图 1.2 或 1.3，由于 $A \cap B$ 中的元素在 $|A|$ 和 $|B|$ 中均计数一次，因此在 $|A| + |B|$ 中计数两次；而在 $|A \cup B|$ 中 $A \cap B$ 中的元素只能计数一次，从而 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。特别地，如果 $A \cap B = \emptyset$ ，那么 $|A| + |B| = |A \cup B|$ 。

同理可得对于三个有限集合 A, B, C ，有 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ ，读者可以尝试自己画出文氏图推出上述公式。

该结论可以推广到 n 元的情况：

定理 1.1.1 (容斥原理). 对于 n 个有限集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ， $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ 有如下交替和的形式（每一项所带的符号按正负交替出现）：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

以上公式就是**容斥原理**。

回到本题， $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 30 + 25 - 50 = 5$ ，故仅参加了一项活动的学生人数为 45. ♡

习题 1.1

1. 设数集 M 满足：① M 中不含元素 $1, 0, -1$ ，② 若 $a \in M$ ，则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ 。则 $|M| =$ _____。

2. 集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$, 集合 $B = \{2x | x \in A\}$, 集合 $C = \{x | 2x \in A\}$, 则 $|B \cap C| =$ _____.

3. 若集合 $\{a, b, c, d\} = \{2, 0, 1, 8\}$, 且下面四个命题:

(1) $a = 2$;

(2) $b \neq 2$;

(3) $c = 0$;

(4) $d \neq 8$.

有且仅有一个是正确的, 则符合条件的有序数组 (a, b, c, d) 的个数为_____.

4. 某个含有三个实数的集合既可表示为 $\{b, \frac{b}{a}, 0\}$, 也可以表示为 $\{a, a+b, 1\}$, 则 $a^{2018} + b^{2018}$ 的值为_____.

5. 下列命题正确的有_____个.

(1) 很小的实数可以构成集合;

(2) 集合 $\{y | y = x^2 - 1\}$ 与集合 $\{(x, y) | y = x^2 - 1\}$ 是同一个集合;

(3) $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素;

(4) 集合 $\{(x, y) | xy \leq 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 是指第二和第四象限内的点集.

6. 已知 $yz \neq 0$, 且集合 $\{2x, 3z, xy\}$ 也可以表示为 $\{y, 2x^2, 3xz\}$, 则 $x =$ _____.

7. 设 $M = \{a | a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 9 _____ M , 则 10 _____ M .

8. 已知集合 $A = \{x | x = m^2 - n^2, m, n \in \mathbf{Z}\}$

(1) 求证: $2k + 1 \in A (k \in \mathbf{Z})$;

(2) 判断 $4k - 2 (k \in \mathbf{Z})$ 是否属于 A .

(3) 试求 A 中第 2017 个正整数 (从小到大数).

9. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, 若集合 $C = \{x | x = a + b, a \in A, b \in B\}$, 则集合 C 中元素的个数是_____.

10. 设集合 $\{\frac{3}{a} + b | 1 \leq a \leq b \leq 2\}$ 中的最大元素和最小元素分别为 M, m , 则 $M - m$ 的值为_____.

11. 已知元素为实数的集合 S 满足下列条件: 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$. 若 $2 \in S$, 则集合 S 中至少有_____个元素.

12. 设集合 $A = \{2, 0, 1, 3\}$, 集合 $B = \{-x \in A | 2 - x^2 \notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为_____.

13. 集合 $A = \{2, 0, 1, 4\}$, $B = \{k | k \in \mathbf{R}, k^2 - 2 \in A, k - 2 \notin A\}$. 则集合 B 的所有元素之积为_____.

14. 设集合 $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{-x | x \in A \text{ 且 } 2 - x \notin A\}$. 则 $B =$ _____.

15. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.
16. 已知 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是正整数, 任取四个数后求和得到的数组成的集合为 $\{44, 45, 46, 47\}$. 则这五个数为_____.
17. 从五个正整数 a, b, c, d, e 中任取四个求和, 得到的和值构成集合 $\{44, 45, 46, 47\}$, 则 $a + b + c + d + e =$ _____.
18. 设集合 $X = \{1, 2, \dots, 2017\}$, 集合 $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in X, \text{且三条件 } x < y < z, y < z < x, z < x < y \text{ 恰有一个成立}\}$. 若 $(x, y, z) \in S$, 且 $(z, w, x) \in S$, 则 (y, z, w) _____ $S, (x, y, w)$ _____ S .
19. 设集合 $S = \{y | y = \sum_{k=1}^{1008} x_{2k-1}x_{2k}, x_i \in \{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}, i = 1, 2, \dots, 2016\}$, 则 S 中有_____ 个整数元素.
20. 将集合 $\{1, 2, \dots, 19\}$ 中每两个互异的数作乘积, 所有这种乘积的和为_____.
21. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 4 个有理数, 使得 $\{a_i a_j | 1 \leq i < j \leq 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$, 求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值.
22. 集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, \text{其中 } m, n, l \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{u | u = 20p + 16q + 12r, \text{其中 } p, q, r \in \mathbf{Z}\}$ 的关系为_____.
23. 设 $A = [-2, 4]$, $B = \{x | x^2 - ax - 4 \leq 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为_____.
24. 已知非空集合 $A = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 m 的取值范围是_____.
25. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x | \frac{1}{x-3} < a\}$. 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围为_____.
26. 已知集合 $A = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) | 2|x-1| + |y-1| \leq a\}$, $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
27. 已知 $a \geq -2$, 且 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{t | t = x^2, x \in A\}$, 若 $C \subseteq B$, 则 a 的取值范围是_____.
28. 集合 $P = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $M = \{x | mx - 1 = 0\}$, 且 $M \subseteq P$, 则满足条件的实数 m 组成的集合为_____.
29. 已知 a 为给定的实数, 那么集合 $M = \{x | x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集的个数为_____.
30. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, 则是集合 U 的子集但不是集合 A 的子集, 也不是集合 B 的子集的集合个数为_____.
31. 集合 $\{1, 2, \dots, 2016\}$ 的元素和为奇数的非空子集的个数为_____.

32. 设集合 $M = \{1, 2, \dots, 1000\}$, 现对 M 中的任一非空子集 X , 令 α_X 表示 X 中最大数与最小数的和. 那么, 所有这样的 α_X 的算术平均值为_____.
33. 集合 A 是由 $\{1, 2, \dots, 50\}$ 中的 40 个元素组成的子集, S 为集合 A 中的所有元素之和. 则 S 的取值个数为_____.
34. 已知集合 $M = \{1, 99, -1, 0, 25, -36, -91, 19, -2, 11\}$, 记集合 M 的所有非空子集为 M_i , $i = 1, 2, \dots, 1023$, 每一个 M_i 中所有元素之积为 m_i , 则 $\sum_{i=1}^{1023} m_i =$ _____.
35. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$, 对于集合 A 的每一个非空子集的所有元素, 计算它们乘积的倒数, 则所有这些倒数的和为_____.
36. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 101\}$, 集合 $B \subseteq A$, 且集合 B 中的最小元素是偶数.
- (1) 若集合中 B 的最小元素是 2, 最大元素是 13, 求满足条件的集合 B 的个数;
- (2) 求所有满足条件的集合 B 中的最大元素之和.
37. 若实数集合 $A = \{31x, 65y\}$ 与 $B = \{5xy, 403\}$ 仅有一个公共元素, 则集合 $A \cup B$ 中所有元素之积的值是_____.
38. 设集合 $M = \{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$, $N = \{x | x^2 \leq x\}$. 则 $M \cap N =$ _____.
39. 已知集合 $A = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$, 集合 $B = \{y | y = x^2, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
40. 设集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$, $B = \{2x | x \in A\}$, $C = \{x | 2x \in A\}$, 则 $B \cap C$ 的元素个数为_____.
41. 设集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{y | y = 3x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
42. 已知集合 $A = \{x | 5x - a \leq 0\}$, $B = \{x | 6x - b > 0\}$, $a, b \in \mathbf{N}$, 且 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{2, 3, 4\}$, 则整数对 (a, b) 的个数为_____.
43. 已知集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) | |xy| + 1 = |x| + |y|\}$ 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则 a 的值为_____.
44. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + a^2y + 6 = 0\}$, 集合 $B = \{(x, y) | (a - 2)x + 3ay + 2a = 0\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的值是_____.
45. 已知 $M = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 = 3\}$, $N = \{(x, y) | y = mx + b\}$. 若对所有 $m \in \mathbf{R}$, 均有 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 b 的取值范围是_____.
46. 如果集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, C 是 A 的子集, 且 $C \cap B \neq \emptyset$, 则这样的子集 C 有_____个.
47. 若非空集合 $A = \{x | 2a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是_____.

48. 已知集合 $A = \{x|x^2 + 2x - 8 > 0\}$, $B = \{x|x^2 - 2ax - 4 \leq 0\}$. 若 $a > 0$, 且 $A \cap B$ 中恰有 1 个整数, 则 a 的取值范围为_____.
49. 设集合 $A = \{x|x^2 - [x] = 2\}$, $B = \{x|-2 < x < 2\}$, 其中符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 则 $A \cap B =$ _____.
50. 设集合 $A = \{n|\frac{n}{3} \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{y|y = x + 4 + \sqrt{5 - x^2}\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为_____.
51. 设 $a_n = 2^n$, $b_n = 5n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{2015}\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_{a_{2015}}\}$, 则集合 S 中的元素的个数为_____.
52. 已知集合 $P = \{1, |a|\}$, $Q = \{2, b^2\}$ 为全集 $U = \{1, 2, 3, a^2 + b^2 + a + b\}$ 的子集, 且 $\complement_U\{P \cup Q\} = \{6\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
53. 设集合 $A = \{x|x^2 + 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$.
- (1) 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x|-1 < x \leq 2\}$, $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$, 求 a, b 的值;
 - (2) 若 $b = 1$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.
54. 对于任何集合 S , 用 $|S|$ 表示集合 S 中的元素个数, 用 $n(S)$ 表示集合 S 的子集个数. 若 A, B, C 是三个有限集, 且满足条件:
- (1) $|A| = |B| = 2016$;
 - (2) $n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C)$.
- 则 $|A \cap B \cap C|$ 的最大值是_____.

1.2

简易逻辑用语

在数学著作或者文献中, 通常不只包括普通的语言, 而是还有一套专用于叙述理论的符号语言. 为此, 我们在这里介绍通用的数学逻辑符号 $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$, 它们分别表示联结词“非”, “且”, “或”, “蕴含、推出”, “等价、互推、当且仅当”, 还有 $\forall, \exists$, 它们分别表示量词“对任意”(“for all”, “for arbitrary”, “for any”) 和“存在”(“there exists...”).

下面我们将用刚刚引入的集合的语言来阐述以上逻辑用语的基本含义.

1.2.1 命题与逻辑联结词

我们将可以判断真假(称为真值)的陈述语句称为命题. 在数学中, 通常还可以借助符号和式子表达. 例如“ $1 + 1 = 2$ ”, “ $\sqrt{4} > 1$ ”等都是命题.

我们遇到的命题中绝大部分都可以叙述为“若 p , 则 q ”, 或者“如果 p , 那么 q ”的形式. 我们将叙述为这种形式的命题叫做假言命题或者复合命题, 反之, 则称为直言命题. 例如 $1 + 1 = 2$ 是一个直言命题, “复数的平方是正数”也是一个直言命题. 其中, 后面一个命题也可以叙述为: “若 $x < 0$, 则 $x^2 > 0$ ”, 这样它就转化成一个假言命题了.

我们经常使用符号 $\implies$. 例如命题“如果 p , 那么 q 为真”意思是 p 蕴含 q 或者 p 可以通过推理得出结论 q , 我们将此事记为 $p \implies q$, 它表示“ p 推出 q ”, 或者“ p 蕴含 q ”, 等等.

对于假言命题, 我们可以讨论其否命题、逆命题和逆否命题. 对于命题 A : 若 p , 则 q :

- 逆命题: 若 q , 则 p ; 或者 $q \Rightarrow p$.
- 我们对一个命题 p 进行否定, 将会得到一个新的命题 $\neg p$, 注意, 我们在形式逻辑中只处理“真、假”两种情况 (称为真值), 也就是说我们要使用排中律:

排中律. 对任一命题 p , 要么 p 真, 要么 $\neg p$ 真, 没有其他状态.

- 否命题: 若非 p , 则非 q ; 或者 $\neg p \Rightarrow \neg q$.
- 逆否命题: 若非 q , 则非 p ; 或者 $\neg q \Rightarrow \neg p$.

逆命题和否命题的真值通常和原命题是无关的, 但是, 逆否命题的真值和原命题的真值必然相同. 这一点我们可以用排中律和反证法来说明:

根据排中律, 我们有 $\neg(\neg p) = p$. 以及“非假 = 真”, 这常用于反证法论证中: 从假设 p 不真出发推出 p 真, 从而与排中律不符, 因此只能是 p 真.

利用反证法和排中律可得:

$$(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg q \implies \neg p)$$

即, 逆否命题和原命题真值相等.

证明. 假设“ $p \implies q$ ”成立, 来证明“ $\neg q \implies \neg p$ ”成立. 反证法: 假设“ $\neg q \implies \neg p$ ”不成立, 这等于说是虽然 q 假但是 p 不假, 也就是 (根据排中律), q 假但是 p 真, 然而根据假设可知 p 真蕴含着 q 真, 此时 q 真和 q 假同时发生了, 这和排中律矛盾, 所以必然是 p 假, 这就证明了 $\neg q$ 能够给出 $\neg p$.

反过来假设“ $\neg q \implies \neg p$ ”成立去证明“ $p \implies q$ ”的方法完全相同, 留给读者完成. $\square$

注. 关于假言命题“若 p , 则 q ”或“ $p \Rightarrow q$ ”成立与否的问题.

我们知道, 若 p 真且“ $p \Rightarrow q$ ”真, 则 q 也真, 由此:

(1) 若 p 真且 q 假, 则“ $p \Rightarrow q$ ”就是不成立的.

然而对于 p, q 的其他三种情况, 我们都规定“ $p \Rightarrow q$ ”成立, 也就是:

(2) 若 p 真且 q 真, 则“ $p \Rightarrow q$ ”成立; (3) 若 p 假, 则“ $p \Rightarrow q$ ”都认为是成立的, 不论 q 的真假.

对此可以这样解释: 按照我们的思维习惯, 假言命题本身包含了假设, 也就是说其前提条件“如果”实际上可能不发生, 在 (2) 中, 既然已经有 p 和 q 都是真的, 即 p 和 q 之间可能存在蕴含关系, 只不过我们或许无法证明, 因而做了规定 (2).

而对于 (3)(4), 因为根本没有 p (也就是说, 实际上 p 就是假的), 所以它和假言命题“若 p 则 q ”没有矛盾, 既然没有矛盾, 不妨假设它成立. 我们可以理解成: 假的前提可以导出任何结论, 只不过它完全无法保证该结论本身的真假. 因此如果我们用不真实、不正确的前提做推理, 那么这时 $p \Rightarrow q$ 于推理而言是无效的, 例如:

(1)($1 < 0$) $\Rightarrow$ (我是清华大学化学系的一名学生). (2)(我没有开挂(这是谎话)) $\Rightarrow$ (你诬陷我).

在这两个例子中前提 p 都是假的, 因此 p 愿意导出什么结论任由它去.

例 1.9. 给定原命题 A , 其逆命题和否命题互为逆否命题, 所以它们真值相同.

例 1.10. 设 A, B 是全集 U 的两个子集, 则:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_U B \subseteq \complement_U A.$$

证明. 根据原命题和其逆否命题真值相同容易证明, 留给读者. $\square$

对于条件语句 p 和 q , 我们经常要用逻辑联结词来得到新的条件语句. 前面介绍的“非” $\neg$ 就是其中一个逻辑联结词, 除此之外常用的还有或 $\vee$ 和且 $\wedge$.

有了逻辑联结词, 我们可以给出集合的交、并、补的定义. 设 p 和 q 是条件语句, A 和 B 全集 M 的子集, 且

$$A = \{x \in M | p(x)\}, B = \{x \in M | q(x)\}.$$

则:

$$A \cup B := \{x \in M | p(x) \vee q(x)\},$$

$$A \cap B := \{x \in M | p(x) \wedge q(x)\},$$

$$\complement_M A := \{x \in M | \neg p(x)\}.$$

由此可见, 或、且、非实际上就可以理解为集合的并、交、补.

当我们用逻辑联结词联结两个命题 p 和 q 时, 得到的新命题与原命题的真值有如下关系:

- $p \vee q$ 为真 $\Leftrightarrow p, q$ 至少有一个为真 (简记为“有真为真, 全假为假”).
- $p \wedge q$ 为真 $\Leftrightarrow p, q$ 都为真 (简记为“全真为真, 有假为假”).
- $\neg p$ 与 p 的真值相反 (根据排中律).

当我们用逻辑联结词联结条件语句时候, 对新的条件语句的否定如下:

- $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q).$
- $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q).$
- $\neg(\neg p) = p.$

前两个结论由 De Morgan 律容易看出, 最后一个结论可由排中律直接得到.

1.2.2 量词

我们把量词 $\forall$ 叫做全称量词, 它表示“任意的”, “每一个”, “所有的”, 或者“对于任意的”, “对于每一个”, “对于任何一个”, “对所有的”, 等等. 含有全称量词的命题称为全称命题, 其一般形式为:

$$\forall x \in M, r(x).$$

其中 M 是集合, $r(x)$ 是一个关于元素 x 的命题. 上述命题的语言表达就是: “对集合 M 中的每一个元素 x , $r(x)$ ”.

量词 $\exists$ 称为特称量词, 它表示“存在”, “有”, “至少存在一个”, “至少有一个”, 等等. 含有特称量词的命题叫做特称命题. 其形式为:

$$\exists x \in M, s(x).$$

其中 M 是集合, $s(x)$ 是一个关于元素 x 的命题.

例 1.11. 判断下面命题的真假: (1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$; (2) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \geq 1$; (3) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^3 < 1$; (4) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$.

解. (1) 因为 $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $x^2 \geq 0$, 所以 $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, 因此 (1) 是真命题.

(2) $\frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$, 但是 $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} < 1$, 所以 (2) 是假命题.

(3) $-1 \in \mathbb{Z}$, $(-1)^3 = -1 < 1$, 所以 (3) 是真命题.

(4) 假设存在这样的有理数 x , 则存在整数 $p, q, q \neq 0$, 使得 p, q 互素 (即最大公约数为 1) 且 $x = p/q$, 所以 $p^2/q^2 = 3$, 即 $p^2 = 3q^2$, 由此可知 3 整除 p^2 , 有算数基本定理可知 3 也整除 p , 设 $p = 3r$, 其中 $r \in \mathbb{Z}$, 则 $3q^2 = p^2 = 9r^2$, 因此 $q^2 = 3r^2$, 同理可知 3 整除 q , 因此 3 是 p, q 的一个公约数, 这与 p, q 互素矛盾. 因此不存在这样的有理数 x , 所以 (4) 是假命题.

事实上, 我们根据初中所学的只是可知, $x^2 = 3$ 在实数范围内只有两个根 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$, 这两个实数根均为无理数. 而我们认为 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, 所以方程 $x^2 = 3$ 没有有理数根. 即 (4) 是假命题. $\heartsuit$

评注 1.11.1. 要判定全称量词 $\forall x \in M, r(x)$ 是真命题, 必须对 M 中的每个元素 x 验证 $r(x)$ 成立; 但要判定其为假命题, 却只需要举出 M 中的一个元素 x_0 , 去验证它使得 $r(x_0)$ 不成立 (这就是“举出一个反例”).

要判定特称量词 $\exists x \in M, s(x)$ 是真命题, 只要在 M 中找到一个元素 x_0 使得 $s(x_0)$ 成立 (即举例说明); 但要判定其为假命题却需要对集合 M 中的每个元素 x 验证 $s(x)$ 不成立.

下面我们探讨全称命题和特称命题的否定. 在数学中, 这是非常重要的, 因为命题的否定通常需要转化成等价的肯定语气, 或者尽可能肯定的语气来陈述, 否则无法展开证明. 而全称命题和特称命题的否定是其中一种非常重要的操作.

我们先来看一个简单的例子: 若记 s : 所有自然数都是整数, 则不难看出其否定为 $\neg s$: 不是所有自然数都是整数. 事实上, 这里的 s 就是一个全称命题, 而且可以表达成:

$$s: \forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}.$$

但是, 我们更希望 $\neg s$ 是以一种肯定的语气叙述的. 事实上, $\neg s$ 还可以表述成: 至少有一个自然数不是整数, 或者, 存在一个自然数不是整数. 由此可见 $\neg s$ 是一个特称命题, 并且可以用符号表达成:

$$\neg s: \exists x \in \mathbb{N}, x \notin \mathbb{Z}.$$

我们对比 s 和 $\neg s$ 的符号表达, 不难看出 s 和 $\neg s$ 的区别在于: (1) 量词由 $\forall$ 变成了 $\exists$, (2) 结论 $x \in \mathbb{Z}$ 则变成了 $x \notin \mathbb{Z}$. 一般地, 全称命题 “ $\forall x \in M, p(x)$ ” 的否定是特称命题:

$$\exists x \in M, \neg p(x).$$

与之对应地, 我们还能看出特称命题 “ $\exists x \in M, q(x)$ ” 的否定是全称命题:

$$\forall x \in M, \neg q(x).$$

以上两个结论都可以简单地记为: 改变量词, 条件不变, 否定结论.

例 1.12. A : 每个 ≥ 4 的偶数可以表成两个正素数之和, 那么 $\neg A$ 如何叙述为特称命题? (A 即著名的哥德巴赫猜想)

解. 事实上, A 可以陈述为全称命题:

$$A: \forall n \text{ 是偶数且 } n \geq 4, \exists p_1, p_2 \text{ 为正素数, 使得 } n = p_1 + p_2.$$

为了得到 $\neg A$, 我们只需要改变量词, 条件不变, 否定结论. 注意, 这里的结论是用特称命题表述的, 因此其否定也可以用相同的方式改成全称命题, 这里不再赘述.

$$\neg A: \exists n \text{ 是偶数且 } n \geq 4, \forall p_1, p_2 \text{ 为正素数, 都有 } n \neq p_1 + p_2.$$

♡

1.2.3 充分条件和必要条件

考虑假言命题: 若 p , 则 q . 设该命题为真, 则有 $p \Rightarrow q$ 成立.

现在我们将 p 和 q 理解成条件语句, 则在 $p \Rightarrow q$ 中, 我们称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

实际上, 充分条件和必要条件之间的关系本质上就是集合之间的包含关系, 我们记:

$$A := \{x | p(x)\}, B := \{x | q(x)\}.$$

则因为 $p \Rightarrow q$, 所以 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 所以 $A \subseteq B$, 反过来, 若 $A \subseteq B$, 则 $p \Rightarrow q$.

例 1.13. 若 一个三角形是正三角形, 则 这个三角形是锐角三角形.

该命题是真命题. 从集合的角度来看, 设 $A = \{\text{所有的正三角形}\}$, $B = \{\text{所有的锐角三角形}\}$, 则 $A \subseteq B$, 所以显然有 $p \Rightarrow q$.

如果假言命题 $p \Rightarrow q$ 的逆命题 $q \Rightarrow p$ 也是真的, 即 p 既是 q 的充分条件, 又是 q 的必要条件, 此时我们就说 p 是 q 的充分必要条件 (或充要条件), 记为 $p \Leftrightarrow q$. 此时, 对应的集合 A 和 B 满足 $A = B$. 一般地, 关于假言命题 “若 p , 则 q ”, 其条件 p 和 q 的关系有如下几种:

p 和 q 的关系	原命题和其逆命题的真值	对应的集合之间的关系
p 为 q 的充要条件	原命题和其逆命题均为真命题	$A = B$
p 为 q 的充分不必要条件	原命题为真, 但是逆命题为假	$A \subsetneq B$
p 为 q 的必要不充分条件	原命题为假, 但是逆命题为真	$B \subsetneq A$
p 是 q 的既不充分也不必要条件	原命题为假, 逆命题也为假	$A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$.

例 1.14. $A = \{x|1 < x < 2\}$, $B = \{x|m+1 < x < 2m-1\}$, 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要但不充分条件, 试求 m 的范围.

分析: 题给条件就等价于 $B \subsetneq A$.

解. 根据题给条件, $B \subsetneq A$.

若 $B = \emptyset$, 则 $m+1 \geq 2m-1$, 所以 $m \leq 2$.

若 $B \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} 1 \leq m+1, \\ 2m-1 \leq 2, \\ 2m-1 > m+1, \end{cases}$, 该不等式组无解.

所以, m 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

♡

第二章 基本初等函数 I

C'est pour la résolution to de ces problèmes, et non par amour des complications.

(这是为了解决那些存在的问题, 而不是因为我们更偏爱复杂的对象.)

——Henri Lebesgue

这一讲讨论基本初等函数. 变量与变量之间的关系 (即函数) 是这一知识模块的基本研究对象, 基本初等函数作为函数中最基础的一类, 它们有一些非常典型的性质, 希望各位读者在了解这些函数的过程中, 准确地把握好函数的性质, 并在练习解题时做到灵活运用和深入思考.

我们在初中的课程中已经学过了自变量、因变量与函数的基本概念, 并且学习了函数的表示法, 特别是解析法和图像法. 在高中阶段我们需要进一步引入一些新的概念, 作为认识函数、研究函数的基本工具. 为了接下来的讨论, 我们需要先介绍一下数轴和区间的概念:

在一条直线上, 取定一点 O , 然后取定一个单位长度并在直线上选定一个方向 (习惯上取右侧为正方向, 如图2.1). 对于 $\forall x \in \mathbb{R}$, 如果 $x = 0$, 则将 x 对应于坐标原点 O ; 若 $x > 0$, 则将 x 对应于直线上一点 P , 使得自 O 至 P 的方向与所选方向一致, 且线段 $\overline{OP}$ 的长度为单位长度的 x 倍; 若 $x < 0$, 则 P 点的选定方法类似, 只不过自 O 至 P 的方向与所选方向相反. 总之, 这条直线上的每一个点都可以看成一个实数; 反之每一个实数都可以看成这条直线上的一个点. 我们把这条直线称为**数轴**.



图 2.1: 数轴

引入数轴概念后我们往往将实数集 $\mathbb{R}$ 与数轴等同, 也不再区分实数和数轴上的点, 并把一个数 x 称为**点 x** . 有了数轴的概念以后, 两个实数 a 和 b 的大小关系 $a < b$ 有清楚的几何意义: $a < b$ 表示点 a 在点 b 的左侧. 给定两个实数 $a < b$, 我们把数集 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$; 把数集 $\{x|a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a, b) . 类似地可以定义半开半闭的区间 $(a, b]$ 和 $[a, b)$:

$$(a, b] = \{x|a < x \leq b\}, [a, b) = \{x|a \leq x < b\}.$$

对于开区间 (a, b) 或闭区间 $[a, b]$ 或半开半闭的区间, 其**区间长度**为 $b - a$, 而点 $c = \frac{a+b}{2}$ 是**区间中点**. 区间长度和区间中点的几何意义可以清楚地数轴上看到.

我们习惯将整个数轴 $\mathbb{R}$ 表示成区间 $(-\infty, +\infty)$, 并考虑如下形式的区间:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

据此读者可以自己定义区间 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b]$. 今后我们在解答有关参数范围的问题时, 习惯将答案写成区间的形式.

2.1

映射与函数

2.1.1 映射, 单射, 满射和一一映射

映射是数学中的一个基本概念, 用于描述对应关系. 给出其定义如下:

定义 2.1. 设 A 和 B 是两个给定集合, f 是某种对应法则. 如果按照对应法则 f , 使得对于每个 $x \in A$, 通过 f 可以唯一确定一个 $y \in B$. 那么称 f 是 A 到 B 的一个**映射**, 记作 $f: A \rightarrow B$.

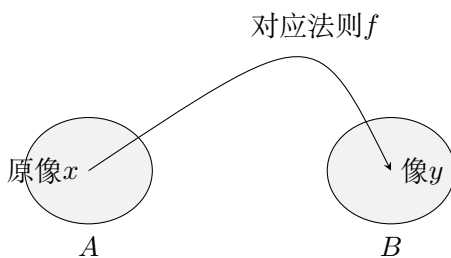


图 2.2: 映射的三个要素: 原像集 A , 像集 B , 对应法则 f 的图解

称 B 中元素 y 是 A 中元素 x 在映射 f 作用下的**像**, 记作 $y = f(x)$, 并用符号 $f: x \mapsto y$ 表示 x 称为 y 的一个**原像**.

例 2.1. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$. 判断以下三种对应中, 哪些是 A 到 B 的映射.

$$f: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x;$$

$$g: a \mapsto y, c \mapsto x;$$

$$h: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x, c \mapsto z.$$

解. $f: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x$ 是 A 到 B 的一个映射.

$g: a \mapsto y, c \mapsto x$ 不是 A 到 B 的映射, 因为 b 在 g 的作用下没有像, 根据定义可知 g 不是 A 到 B 的映射.

$h: a \mapsto y, b \mapsto z, c \mapsto x, c \mapsto z$ 也不是 A 到 B 的映射, 因为对于原像 c , B 中有两个元素 x 和 z 与它对应, c 的像无法被唯一确定, 根据定义可知 h 不是 A 到 B 的映射. ♡

定义 2.2. 设有映射 $f: A \rightarrow B$, 如果对于任意的 $a_1, a_2 \in A$, 如果 $a_1 \neq a_2$, 必有 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 那么称 f 是 A 到 B 的一个**单射**. 即在 B 中不存在有多个原像的像.

如果对于任意的 $b \in B$, 均存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = b$, 那么称 f 是 A 到 B 的一个**满射**. 即 B 中每个元素都有原像, f 映满了整个集合 B , B 中没有元素剩余.

如果 f 既是单射也是满射, 则称 f 为**一一映射**或**双射**. 一一映射是一种很重要的映射, 例如一个班的每个同学与其学号一一对应, 这种对应就是一一映射. 特别地, 如果 $A = B$ 且 $f: x \mapsto x$ (其中 $x \in A$), 则这个映射称为 A 上的**恒等映射**或**单位映射**.

例 2.2. 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 求 A 到 B 的单射个数;

(2) 求 A 到 B 不是单射的映射个数;

(3) A 到 B 的映射能否是满射?

解. (1) a_1, a_2, a_3 的像互不相同, 因此单射的个数为 $A_4^3 = 24$ 个.

(2) 确定 a_1 的像, 有 4 种方法, 确定 a_2 的像, 同样有 4 种方法, 确定 a_3 的像, 还是有 4 种方法, 因此 A 到 B 的不同映射个数有 $4^3 = 64$ 个, 又因为单射有 24 个, 故不是单射的映射有 40 个.

(3) 答案是否定的. 因为 A 中的每个元素恰与 B 的一个元素对应, 而 $|A| = 3, |B| = 4$, 所以 B 中至少有一个元素, 在集合 A 中找不到它的对应元素. 因而不存在能够映满 B 的映射 f .

事实上, 如果存在 A 到 B 的单射, 那么 $|A| \leq |B|$; 如果存在 A 到 B 的满射, 那么 $|A| \geq |B|$.
♡

2.1.2 函数

映射是比函数更加基本的概念, 函数可以看成是特殊的映射. 在数学中我们研究的变量通常是数, 自然需要建立从非空数集到非空数集的映射. 我们给出函数的确切定义如下:

定义 2.3. 设 x 和 y 是两个变量, 分别在非空数集 A 和 B 中取值. 如果按照某种对应法则 f 使得对于每个 $x \in A$ 都能找到唯一确定的值 $y \in B$ 与之对应, 那么就称 f 是一个**函数**, 并记作 $f: A \mapsto B$. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**.

对于 A 中的每个元素 x , 根据对应法则 f 所对应的 B 中的元素 y 称为 f 在 x 点处的**函数值**, 并记为 $f(x)$. 全体函数值组成的集合 $f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$ 称为函数 f 的**值域**. 显然, $f(A)$ 是 B 的一个子集.

我们现阶段讨论的函数的值域 $f(A)$ 通常都是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, 因此为了方便, 上述定义中的 B 常用实数集 $\mathbb{R}$ 来代替. 这是没有任何问题的, 例如定义在 $A = [3, +\infty)$ 的函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的值域是 $[0, +\infty)$, 但是我们仍然可以认为 y 的变化范围是 $\mathbb{R}$, 并且将该函数记成 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. 总之, 当我们统一地用 $\mathbb{R}$ 来代替定义中的 B 时, 确定函数的主要因素实际上是两个: 对应法则和定义域. 所以我们更加习惯将函数 $f: A \mapsto B$ 记成:

$$y = f(x), x \in A;$$

或者简单地记成 $y = f(x)$, 并在这种看法下称 x 为**自变量**, y 为**因变量**. 定义域常用记号 D 来表示.

根据函数 $y = f(x), x \in D$ 的定义可知, 数集 D 中每一个数 x 与值域 $f(D)$ 当中的数 y 相对应, 因此可以用有序实数对集

$$G = \{(x, y) | y = f(x)\}, x \in D$$

来表示函数 $f(x), x \in D$. 平面中的点集 G 在坐标系中描绘出这个函数的图像. 如果函数在某个区间内的图像是一个连续的曲线 (曲线上没有间断), 就说函数在该区间内是**连续**的, 关于函数连续性的严格定义需要用到高等数学中的极限论, 显然已经远远超出了高中课程的内容, 此处不作介绍. 函数连续是许多重要性质的前提条件, 我们今后要讨论的基本初等函数在定义域内都是连续的.

除了用图像描绘以外, 我们见到的函数多是由表达式给出的. 比如某质点作自由落体运动, 其位移 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, 这里的 t 与 s 的对应关系是由一个公式给出的. 有时候用一个公式还不够, 而只能在定义域的不同部分用不同的解析式来表示, 这类函数称为**分段函数**. 例如我国公民缴纳的个人所得税额取决于他一个月的收入:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 800, \\ (x - 800) \times \frac{5}{100}, & 800 < x \leq 1300, \\ 500 \times \frac{5}{100} + (x - 1300) \times \frac{10}{1000}, & 1300 < x \leq 2800, \\ 25 + 150 + (x - 2800) \times \frac{15}{100}, & 2800 < x \leq 5800. \end{cases}$$

分段函数的一般形式为:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1, \\ f_2(x), & x \in D_2, \\ \dots \\ f_n(x), & x \in D_n. \end{cases}$$

其中要求 $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$, 即各段的区间不能有重叠. 此时, 函数 $f(x)$ 的定义域 $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. 特别提醒读者注意, 分段函数也是一个函数, 只是在定义域的不同部分有不同的表达式, 不要混淆概念, 误认为分段函数表示多个函数.

接下来我们对函数的定义域作一般性的讨论. 函数的定义域 D 是根据具体函数的定义来确定的. 一个由表达式给出的函数的定义域通常认为是使得表达式有意义的自变量 x 的一切值. 例如一次函数 $y = kx + b$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的定义域都是 $\mathbb{R}$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的定义域为 $[3, +\infty)$. 对于一些具体的物理问题或实际问题中出现的函数, 其定义域还要根据所讨论的问题来确定.

例 2.3. 求函数 $y = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}}{|x + 2| - 6}$ 的定义域.

解. 这是一个由表达式给出的函数, 要使表达式有意义, x 的取值需要使分母不得零、偶次根号下非负. 即:

$$\begin{cases} |x + 2| - 6 \neq 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

解得 $x \in (-\infty, -8) \cup (-8, -1] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$. 即函数的定义域为 $(-\infty, -8) \cup (-8, -1] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$. $\heartsuit$

函数之间经过若干次四则运算后可以得到新的函数. 例如函数 $y = ax + \frac{b}{x}, a, b \neq 0$ 可以看成是由正比例函数 $y = ax$ 和反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 相加得到的. 一般地, 设有定义在 D_1 上的函数 $f(x)$ 和定义在 D_2 上的函数 $g(x)$, 有关函数四则运算所得函数的定义域有如下结论:

1° $h(x) = f(x) \pm g(x)$ 的定义域为 $D_1 \cap D_2$;

2° $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ 的定义域为 $D_1 \cap D_2$;

3° $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域为 $D_1 \cap \{x | x \in D_2, g(x) \neq 0\}$.

这些结论在今后讨论函数的定义域的问题中会经常用到. 例如函数 $y = ax + \frac{b}{x}, a, b \neq 0$, 根据上述结论立刻得到其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

有时函数的自变量和因变量要通过另外一些变量才能建立联系, 为此, 我们定义函数的**复合运算**:

定义 2.4. 假定我们给了两个函数: 定义在 D_2 上的函数 $f(x)$ 和定义在 D_1 上的函数 $g(x)$, 并且假定集合 $D_1^* = \{x | g(x) \in D_2, x \in D_1\} \neq \emptyset$, 即 D_1 的非空子集 D_1^* 满足 $g(D_1^*) \subseteq D_2$. 这时候对于每一个 $x \in D_1^*$ 通过对应法则 g 能够唯一确定一个 $u = g(x)$ 与之对应, 又根据我们的假定, 这个 u 值一定属于 D_2 , 因此 u 通过对应法则 f 又能够唯一确定一个 $y = f(u)$ 与之对应. 这样一来, 我们就建立了一个 x 到 y 的对应, 从而得到定义在 D_1^* 上, 以 x 为自变量, y 为因变量的一个新的函数. 记作:

$$y = f[g(x)], x \in D_1^*.$$

称为由函数 f 和 g 经过复合运算得到的**复合函数**, 其中 g 称为**内层函数**, f 称为**外层函数**.

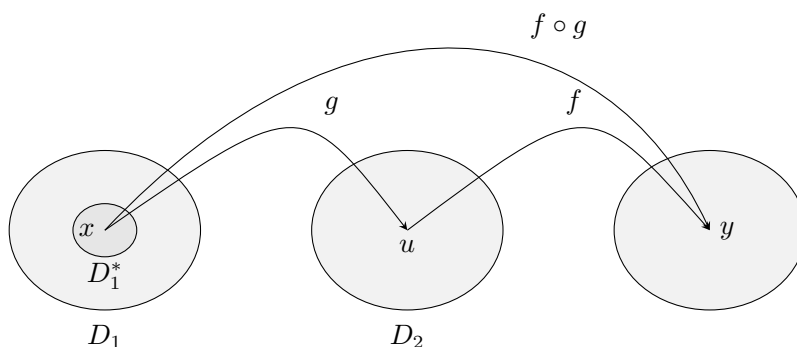


图 2.3: 复合函数或复合映射

关于复合运算的定义, 我们提醒读者注意以下三点:

1° 一般地, 设有定义在 D_1 上的函数 $f(x)$ 和定义在 D_2 上的函数 $g(x)$, 在满足上述假定的前提下, 经复合运算得到的函数 $h(x) = f[g(x)]$ 的定义域为 $\{x | x \in D_1, g(x) \in D_2\}$ (由内到外). 这条性质从定义中可以直接得到, 可以作为一个常用的结论直接使用.

2° 上述定义中, $g(D_1^*) \subseteq D_2$, 即内层函数的值域是外层函数的定义域的子集. 另外, $D_1^* \subseteq D_1$, 即复合函数的定义域是内层函数定义域的子集.

3° 复合函数 $y = f[g(x)]$ 和 $y = f(x)$ 是两个不同的函数. 首先两者的自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则不同; 其次, 它们的定义域也不是一回事, 这一点可以理解为: 在复合函数 $y = f[g(x)]$ 中 g 的作用对象 x 在 D_1^* 上 ($D_1^* \subseteq D_1$), 而 f 的作用对象 $g(x)$ 在 D_2 上 ($g(D_1^*) \subseteq D_2$), 其中, 自变量 x 的范围是 D_1^* . 而对于函数 $y = f(x)$, 自变量 x 的范围是 D_2 . 这两者显然不同.

原则上, 只有当函数直接用 $y = f(x)$ 给出时, 函数 f 的定义域才是自变量 x 的取值范围, 而当函数用复合函数给出时, 自变量 x 的范围 (即复合函数的定义域) 需要通过第一条所述 “由内到外” 的规则确定出, 而不能简单地认为复合函数的定义域就是外层函数 f 或内层函数 g 的定义域.

例 2.4. (1) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x}$, 求 $h(x) = f[g(x)]$;

(2) $f(\sqrt{x} + 1) = x^2 + 2\sqrt{x} + 3$, 求 $y = f(x)$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 求函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域;

(4) 若函数 $y = f(2x + 3)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $z = f(3x + 2)$ 的定义域;

(5) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$, 求 $g(x) = f(x + c) + f(x - c)$ 的定义域, 其中常数 $c \in (0, 1)$;

(6) 若函数 $y = \sqrt{mx^2 - 6mx + m + 8}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 求 m 的范围.

解. (1) $h(x) = f[g(x)] = \sqrt{\frac{1}{x}}$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 令内层函数 $u = \sqrt{x} + 1$, 则 $u \geq 1$, 且 $x = (u - 1)^2$. 此时 $f(u) = (u - 1)^4 + 2(u - 1) + 3, u \in [1, +\infty)$, 因此 $f(x) = (x - 1)^4 + 2(x - 1) + 3$, 其定义域为 $[1, +\infty)$.

评注 2.4.1. 解答这个小题的过程实际上是换元, **换元法**的基本思想是: 将内层函数 u 当成新元来处理, 并通过反解的方式用 u 来表示原来的元 x , 从而得到外层函数的表达式. 我们今后在许多不同的问题中都要用到换元法, 在这里提醒读者注意只要做了换元, 首先要**关注新元的取值范围**. 养成这个习惯能够避免在换元之后因为忽略了新元的取值范围导致解题出错.

(3) 内层函数的定义域为 $[0, +\infty)$, 故 $x \in [0, +\infty)$; 而外层函数的定义域为 $[-1, 1]$, 故 $-1 \leq \sqrt{x} \leq 1$, 解得 $x \in [0, 1]$; 因此, 函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为 $[0, 1]$.

(4) 因为 $y = f(2x + 3)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 所以 $x \in [0, 1]$, 所以 $2x + 3 \in [3, 5]$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3, 5]$. 对于函数 $z = f(3x + 2)$, 其内层函数为一次函数, 定义域为 $\mathbb{R}$, 又因为外层函数 f 的定义域为 $[3, 5]$, 所以 $3 \leq 3x + 2 \leq 5$, 解得 $x \in [\frac{1}{3}, 1]$. 因此函数 $z = f(3x + 2)$ 的定义域为 $[\frac{1}{3}, 1]$.

(5) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$, 所以函数 $g(x)$ 中自变量 x 满足:

$$\begin{cases} 0 < x + c < 2 \Rightarrow -c < x < 2 - c, \\ 0 < x - c < 2 \Rightarrow c < x < 2 + c. \end{cases}$$

结合 c 的范围, 取两者的交集得 $x \in (c, 2 - c)$, 即函数 $g(x)$ 的定义域为 $(c, 2 - c)$.

评注 2.4.2. 事实上, 这个小问不仅用到了复合函数定义域的结论, 还用到了函数的加减运算所得新函数的定义域的结论.

(6) ① 若 $m = 0$, 则 $y = 2\sqrt{2}$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 符合题意.

② 若 $m \neq 0$, 因为函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 所以对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 内层函数 $mx^2 - 6mx + 8 \geq 0$ 恒成立, 根据二次函数的相关知识可知:

$$\begin{cases} m > 0; \\ \Delta = 36m^2 - 4m^2 - 32 \leq 0. \end{cases}$$

解得 $-1 \leq m \leq 1$.

综上所述, m 的取值范围为 $(0, 1]$.

♡

评注 2.4.3. 通过以上几道例题, 我们可以总结出求有关复合函数定义域问题的一般做法都是: 根据函数四则运算和复合运算所得函数的定义域的相关结论, 求出自变量 x 的取值范围.

读者可以试着自己叙述**复合映射**的定义, 它是与复合函数的定义完全类似的, 只需把复合函数定义中的数集合推广到一般的集合就成了.

根据之前的讨论, 我们知道有了定义域 D 和对应法则 f , 就能够确定一个函数 $y = f(x), x \in D$, 当然也确定了这个函数的值域 $f(D)$. 例如一次函数 $y = kx + b$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的值域为 $[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

例 2.5. 已知 $f(2x - 1) = x^2, x \in \mathbb{R}$, 求函数 $y = f[f(x)]$ 的值域.

解. 仿照例题2.4的第(2)小问, 令 $u = 2x - 1 \in \mathbb{R}$, 则 $x = \frac{u+1}{2}$, $f(u) = \frac{(u+1)^2}{4}$, 所以 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{4}, x \in \mathbb{R}$, $f[f(x)] = \frac{1}{4}[\frac{1}{4}(x+1)^2 + 1]^2 = \frac{1}{64}[(x+1)^2 + 4]^2$. 因为函数 $f[f(x)]$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 当 $x = -1$ 时 $f[f(x)]$ 取最小值 $\frac{1}{4}$, 根据二次函数知识可知 $f[f(x)]$ 的值域为 $[\frac{1}{4}, +\infty)$. ♡

2.1.3 函数的对称、平移、伸缩和翻折变换

首先我们来考虑这样一道例题:

例 2.6. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + 3$. 若点 $P(x, y)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图像上, 点 $Q(\frac{x}{2}, \frac{y}{3})$ 在函数 $y = g(x)$ 的图像上, 求 $g(x)$ 的解析式.

解. 设 $Q(a, b)$, 则 $P(2a, 3b)$ 在 $y = f(x)$ 的图像上, 因而满足 $4a^2 + 4a + 3 = 3b$, $b = \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}a + 1$, 所以 $g(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$. ♡

观察: 在解答这道例题的过程中, 我们设出了 $g(x)$ 上的点, 进而用代数方法刻画出了已知函数 $f(x)$ 上的点, 并根据 $f(x)$ 的对应法则的得出了横纵坐标的关系. 之所以能这样做, 是由于 $g(x)$ 上的每个点和 $f(x)$ 上的点有某种对应关系, 因此这样求解 $g(x)$ 的表达式的方法被称为**相关点法**. 这种方法在以后我们讨论求解轨迹方程的问题时会再次用到.

例 2.7. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于 $x = a$ 对称, 那么 f 和 g 的表达式在代数上有什么联系?

解. 对于每一个 $g(x)$ 定义域内的 x , $g(x)$ 图像上的每一点 $(x, g(x))$ 关于直线 $x = a$ 的对称点是 $(2a - x, g(x))$, 因为这一点在 $f(x)$ 图像上, 根据相关点法, $f(2a - x) = g(x)$. 这是 f 和 g 的表达式在代数上的联系.

事实上, 函数 $g(x) = f(2a - x)$ 可以看成是由已知函数 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 作**对称变换**得到的. 类似地, 函数 $g(x) = 2b - f(x)$ 可以看成是由函数 $f(x)$ 关于直线 $y = b$ 作对称变换得到的, 而函数 $g(x) = -f(2a - x) + 2b$ 可以看成是由已知函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 作对称变换得到的, 读者可以尝试着自己用相关点法说明以上两个结论.

特别地, 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(x), y = f(-x), y = -f(-x)$ 分别关于 x 轴、 y 轴、原点对称. ♡

除了对称变换外, 还有如下常见的变换:

平移变换: $g(x) = f(x - a)$ (或 $g(x) = f(x + a)$) 可以由函数 $f(x)$ 向右 (或向左) 平移 a ($a > 0$) 个单位得到, 可简单记忆为“左加右减”.

证明. 函数 $y = f(x)$ 向右平移 x 个单位得到 $g(x)$ 的图像, 点 $(x, g(x))$ 向左平移 x 个单位得到的点为 $(x - a, g(x))$, 因为这一点在 $f(x)$ 的图像上, 根据相关点法立刻得到 $f(x - a) = g(x)$. 向左平移的情况完全类似, 留给读者自己完成. □

$g(x) = f(x) + a$ (或 $g(x) = f(x) - a$) 可以由函数 $f(x)$ 向上 (或向下) 平移 a ($a > 0$) 个单位得到, 可简单记忆为“上加下减”.

证明留给读者. 由此可见, 函数的变换本质上都是由相关点引起的 f 与 g 表达式之间的二元关系.

伸缩变换: 将函数 $y = f(x)$ 图像上的所有点的横坐标变为原来的 k 倍, 纵坐标不变, 就得到函数 $g(x) = f(\frac{x}{k})$ 的图像, 将函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的纵坐标变为原来的 k 倍, 横坐标不变, 就得到函数 $g(x) = kf(x)$ 的图像.

本章例2.6中, $g(x)$ 的图像可以看成是将 $f(x)$ 图像上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 再将其图像上的所有点的纵坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$ 得到的, 根据伸缩变换的结论立刻得到 $g(x) = \frac{1}{3}f(2x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$.

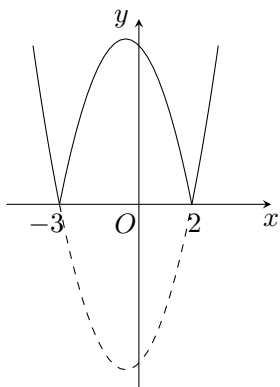
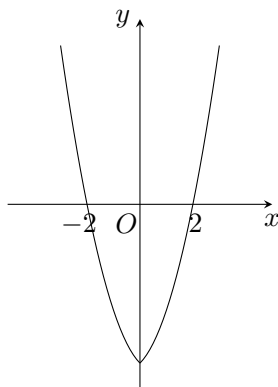
函数的平移、伸缩和对称变换在今后讨论三角函数问题时非常重要.

翻折变换: 将函数 $y = f(x)$ 的图像在 x 轴上方的部分保持不变, x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方, 就得到了函数 $g(x) = |f(x)|$ 的图像.

证明. 事实上, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \{x | f(x) > 0\} \\ -f(x), & x \in \{x | f(x) < 0\} \end{cases}$, 因此 $f(x)$ 图像在 x 轴上方的部分在 $g(x)$ 的图像中保持不变, 而在 x 轴下方的部分关于 x 轴作对称变换得到 $g(x)$ 的图像中相应的部分. □

例 2.8. 作出函数 $y = |x^2 + x - 6|$ 的图像.

解. 先作函数 $y = x^2 + x - 6$ 的图像, 然后将此图像在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方, 即得到 $y = |x^2 + x - 6|$ 的图像. 如图2.4所示.

图 2.4: $y = |x^2 + x - 6|$ 的图像图 2.5: $y = |x^2 + x - 6|$ 的图像

将函数 $y = f(x)$ 的图像在 y 轴右侧的部分保持不变, y 轴左侧部分舍弃, 并将右侧部分翻折到 x 轴左侧, 就得到了函数 $g(x) = f(|x|)$ 的图像. 读者可以仿照上述, 对这个结论作一个说明. ♡

例 2.9. 已知函数 $f(x) = x^2 + x - 6$, 作出函数 $y = f(|x|)$ 的图像.

解. 先作函数 $y = x^2 + x - 6$ 在 x 轴右侧的图像, 再将 x 右侧的图像翻折到 x 轴左侧, 就得到 $y = f(|x|)$ 的图像, 如图2.5所示. ♡

复合函数的变换: 对于用复合函数给出的函数 $y = f[g(x)]$, 其关于 $x = a$ 做对称变换得到函数 $y = f[g(2a - x)]$, 其关于点 (a, b) 对称变换得到函数 $y = 2b - f[g(2a - x)]$, 其图像向右平移 a 个单位得到函数 $y = f[g(x - a)]$, 其图像向上平移 a 个单位得到函数 $y = f[g(x)] + a$, 其图像上各点的横坐标变为原来的 k 倍后得到函数 $y = f[g(\frac{x}{k})]$, 其图像上个点的纵坐标变为原来的 k 倍后得到函数 $y = kf[g(x)]$. 总之, 涉及到复合函数的横向变换时, 只需用 $2a - x$, $x - a$, $\frac{x}{k}$ 等替换 x ; 涉及到纵向变换时, 只需整体加上纵向平移量或整体乘以纵向伸缩系数即可.

习题 2.1

1. 设对一切实数 x , 函数 $f(x)$ 满足: $xf(x) = 2f(1 - x) + 1$. 则 $f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知函数 $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \pi, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(-1)]\}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 1000, \\ f(f(x + 5)), & x < 1000, \end{cases}$ 则 $f(84)$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2.2

函数的单调性, 奇偶性与周期性

函数的单调性, 奇偶性与周期性是函数最基本的性质, 它们反映的是函数重要的代数特征 (不等式性质和等式性质).

2.2.1 单调性

定义 2.5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 只要 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 是**增函数**, 或 $f(x)$ **单调递增**, 如图 2.6 所示. 函数单调递增的另一种等价叙述为: 对于任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 或 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则函数 $f(x)$ 单调递增.

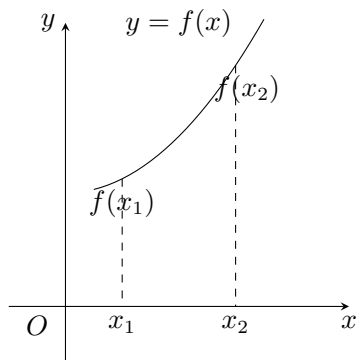


图 2.6:

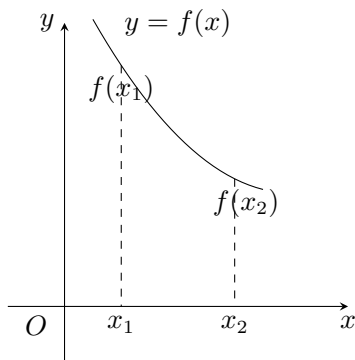


图 2.7:

函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 只要 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说 $f(x)$ 是**减函数**, 或 $f(x)$ **单调递减**, 如图 2.7 所示. 同样, 函数单调递减的也有类似的等价叙述: 对于任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 或 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 单调递减.

如果函数 $f(x)$ 在定义域 D 的某个子区间 A 上是增函数或减函数, 那么就说 $y = f(x)$ 在这个区间上有 (严格的) 单调性. 这个区间叫做 $f(x)$ 的**单调增 (或减) 区间**.

函数的单调性反映在其图像上是指函数的走势. 在单调区间上, 增函数的图像是上升的曲线, 减函数的图像是下降的曲线.

函数的单调性是重要的不等式性质, 我们提醒读者注意以下几点:

- 1° 函数的单调区间必是定义域的子区间, 即讨论函数的单调性一定是在定义域内进行的. 特别地, 如果函数以 D 为单调区间, 那么函数 $f(x)$ 是单调函数.
- 2° 某个函数在一个区间 A 上递增 (或递减), 在另一个区间 B 上也递增 (或递减), 但此时函数在区间 $A \cup B$ 上不一定递增 (或递减). 例如函数 $y = \frac{1}{x}$, 左边单调递减, 右边单调递减, 你把它们并在一起, 真不单调递减.

3° 在中学数学中所讨论的单调性是严格单调的, 即必须是 $f(x_1) < f(x_2)$ 或者 $f(x_1) > f(x_2)$, 而不能是 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$.

例 2.10. 函数 $y = |x^2 - 4x|$ 的单调减区间为_____

解. 数形结合, 根据翻折变换的相关知识可以绘出函数的草图:

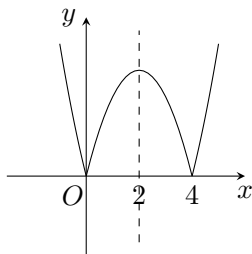


图 2.8:

由图像可知, 函数的单调递减区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, 4)$ (或者将两个区间用逗号隔开). 注意绝对不能写成 $(-\infty, 0) \cup (2, 4)$, 参见上述提醒中的第二点. ♡

例 2.11. 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数;

(2) 求函数 $y = f(x), x \in (2, 6)$ 的值域.

解. (1) $f(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$, 任取 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, 只需证明 $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(2 - \frac{2}{x_1+1}\right) - \left(2 - \frac{2}{x_2+1}\right) = \frac{2}{x_2+1} - \frac{2}{x_1+1} = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)};$$

由 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $2(x_1 - x_2) < 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$,

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0;$$

所以, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数.

$$(2) f(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}, \text{ 分析易知 } f(x) \text{ 在 } (2, 6) \text{ 递增 (证明留给读者),}$$

$$\text{所以 } f(2) < f(x) < f(6), \text{ 即 } f(x) \in \left(\frac{4}{3}, \frac{12}{7}\right);$$

$$\text{也即 } y = f(x), x \in (2, 6) \text{ 的值域为 } \left(\frac{4}{3}, \frac{12}{7}\right). \quad \heartsuit$$

评注 2.11.1. 在解答第一小问的过程中, 我们根据定义取区间上任意两点 $x_1 < x_2$, 通过判断两点函数值之差 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号, 进而根据定义判定了函数的单调性. 用定义来判断或证明单调性的问题最终都会转化为确定 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号, 我们通常习惯将它写成多个因式相乘或相除的形式, 并逐个判断各因式的符号.

评注 2.11.2. 本题中的函数是“一次比一次”型的分式函数, 一般地, 对于函数 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ (a, b, c, d 为常数, $\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$), 我们习惯上对它进行分离常数来处理:

$$\frac{cx+d}{ax+b} = \frac{(ax+b)\frac{c}{a} + d - \frac{bc}{a}}{ax+b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b}$$

做这样的处理后, “一次比一次”型的分式函数变成了更简洁的常数比一次加上常数的形式, 另外, 我们还可以从分离常数后的形式中清楚地看到以下两点:

1° 函数 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ (a, b, c, d 为常数) 都可以看成是由反比例函数经过平移变换得到的. 读者可以自己叙述平移的方式.

2° 由于

$$\frac{cx+d}{ax+b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{bc}{a}}{ax+b} \neq \frac{c}{a}$$

故函数 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 的值域为 $(-\infty, \frac{c}{a}) \cup (\frac{c}{a}, +\infty)$. 这是一个重要的结论.

评注 2.11.3. 在解答第二小问的过程中, 我们利用函数的单调性得到了不等式 $f(2) < f(x) < f(6)$, 从而求出了 $f(x)$ 的范围. 由此可见单调性作为函数重要的不等式性质, 是计算函数值域的有力工具.

例 2.12. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 4, & x \geq 1 \\ \frac{a}{x}, & x < 1 \end{cases}$ 为单调函数, 求 a 的范围.

解. 因为 $f(x)$ 是单调函数, 根据二次函数知识可知, 函数 $f(x)$ 必是单调减函数. 又因为 $f(1) = 5 - a$, 若 $f(x)$ 是单调减函数, 则有 $5 - a \geq a$, 解得 $a \leq \frac{5}{2}$. 当 $x > 1$ 时, 因为函数 $f(x)$ 是减函数, 所以 $a > 0$. 当 $x < 1$ 时, 因为函数 $f(x)$ 是减函数, 根据二次函数知识可知, 其对称轴 $\frac{a}{2}$ 满足 $\frac{a}{2} \geq 1$, 解得 $a \geq 2$. 综上所述, $a \in [2, \frac{5}{2}]$. $\heartsuit$

评注 2.12.1. 解答本题的关键是理解单调函数的单调区间是整个定义域, 例如在本题中, 要求 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数. 另外, 如果函数用分段函数给出, 要注意勿忘考虑间断点处函数值的大小情况.

例 2.13. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1) > f(2m-1)$, 则 m 的取值范围是_____.

解. 因为函数的定义域为 $(-2, 2)$, 因此作用对象满足 $\begin{cases} -2 < m-1 < 2, \\ -2 < 2m-1 < 2. \end{cases}$, 又因为 $f(x)$ 是减函数, 所以 $f(m-1) > f(2m-1) \Leftrightarrow m-1 < 2m-1$. 由以上解得 $m \in (0, \frac{3}{2})$. $\heartsuit$

评注 2.13.1. 本题实际上考查了解关于 m 的函数不等式 $f(m-1) > f(2m-1)$ 的问题. 解函数不等式的一个最重要工具就是利用函数的单调性转化为代数不等式, 这也是函数单调性的另一个重要应用. 注意在解答求解函数不等式的问题中, 不要忽略作用对象要在函数定义域内这一约束条件.

在本小节的最后, 我们给出函数经四则运算和复合运算后得到新的函数的单调性的相关结论, 读者可以自己试着用单调性的定义对这些性质做简要说明.

1° 若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 在公共区间 A 上都是增(减)函数, 那么函数 $y = f(x) + g(x)$ 在 A 上也是增(减)函数.

2° 若两个 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在公共区间 A 上都是正值函数且都是增(减)函数, 那么函数 $y = f(x)g(x)$ 在 A 上也是增(减)函数.

3° 若函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在相关区间(为简洁起见, 此处不再详述, 参见复合函数的定义)上都是单调函数, 则函数 $y = f[g(x)]$ 也是单调函数, 且若 $y = f(u)$ 和 $u = f(x)$ 单调性相同, 则 $y = f[g(x)]$ 是增函数; 若 $y = f(u)$ 和 $u = f(x)$ 单调性相反, 则 $y = f[g(x)]$ 是减函数. 简单记忆为“同增异减”.

2.2.2 奇偶性与对称性

本节讨论的函数的奇偶性和对称性是函数重要的等式性质. 正如单调性沟通了作用对象的不等关系和函数值的不等关系, 奇偶性和对称性在作用对象的等量关系和函数值的等量关系之间建立联系.

定义 2.6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 且 D 是关于原点对称的数集. 若对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 是奇函数. 如果 $f(x)$ 在 0 处有定义, 则令 $x = 0$ 得 $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0$, 也就是说, 只要奇函数在 0 处有定义, 则必有 $f(0) = 0$.

若对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数和偶函数的定义十分重要, 因此我们有必要对定义作以下说明:

若数 0 在奇函数 $f(x)$ 的定义域 D 内, 则必有 $f(0) = 0$. 这是因为 $f(0) = -f(-0) = -f(0)$, 从而 $f(0) = 0$.

根据奇函数和偶函数的定义, 我们立刻知道函数奇偶性的运算性质:

设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是两个奇函数, $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是两个偶函数.

1° (四则运算) $f_1(x) \pm f_2(x)$ 是奇函数. 一般地, 若干个奇函数相加减得到的函数是奇函数.

$f_1(x)f_2(x)$ 是偶函数, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} (x \neq 0)$ 是偶函数. 一般地, 偶数个奇函数相乘或相除得到的函数是偶函数.

$g_1(x) \pm g_2(x)$, $g_1(x)g_2(x)$, $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} (g_2(x) \neq 0)$ 是偶函数. 一般地, 若干个偶函数加减乘除仍得到偶函数.

$f_1(x)g_2(x)$ 是奇函数, $\frac{f_1(x)}{g_2(x)} (g_2(x) \neq 0)$ 是偶函数. 一般地, 奇函数与偶函数相乘除得到奇函数. 由此立刻得到奇数个奇函数相乘或相除得到的函数为奇函数.

2° (复合运算) 若复合函数的定义域存在且满足复合函数定义中的要求, 则有:

$f_1[f_2(x)]$ 为奇函数, $g_1[g_2(x)]$ 为偶函数, $f_1[g_2(x)]$ 为偶函数, $g_1[f_2(x)]$ 为偶函数. 简单记忆为“全奇为奇, 有偶为偶”.

通过用 $-x$ 替换作用对象 x 的技巧, 结合奇函数和偶函数的定义很容易验证以上各条性质.

例 2.14. 证明命题: 任何定义域关于原点对称的函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和.

证明. 设定义域关于原点对称的函数为 $f(x)$, $x \in D$, 则 $f(x)$ 和 $f(-x)$ ($x \in D$) 必然同时有定义. 设 $f(x)$ 能表示成 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 是奇函数, $f_2(x)$ 为偶函数, 则有:

$$\begin{cases} f(x) &= f_1(x) + f_2(x), \\ f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) &= -f_1(x) + f_2(x), \end{cases}$$

这可以看成是一个关于 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的二元一次方程组, 解这个方程组, 我们就“解”出了所求的奇函数和偶函数:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

□

评注 2.14.1. 这个例题证明了一个重要的事实.

由奇函数和偶函数的定义可知, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称. 事实上, 函数图像关于原点对称等价于函数关于原点作对称变换后得到的函数与自身重合. 例如 $f(x)$ 关于原点作对称变换得到函数 $g(x) = -f(-x)$, 又因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 重合, 所以 $f(x) = -f(-x)$, 这正是奇函数的定义. 对于偶函数, 情况是完全类似的.

接下来我们讨论更加一般的**函数对称性**.

函数 $f(x)$ 满足 $f(2a - x) = 2b - f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称;

函数 $f(x)$ 满足 $f(2a - x) = f(x) \Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称.

当然, 这两种情况在几何上也等价于函数关于某点或某直线作对称变换后与自身重合. 在代数上, 对称性表现为: 相加和为定值的作用对象所对应的函数值具有某种关系. 例如函数 $f(x)$ 满足 $f(a + x) + f(b - x) = c$, 则函数以 $(\frac{a+b}{2}, c)$ 为对称中心 (思考: 为什么?), 表现在代数上则是如下话题: 如果作用对象的和为定值 $a + b$, 则其对应的函数值之和为定值 c . 对于轴对称性, 也有类似的理解方案

我们用下面的例题来示范函数对称性的应用:

例 2.15.

- (1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 的图像交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2 - x)$, 若函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 与 $y = f(x)$ 的图像交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m x_i = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. (1) 由题设, 函数 $f(x)$ 关于 $(0, 1)$ 对称, 又注意到函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 是由反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 向上平移 1 个单位后得到的函数, 所以函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 也关于 $(0, 1)$ 对称 (也可以验证函数 $y = g(x) = \frac{x+1}{x}$ 满足 $g(-x) = 2 - g(x)$, 从而得到函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 也关于 $(0, 1)$ 对称). 又因为 $(0, 1)$ 不是两个函数的交点, 所以 m 个交点可分为 $\frac{m}{2}$ 对, 其中每一对交点都关于 $(0, 1)$ 对称, 所以 $\sum_{i=1}^m x_i = 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = \frac{m}{2} \times 2 = m$, 所以 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = m$.

(2) 由题设, 函数 $f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称, 又根据二次函数知识, 函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 是由 $y = x^2 - 2x - 3$ 沿 x 轴作翻折变换得到的, 从而也关于直线 $x = 1$ 对称. 所以, 交点关于直线 $x = 1$ 对称分布, 当 m 为偶数时, m 个交点可分为 $\frac{m}{2}$ 对, 其中每一对交点都关于 $x = 1$ 对称, 所求和为

$\sum_{i=1}^m x_i = 2 \times \frac{m}{2} = m$; 当 m 为奇数时, 有且仅有一个交点在直线 $x = 1$ 上, 剩余的 $m-1$ 个交点仍然可以分成 $\frac{m-1}{2}$ 对, 其中每一对交点都关于 $x = 1$ 对称, 故所求和为 $\sum_{i=1}^m x_i = 2 \times \frac{m-1}{2} + 1 = m$.

综上, $\sum_{i=1}^m x_i = m$. ♡

例 2.16. 已知函数 $y = f(x+1)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2x-1) > f(x+2)$ 的解集为_____.

解. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数, 所以函数关于 y 轴对称. 又因为 $f(x)$ 是 $f(x+1)$ 向右平移一个单位得到的函数, 所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称 (或根据 $f(x+1)$ 是偶函数, $f(1+x) = f(1-x)$ 直接得到函数 $f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称). 根据对称性, $f(2x-1) = f(2-(2x-1)) = f(1+|2x-1-1|)$, $f(x+2) = f(2-(x+2)) = f(1+|x+2-1|)$, 所以原不等式等价于 $f(1+|2x-1-1|) > f(1+|x+2-1|)$, 又因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递减, 且 $1+|2x-1-1| \in [1, +\infty)$, $1+|x+2-1| \in [1, +\infty)$, 所以该函数不等式等价于 $|2x-1-1| < |x+2-1|$, 等价于 $(2x-1-1)^2 < (x+2-1)^2$, 解得 $x \in (\frac{1}{3}, 3)$, 故不等式的解集是 $(\frac{1}{3}, 3)$. ♡

评注 2.16.1. 这道例题还是利用单调性解函数不等式的问题, 事实上, 对于在对称轴左侧递增 (递减), 在对称轴右侧递减 (递增) 的对称函数, 比较函数值的大小只需比较作用对象与轴的距离, 作用对象离轴越远, 函数值越小 (大). 在本题中, $f(2x-1) > f(x+2)$ 等价于 $2x-1$ 与轴的距离小于 $x+2$ 与轴的距离, 因此原不等式立刻等价于 $|2x-1-1| < |x+2-1|$.

本题也有分类讨论的做法, 但稍显麻烦.

评注 2.16.2. 事实上, 如果函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称, 且 $f(x)$ 在区间 (c, d) 上递增 (递减) ($a \leq c < d$), 那么 $f(x)$ 在 $(-d, -c)$ 递增 (递减); 如果函数 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称, 且 $f(x)$ 在 (c, d) 递增 (递减) ($a < c < d$), 那么 $f(x)$ 在 $(-c, -d)$ 递减 (递增). 奇函数的值域关于原点对称, 且奇函数的最值和最值点总是成对相反出现的.

2.2.3 周期性

周期性是函数的另外一种重要的等式性质. 与奇偶性与对称性不同的是, 周期性描述的是差为定值的作用对象对应的函数值的等量关系. 我们先来看下面的例题:

例 2.17. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -f(x)$. 若当 $x \in [0, 1)$ 时 $f(x) = x^2 + 2x$, 求:

- (1) $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上的表达式,
- (2) $f(x)$ 在 $[2, 3)$ 上的表达式,
- (3) $f(x)$ 在 $[9, 10)$ 上的表达式.

解. (1) 当 $x \in [1, 2)$ 时, 为了应用函数性质, 我们考虑到 $x-1 \in [0, 1)$, 则 $f(x) = -f(x-1) = -[(x-1)^2 + 2(x-1)] = -x^2 + 1$.

(2) 当 $x \in [2, 3)$ 时, 考虑到 $x-2 \in [0, 1)$, 则 $f(x) = -f(x-1) = -[-f(x-2)] = f(x-2) = (x-2)^2 + 2(x-2) = x^2 - 2x$.

(3) 当 $x \in [9, 10)$ 时, 考虑到 $x - 9 \in [0, 1)$, $f(x - 9) = (x - 9)^2 + 2(x - 9)$, 又因为 $f(x - 9) = -f(x - 8) = f(x - 7) = -f(x - 6) = f(x - 5) = -f(x - 4) = f(x - 3) = -f(x - 2) = f(x - 1) = -f(x)$, 所以 $f(x) = -(x - 9)^2 - 2(x - 9) = -x^2 + 16x - 63$. $\heartsuit$

评注 2.17.1. 在解答本题的过程中, 我们多次使用了用其他的作用对象替换 $f(x + 1) = -f(x)$ 中的 x 的技巧, 从而反复应用了函数性质, 在自变量的关系与函数值的关系之间建立了联系.

定义 2.7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个常数 $T \neq 0$, 使得对任意的 $x \in D$, 都有

$$f(x + T) = f(x),$$

那么称 $f(x)$ 是**周期函数**, T 是函数 $f(x)$ 的一个**周期**. 如果 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小值 T_0 , 那么称 T_0 为周期函数 $f(x)$ 的一个**最小正周期**. 并不是所有周期函数都有最小正周期, 例如定义在 $\mathbb{R}$ 上的常值函数 $y = c$ (c 为常数), 任何一个正数都是它的周期, 因此周期函数 $y = c$ 没有最小正周期. 习惯上, 我们说函数的周期都是指最小正周期.

显然, 若一个函数有周期 T , 那么 T 的所有整数倍也是函数的周期. 即 $f(x + nT) = f(x), n \in \mathbb{Z}$.

例 2.18. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 且对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2)[1 - f(x)] = 1 + f(x)$. 已知 $f(1) = 2 + \sqrt{3}$, 则 $f(2021) =$ _____.

解. 由题设知 $f(x) \neq 1$, 所以 $f(x + 2) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$, $f(x + 4) = f((x + 2) + 2) = \frac{1 + f(2x)}{1 - f(2x)} = \frac{1 + \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} = \frac{1 - f(x) + 1 + f(x)}{1 - f(x) - 1 - f(x)} = -\frac{1}{f(x)}$, $f(x + 8) = f((x + 4) + 4) = -\frac{1}{f(x + 4)} = f(x)$, 所以, $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数, $f(2021) = f(5 + 8 \times 252) = f(5) = f(1 + 4) = -\frac{1}{f(1)} = \sqrt{3} - 2$. $\heartsuit$

评注 2.18.1. 事实上, 我们有如下事实: 若 $f(x + t) = \varphi(f(x))$, 且函数 $\varphi(x)$ 的 n 次迭代等于作用对象本身 (记 $\varphi^{(0)} = x, \varphi^{(1)} = \varphi(x), \varphi^{(2)}(x) = \varphi(\varphi(x)), \varphi^{(3)}(x) = \varphi(\varphi(\varphi(x))), \dots, \varphi^{(n+1)} = \varphi(\varphi^{(n)}(x)), \dots$, 并称 $\varphi^{(n)}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的 n 次迭代), 即 $\varphi^{(n)}(x) = x$, 则 $f(x)$ 是以 nt 为周期的周期函数.

例如函数 $\varphi(x) = c - x$ (c 为常数), $\varphi^{(2)}(x) = x$; $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$, $\varphi^{(2)} = x$; 以及本题中的 $\varphi(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$, $\varphi^{(4)}(x) = x$.

事实上, 在例 2.17 中, $f(x + 1) = -f(x)$, 而 $\varphi(x) = -x$ 满足 $\varphi^{(2)}(x) = x$, 所以立刻得到 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

根据以上事实, 思考: 若 $f(x)$ 满足 $f(a + x) + f(b + x) = c$, 则 $f(x)$ 的一个周期为多少?

例 2.19. 证明: 若函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的图像关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ 都对称, 则 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数.

证明. 将几何语言“翻译”为函数的等式性质为:

$$f(x) = 2y_0 - f(2a - x),$$

$$f(x) = f(2b - x),$$

对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 反复应用以上两个式子, 我们得到:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2y_0 - f(2a - x) \\ &= 2y_0 - f(2b - 2a + x) \\ &= 2y_0 - (2y_0 - f(2b - 2a + (2b - 2a + x))) \\ &= f(4b - 4a + x). \end{aligned}$$

所以 $4|b - a|$ 是函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的周期. 故 $f(x)$ 是周期函数. $\square$

用完全类似的方法, 可以证明如下结论:

1° 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的图像关于直线 $x = a$ 和直线 $x = b$ 都对称, 则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b - a|$.

2° 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的图像关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ 都对称, 则 $f(x)$ 的一个周期为 $4|b - a|$.

3° 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的图像关于点 $A(a, y_0)$ 和点 $B(b, y_0)$ 都对称, 则 $f(x)$ 的一个周期为 $2|b - a|$.

评注 2.19.1. 以上结论可以总结为“双对称”会引起函数具有周期性.

例 2.20. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 满足 $f(1 - x) = f(1 + x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ _____.

解. 因为函数 $f(x)$ 关于原点对称, 关于直线 $x = 1$ 也对称, 根据上述结论, $f(x)$ 是一个以 4 为周期的周期函数, 且 $f(0) = 0$. 所以 $f(2) = f(0) = 0, f(4) = f(0) = 0, f(3) = f(-1) = -f(1) = -2$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) = f(49) + f(50) = f(1) + f(2) = 2$. $\heartsuit$

2.2.4 抽象函数的性质

例 2.21. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(y) = f(x + y)$, 证明:

(1) $f(0) = 0$;

(2) $f(2x) = 2f(x)$;

(3) 若对任意的 $x > 0$, 有 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

证明. (1) 令 $x = 0, y = 0$ 得 $2f(0) = f(0)$, 所以 $f(0) = 0$,

(2) 令 $y = x$, 得 $f(x) + f(x) = f(2x)$, 即 $f(2x) = 2f(x)$.

(3) 任取 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2$, 利用函数的抽象性质, $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. $\square$

评注 2.21.1. 抽象函数的性质是通过将某种性质用符号语言抽象化地给出的, 在解答与抽象函数性质的相关问题时, 只要明确判断单调性、对称性等性质的基本原则, 并灵活应用抽象函数的性质即可.

评注 2.21.2. 在解答第一小问的过程中, 我们用到了赋值的方法, 在抽象函数问题中, 如果我们需要计算出某点出的函数值, 通常需要我们合理地作用对象进行赋值以达到目的. 在解答第二小问的过程中则是用到了以 x 替换 y , 变更作用对象的技巧. 这一技巧通常能实现由已知的抽象函数性质推出其他的抽象函数性质.

例 2.22. 已知定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \neq 0$, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y)$, 证明:

(1) $f(1) = 1$;

(2) 若对任意的 $x > 1$, 有 $f(x) > 1$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

证明. (1) 令 $x = y = 1$ 得 $[f(1)]^2 = f(1)$, 因为 $f(x) \neq 0$, 所以 $f(1) = 1$.

(2) 任取 x_1, x_2 满足 $1 < x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}) = f(x_1) - f(x_1)f(\frac{x_2}{x_1}) = [1 - f(\frac{x_2}{x_1})]f(x_1)$, 根据函数的抽象性质, $f(x_1) > 0$, $f(\frac{x_2}{x_1}) > 1$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. $\square$

例 2.23. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) > 0$, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 证明:

(1) $f(0) = 1$;

(2) 若对任意的 $x > 0$, 有 $f(x) > 1$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

证明. (1) 令 $x = y = 0$ 的 $f(0) = [f(0)]^2$, 因为 $f(x) > 0$, 所以 $f(0) = 1$.

(2) 任取 x_1, x_2 满足 $x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1)[1 - \frac{f(x_2)}{f(x_1)}] = f(x_1)[1 - f(x_2 - x_1)]$, 因为 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $f(x_2 - x_1) > 1$, 又因为 $f(x_1) > 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增. $\square$

例 2.24. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(y) = f(x \cdot y)$, 证明:

(1) $f(1) = 0$;

(2) 若对任意的 $x > 1$, 有 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

证明. (1) 令 $x = 1$ 得 $2f(1) = f(1)$, 所以 $f(1) = 0$.

(2) 任取 x_1, x_2 满足 $1 < x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = f(\frac{x_1 x_2}{x_1}) - f(x_1) = f(\frac{x_2}{x_1}) + f(x_1) - f(x_1) = f(\frac{x_2}{x_1}) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. $\square$

例 2.25. 已知函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x, y \in (-1, 1)$, 都有 $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$,

(1) 证明: 对于任意的 $x, y \in (-1, 1)$, $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$,

(2) 证明: 若当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 单调递增.

(1)

证明. 因为 $x, y \in (-1, 1)$, 所以 $1+xy > 0$, 所以 $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$ 等价于 $-1-xy < x+y < 1+xy$, 下面证明这个不等式成立.

因为 $xy + 1 - x - y = (x-1)(y-1) > 0$, 所以 $x+y < 1+xy$, 不等式右边成立; 又因为 $xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1) > 0$, 所以 $x+y > -1-xy$, 不等式左边成立, 综上所述不等式 $-1-xy < x+y < 1+xy$ 成立, 即对于任意的 $x, y \in (-1, 1)$, $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$. $\square$

(2)

证明. 令 $x = 0$, 则 $2f(0) = f(0)$, 解得 $f(0) = 0$, 令 $y = -x$, 则 $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, 所以函数 $f(x), x \in (-1, 1)$ 是奇函数; 任取 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}) = -f(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2})$, 因为 $x_2 - x_1 > 0$, $1 - x_1 x_2 > 0$, 且由第一小问知 $\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} < 1$, 所以 $0 < \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} < 1$, 所以 $f(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}) > 0$, 所以 $-f(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 单调递增. $\square$

例 2.26. 已知函数 $f(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}$, 若对任意的 $x \in [a, a+2]$, $f(x+a) \geq 2f(x)$ 恒成立, 求 a 的范围.

解. 本题中出现的函数不等式不能直接处理, 我们考虑将右边的 $2f(x)$ 变成函数值的形式, 进而用单调性来转化 (参见前面有关函数不等式的例题). 注意到函数 $f(x)$ 具有如下的抽象性质: 对任意的 x, y , $f(x)f(y) = x|x|y|y| = xy|xy| = f(xy)$, 所以 $2f(x) = f(\sqrt{2})f(x) = f(\sqrt{2}x)$, 所以题设等价于 $f(x+a) \geq f(\sqrt{2}x)$ 恒成立, 又因为 $f(x)$ 是增函数, 因此函数不等式又等价于 $x+a \geq \sqrt{2}x$, 即 $a \geq (\sqrt{2}-1)x$ 对任意的 $x \in [a, a+2]$ 恒成立, 为此只需 $a \geq (\sqrt{2}-1)(a+2)$, 解得 $a \in [\sqrt{2}, +\infty)$, 即 a 的范围为 $[\sqrt{2}, +\infty)$. $\heartsuit$

评注 2.26.1. 本题给出的函数虽然是一个具体函数, 但是要解决这个问题却需要利用到函数的抽象性质. 事实上, 如果能够注意到 $2f(x) = 2x|x| = \sqrt{2}x|\sqrt{2}x|$, 从而主动地将 $2f(x)$ 写成 $f(\sqrt{2}x)$ 也能完成转化. 另外, 处理函数不等式一般都要通过单调性转化为代数不等式来处理. 如果问题中给出的函数不等式两边不全是函数值的形式, 要想办法利用函数的等式性质进行转化. 本题同时也是一个“恒成立”问题, 我们以后会详细讨论这类问题的处理方法.

2.2

1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2}{5}ax$, 其中 $a > 0$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数, 则 a 的取值范围为_____.
2. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调函数, 对任意 $x > 0$ 有 $f(x) > -\frac{4}{x}$, $f(f(x) + \frac{4}{x}) = 3$, 则 $f(8) =$ _____.
3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, $f(1) = 2$, 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数, 且对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上的最大值是_____.
4. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{\sqrt{1+x^2} + x + 1}$ 在 $[-3, 3]$ 上的最大值和最小值的和为_____.
5. 已知 $f(x) = x + g(x)$, 其中 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上, 最小正周期为 2 的函数. 若 $f(x)$ 在区间 $[2, 4)$ 上的最大值为 1, 则 $f(x)$ 在区间 $[10, 12)$ 上的最大值为_____.
6. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数, 且当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = x^2 - 16x + 60$, 则 $f(2\sqrt{10})$ 的值是_____.
7. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 若对任意实数 x , 有 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2x$, 则 $f(10\sqrt{3}) =$ _____.

8. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的具有周期 2π 的奇函数, 并且 $f(3) = f(4) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 10]$ 中至少有_____个零点.
9. 已知函数 $f(x+1)$ 为奇函数, 函数 $f(x-1)$ 为偶函数, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(4) =$ _____.
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且函数 $y = f(x+1)$ 为偶函数, 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = x^3$, 则 $f(\frac{9}{2}) =$ _____.
11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+2) = f(x) + 2$, 则 $\sum_{k=1}^{2014} f(k) =$ _____.
12. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f(-100) + f(-101) =$ _____.
13. 已知函数 $f(x) = x^3 (x \in \mathbb{R})$, 函数 $g(x)$ 满足 $g(x) + g(2-x) = 0 (x \in \mathbb{R})$, 若函数 $h(x) = f(x-1) - g(x)$ 恰有 2019 个零点, 则所有的这些零点之和为_____.
14. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 对于下列 (1) - (4) 四个命题:
- (1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(f(x))$ 也是奇函数;
 - (2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f(f(x))$ 也是周期函数;
 - (3) 若 $f(x)$ 是单调递减函数, 则 $f(f(x))$ 是单调递增函数;
 - (4) 若方程 $f(f(x)) = x$ 有实根, 则方程 $f(x) = x$ 也有实根,
- 正确的命题共有_____个.
15. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x - 5$, 实数 a, b 满足 $f(a) = 3, f(b) = 23$, 则 $a + b =$ _____.
16. 已知 α, β 满足 $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 4 = 0, \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta - 2 = 0$, 则 $\alpha + \beta =$ _____.
17. 设 x, y 是实数, 且满足 $\begin{cases} (x-1)^3 + 2105(x-1) = -1, \\ (y-1)^3 + 2105(y-1) = 1, \end{cases}$ 则 $x + y =$ _____.
18. 已知 $f(x) = x|x|$, 若对任意的 $x \geq 1$ 有 $f(x+m) + mf(x) < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.
19. 已知函数 $f(x) = x^3 + 3x$, 对任意的 $m \in [-2, 2]$, $f(mx-8) + f(2^x) < 0$ 恒成立, 则正实数 x 的取值范围为_____.
20. 若函数 $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + ax + b)$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 都满足 $f(x) = f(4-x)$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.
21. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(2-x) = 2 - f(x) (x \in \mathbb{R})$, 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 与 $y = f(x)$ 的图象的交点为 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) =$ _____.

22. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 均有 $\begin{cases} f(x+2016) \leq f(x) + 2016, \\ f(x+2017) \geq f(x) + 2017, \end{cases}$ 且 $f(1) = 2$, 则 $f(2018) = \underline{\hspace{2cm}}$.

23. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(x+1) + f(1-x) = 0$, $f(x+2) - f(2-x) = 0$, 且 $f(\frac{2}{3}) = 1$, 则 $f(\frac{1000}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2.3

二次函数与二次方程

我们在前面几个小节讨论了函数的几个基本性质, 现在我们将以这些基本性质为基础, 从新的视角来研究二次函数和二次方程问题. 二次函数的形式简单, 应用极其广泛, 在中学数学中占有重要的地位.

2.3.1 二次函数的图像与性质

形如 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的函数称为**二次函数**. 也常常写成:

$$f(x) = a(x-k)^2 + m (a \neq 0) \text{ (顶点式)},$$

其中 (k, m) 是二次函数的顶点坐标, 由顶点式的形式可知, $f(x)$ 可以由函数 $y = ax^2$ 经平移变换得到.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) (a \neq 0)$ (零点式, 其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根)

我们在初中课程中已经学习过, 二次函数的图像是抛物线.

1° 对称轴 $f(x)$ 关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称.

2° 顶点 对称轴与抛物线的交点 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 称为顶点. 当 $a > 0$ 时, 顶点是抛物线的最低点, 当 $a < 0$ 时, 顶点是抛物线的最高点.

3° 开口 当 $a > 0$ 时, 开口向上; 当 $a < 0$ 时, 开口向下.

4° 与 x 轴的位置关系 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 二次函数图像与 x 轴有两个不同的交点; 当 $\Delta = 0$ 时二次函数图像与 x 轴相切于 $(-\frac{b}{2a}, 0)$; 当 $\Delta < 0$ 时, 二次函数图像与 x 轴没有交点.

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 具有如下基本性质:

1° 对称性: 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(-\frac{b}{2a} + x) = f(\frac{b}{2a} + x)$. 即二次函数 $f(x)$ 关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称.

2° $f(0) = c$.

3° 若令 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 则 $f(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$.

4° 单调性: 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 上递减, 在区间 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 上递增, 在区间 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 递减.

5° 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有最小值 $f_{\min}(x) = f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有最大值 $f_{\max} = f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

2.3.2 函数的界与最值, 二次函数的闭区间最值问题

为了进一步讨论二次函数问题, 我们有必要事先引入函数有界性的概念.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\exists$ 常数 M , 使得对于 $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$, 则称 M 为 $f(x)$ 的**上界**, $f(x)$ 为**有上界**的函数. 例如二次函数 $y = -x^2$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 上满足 $y = -x^2 \leq 0$, 所以函数 $f(x) = -x^2$ 是有上界的函数, 0 是它的一个上界, 并且任何一个大于 0 的数也是它的上界. 由此可见有上界的函数的上界不是唯一的, 可以有无穷多个上界. 我们将最小的上界称为**上确界**, 记作 $\sup f(x)$, 例如二次函数 $f(x) = -x^2$ 的上确界 $\sup f(x) = 0$. 一般地, 虽然有上界的函数的上界可以有无穷多个, 但是有上界函数的上确界有且仅有一个.

类似地可定义**有下界**的函数, $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\exists$ 常数 m , 使得对于 $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \geq m$, 则称 m 为函数 $f(x)$ 的**下界**, $f(x)$ 为**有下界**的函数. 我们将最大的下界称为**下确界**, 记作 $\inf f(x)$, 有下界函数的下确界有且仅有一个.

既有上界又有下界的函数称为**有界函数**, 换言之, 我们称 $f(x)$ 是有界函数, 如果 $\exists$ 常数 M, m , 使得对于 $\forall x \in D$, 都有 $m \leq f(x) \leq M$.

我们说函数 $f(x)$ 在定义域 D 上有**最大值** M , 如果 $f(x)$ 满足: ① $\forall x \in D, f(x) \leq M$, ② $\exists x_1 \in D, f(x_1) = M$, 显然根据上确界的定义, 函数 $f(x)$ 的最大值同时也必是 $f(x)$ 的上确界. 但是我们要提醒读者注意, 确界和最值是不同的概念, 有上界的函数不一定有最大值, 函数 $f(x)$ 的上确界也不一定是 $f(x)$ 的最大值, 例如函数 $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0)$ 的上确界为 0, 但是它没有最大值. 类似地, 读者可以试着自己给出函数 $f(x)$ 在定义域 D 上有**最小值** m 的概念.

接下来我们基于函数的界与最值的概念讨论几类“恒成立与能成立”问题的转化, 这类问题最终都能转化为求函数的确界或最值的问题.

1° (恒成立问题)

$$\forall x \in D, f(x) \leq a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow a \geq \sup f(x),$$

$$\forall x \in D, f(x) < a \text{ 恒成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \sup f(x), \text{ 如果 } f(x) \text{ 以 } \sup f(x) \text{ 为最大值,} \\ a \geq \sup f(x), \text{ 如果 } f(x) \text{ 无最大值.} \end{cases}$$

注意后者的转化要分函数有无最大值 (上确界能不能取到) 两种情况来讨论, 两种情况所对应的转化是不同的. $\forall x \in D, f(x) \geq a$ 恒成立和 $\forall x \in D, f(x) > a$ 恒成立的转化是完全类似的, 读者可以试着自己叙述.

2° (能成立问题)

$$\exists x \in D, \text{ 使得 } f(x) < a \Leftrightarrow a > \inf f(x),$$

$$\exists x \in D, \text{ 使得 } f(x) \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \inf f(x), \text{ 如果 } f(x) \text{ 以 } \inf f(x) \text{ 为最小值,} \\ a > \inf f(x), \text{ 如果 } f(x) \text{ 无最小值.} \end{cases}$$

注意后者的转化要分函数有无最大值(上确界能不能取到)两种情况来讨论,两种情况所对应的转化是不同的. $\exists x \in D$, 使得 $f(x) > a$ 和 $\exists x \in D$, 使得 $f(x) \geq a$ 的转化是完全类似的,读者可以试着自己叙述.

3° (双变量问题)

假设 $f(x)$ 在 D_1 上、 $g(x)$ 在 D_2 上均有最值:

$$\forall x_1 \in D_1, \forall x_2 \in D_2, f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}.$$

$$\forall x_1 \in D_1, \exists x_2 \in D_2, f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}.$$

$$\exists x_1 \in D_1, \forall x_2 \in D_2, f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq g(x)_{\max}.$$

$$\exists x_1 \in D_1, \exists x_2 \in D_2, f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}.$$

以上列举了 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 的四种恒成立与能成立条件的转化, $f(x_1) > g(x_2)$ 也有相应的四种条件,读者可以尝试自己叙述这四种条件的转化.另外如果函数只有确界而没有最值,则要**根据确界的情况考虑等号的取舍问题**,对于这一点的理解可以参考 1° 和 2° 两类条件的转化.

例 2.27. $f(x) = \frac{1}{x}$, 若 $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 均可以构成三角形的三条边, 求 $\frac{b}{a}$ 的范围.

解. 根据题意, $f(x_1), f(x_2), f(x_3) > 0$, 所以 $0 < a < b$, 即 $\frac{b}{a} > 1$. 条件等价于 $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$ 恒成立. 又因为 $\inf[f(x_1) + f(x_2)] = \frac{2}{b}$, $\sup f(x_3) = \frac{1}{a}$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_3)$ 恒成立进一步等价于 $\frac{2}{b} \geq \frac{1}{a}$ (思考: 这里为什么可以取等号?), 解得 $\frac{b}{a} \leq 2$. 综上所述, $\frac{b}{a} \in (1, 2]$.

♡

例 2.28. 对 $\forall a \in [-1, 1]$, $x^2 - ax - 6 \geq 0$ 恒成立, 求 x 的范围.

解. 记 $f(a) = -xa + x^2 - 6$ ($a \in [-1, 1]$, x 看成参数), 则这一个关于 a 的一次函数, $x^2 - ax - 6 \geq 0$ 恒成立等价于 $f(a)_{\min} \geq 0$. 根据一次函数的性质, $f(a)_{\min} = \min\{f(-1), f(1)\}$ (其中记号 $\min\{a, b\}$

表示 a, b 两者中的较小者), 所以进一步等价于
$$\begin{cases} x + x^2 - 6 \geq 0 \\ -x + x^2 - 6 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty),$$

即 x 的范围是 $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

♡

评注 2.28.1. 在解答这道例题的过程中, 合适的理解方案是将 a 看成主元, x 当作参数处理. 初学者可能会由于习惯于将 x 当作主元, 无法完成恒成立问题的转化, 从而导致解答过程过于繁复, 甚至结果出错.

我们在讨论二次函数闭区间最值问题之前, 先介绍如下的事实:

定理 2.3.1. 设函数 $f(x)$ 是闭区间 $[s, t]$ 上的连续函数, 则它的函数值存在最大值和最小值, 且其最大值只能在区间端点或区间内的极大值点¹处取得, 其最小值只能在区间端点或区间内的极小值

¹极值点的正式概念将在以后的课程中介绍, 在二次函数问题中, 只有 $x = -\frac{b}{2a}$ 即对称轴处是极值点.

点处取得. 例如: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in [s, t]$, $a > 0$, 当 $-\frac{b}{2a} \in (s, t)$ (即轴在区间内) 时, 则 $f(x)_{\min} = \min\{f(s), f(t), f(-\frac{b}{2a})\} = f(-\frac{b}{2a})$, $f(x)_{\max} = \max\{f(s), f(t)\}$; 当 $-\frac{b}{2a} \notin (s, t)$ (即轴在区间外, 包括轴在端点处的情况) 时, 则 $f(x)_{\min} = \min\{f(s), f(t)\}$, $f(x)_{\max} = \max\{f(s), f(t)\}$.

$a < 0$ 的情况留给读者自己叙述.

以上定理将是解决二次函数区间最值问题的有力支撑.

例 2.29. 讨论 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ 在闭区间 $[a, a+1]$ 上的最小值.

解. 这是最小值问题, 需要讨论轴和区间的位置关系.

① 当 $a < \frac{3}{4} < a+1$ 即 $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = f(\frac{3}{4}) = \frac{23}{8}$.

② 当 $a \geq \frac{3}{4}$ 或 $a+1 \leq \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = \min\{f(a), f(a+1)\} = \min\{2a^2 - 3a + 4, 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 4\} = \begin{cases} 2a^2 + a + 3, & a \leq \frac{1}{4}, \\ 2a^2 - 3a + 4, & a > \frac{1}{4} \end{cases}$, 所以当 $a \leq -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 2a^2 + a + 3$; 当 $a \geq \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 2a^2 - 3a + 4$.

综上所述, 当 $x \leq -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 2a^2 + a + 3$; 当 $-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{23}{8}$; 当 $x \geq \frac{3}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 2a^2 - 3a + 4$. ♡

例 2.30. 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[2a, 2b]$, 求 a, b 的值.

解. 分轴在区间内和轴在区间外两种情况讨论:

① 当 $a < 0 < b$ 时, $f(x)_{\max} = f(0) = \frac{13}{2} = 2b$, 所以 $b = \frac{13}{4}$; $f(x)_{\min} = \min\{f(a), f(b)\} = 2a$, 因为 $b = \frac{13}{4}$, 所以 $f(b) = \frac{39}{32} > 0$, 而 $2a < 0$, 所以 $f(b) \neq 2a$, 所以 $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2a$, 解得 $a = -2 - \sqrt{17}$ (另一根为正, 舍弃), 此时 $[a, b] = [-2 - \sqrt{17}, \frac{13}{4}]$.

② 当 $a < b \leq 0$ 或 $b > a \geq 0$ 时,

$$f(x)_{\max} = \max\{f(a), f(b)\} = \max\{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}\} = 2b,$$

$$f(x)_{\min} = \min\{f(a), f(b)\} = \min\{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2}, -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2}\} = 2a.$$

若 $\begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2a, \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2b. \end{cases}$, 则 a, b 是二次方程 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{13}{2}$ 的两个不同实根, 但是这个方程两根异号, 这与 $a < b \leq 0$ 或 $b > a \geq 0$ 矛盾, 不合题意. ♡

评注 2.30.1. 这里两根异号是由韦达定理得到的, 在有关二次方程的问题中, 用二次方程韦达定理两根之积的形式来判断异号还是同号是常用的技巧.

若 $\begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 2b, \\ -\frac{1}{2}b^2 + \frac{13}{2} = 2a. \end{cases}$, 两式相减得 $-\frac{1}{2}(b-a)(b+a) = 2(a-b)$, 因为 $b-a \neq 0$, 所以

$a+b=4$, 代入第一个方程得 $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{13}{2} = 8-2a$, 解得 $a=3$ 或 $a=1$, 又因为当 $a=3$ 时 $b=1 < a$, 故舍去, 所以 $a=1$, $b=3$, 此时 $[a, b] = [1, 3]$, 符合题意.

综上所述, $a = -2 - \sqrt{17}, b = \frac{13}{4}$ 或 $a = 1, b = 3$.

例 2.31. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$, 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n](m < n)$, 值域为 $[km, kn](k > 1)$, 求 n 的值.

解. 首先考虑轴与区间的位置关系, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$, 注意到 $kn \leq \frac{1}{2}$, 所以 $n \leq \frac{1}{2k} < 1$, 所以轴在区间右侧, 所以函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 递增, $f(m) < f(n)$. 所以 $f(x)_{\min} = f(m) = -\frac{1}{2}m^2 + m = km$, $f(x)_{\max} = f(n) = -\frac{1}{2}n^2 + n = kn$, 所以 m, n 是关于 t 的二次方程 $-\frac{1}{2}t^2 + (1-k)t = 0$ 的两个根. 又因为 $m < n$, 所以 $m = 2(1-k), n = 0$, 即 n 的值为 0. $\heartsuit$

评注 2.31.1. 在考虑轴与区间的位置关系时, 如果题设条件较多, 要充分挖掘题给条件, 尽可能地确定轴与区间的关系. 例如在本题中, 通过挖掘题给条件即可比较出 n 和 1 的大小关系, 从而确定轴与区间的位置关系. 如果没有看出这一点就盲目讨论则会使解答过于繁复, 这是不可取的.

2.3.3 二次方程根的分布

对于有一般的函数 $y = f(x)$, 我们把 $f(x) = 0$ 的点 x 叫做 $f(x)$ 的**零点**. 这样, 函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数解, 也就是函数 $f(x)$ 图像与 x 轴的公共点的横坐标, 即方程 $f(x) = 0$ 有实数解 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有公共点. 由此可知方程和函数有着重要的联系, 对于求方程 $f(x) = 0$ 的实数解的问题, 都可以考虑成确定函数 $f(x)$ 的零点.

对于零点附近函数值的变化规律, 我们有如下事实:

定理 2.3.2 (零点存在定理). 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且有 $f(a)f(b) < 0$ (即有 $f(a) < 0 < f(b)$ 或 $f(b) < 0 < f(a)$), 则存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, 这个点 c 同时也是方程 $f(x) = 0$ 的解.

这条定理在直观上是很容易被接受的, 我们设想 x 自 a 点连续不断地移向 b 点, 这时候点 $(x, f(x))$ 则是连续地在一条连续曲线上自 $(a, f(a))$ 到 $(b, f(b))$ 移动. 因为曲线的两个端点分处于 x 轴之两侧, 所以这条连续曲线必然与 x 轴相交, 交点的 x 坐标就是我们想找的点 c , 如图 2.9 所示. 不连续的函数显然没有定理所说的性质.

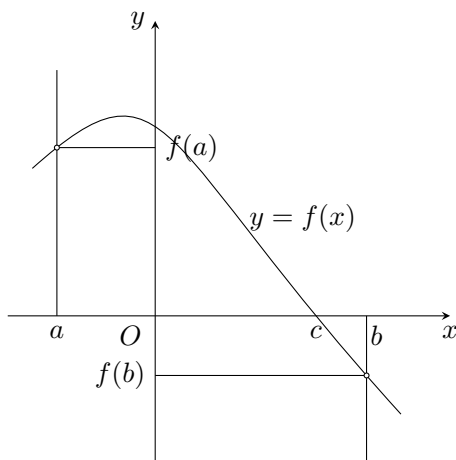


图 2.9:

上述定理反之不成立, 即如果在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 (a, b) 有零点, 则 $f(a)f(b)$ 不一定小于零. 例如函数 $y = x^2$ 在 $(-1, 1)$ 上有零点 0, 但是 $f(-1)f(1) > 0$. 事实上, 只有函数在开区间 (a, b) 上有奇数个变号零点时, 才有 $f(a)f(b) < 0$, 变号零点指的是连续函数 $f(x)$ 的图像穿过的零点, 也就是在零点附近的两侧的函数值取值是异号的.

二次函数与二次方程之间有着密切的联系, 我们已经知道二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴的交点个数按照 $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$ 分为三种情况, 相应地二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况也分为三种. 此外, 二次方程的根与系数还有如下的联系:

定理 2.3.3 (韦达定理). 设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的 $\Delta \geq 0$, x_1, x_2 是它的两个根, 根据求根公式立刻得到根与系数有如下关系:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

这个命题通常被称为韦达定理.

二次方程根的分布问题实际上是二次函数零点的分布问题, 因此要想解决二次方程根的分布问题, 必须要用到二次函数的性质.

例 2.32. 若关于 x 的二次方程 $3x^2 - 5x + a$ 的一根大于 -2 而小于 0 , 另一根大于 1 而小于 3 , 求 a 的范围.

解. 本题由于抛物线开口向上, 所以只需画出一个草图或是利用零点存在定理就能发现, 当 $f(-2) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(3) > 0$ 时就能使方程的根落在题设要求的区间内. 反过来, 如果不满足以上条件, 简单分析可知方程的两根不可能满足题设的分布. 解以上不等式组可得 $-12 < x < 0$. $\heartsuit$

评注 2.32.1. 从这道题的解答过程中可以发现, 对于开口方向和轴的位置都确定的二次函数, 要使对应的二次方程的根满足一定的分布条件, 只需限制某些位置函数值的符号即可, 这是基于二次函数的图像特性和零点存在定理. 而在有些问题中则需要注意考虑轴处函数值的符号、判别式的取值和开口方向问题. 二次方程根的分布问题情况多变、处理方式灵活, 需要通过一定量的训练来积累经验.

例 2.33. 若关于 x 的二次方程 $mx^2 + (2m-1)x - m + 2 = 0 (m > 0)$ 的两个互异的根都小于 1 , 则实数 m 的取值范围是_____.

解. 抛物线开口向上, 所以 $f(\infty) > 0$ (注意 $f(\infty) > 0$ 只是一个记号, 表示 x 充分大或充分小时的函数值大于零). 当 $f(\text{轴}) = \frac{4m(-m+2) - (2m-1)^2}{4m} < 0, f(1) > 0$ 时, 可以使方程的根落在题设要求的范围内. 反过来, 如果不满足以上条件, 简单分析可知方程的两根不可能满足题设的分布. 解以上不等式组得 $m > \frac{3+\sqrt{7}}{4}$. 所以 m 的范围是 $(\frac{3+\sqrt{7}}{4}, +\infty)$. $\heartsuit$

评注 2.33.1. 二次函数的开口方向实际上决定的是“无穷处的函数值”, 在本题中我们限制了轴处和 1 处函数值的符号, 根据零点存在定理, 二次函数在 $(-\infty, \text{轴})$ 和 $(\text{轴}, 1)$ 上分别有一个零点, 而这正是题设中根的分布条件. 此外我们要指出, 限制轴处函数值的符号和限制判别式的取值是等效的工作, 本质上都是依据根的情况对 $b^2 - 4ac$ 的符号提出限制.

2.3.4 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$

函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0$) 具有非常广泛的应用, 下面我们来讨论它的一些性质.

$f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

若 $b > 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ 时, 等号成立; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -[a(-x) + \frac{b}{(-x)}] \leq -2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时, 等号成立. 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty)$.

若 $b < 0$, 显然 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$.

$f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 是两个奇函数的和, 因此它也是一个奇函数.

下面我们来研究它的单调性:

任取 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 则

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) + b(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}) = a(x_2 - x_1)(1 - \frac{b}{x_1 x_2}).$$

若 $b > 0$, 当 $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{\frac{b}{a}}$ 时, 得 $f(x_2) - f(x_1) < 0$; 当 $\sqrt{\frac{b}{a}} \leq x_1 < x_2$ 时, 得 $f(x_2) - f(x_1) > 0$. 所以函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 在 $(0, \sqrt{\frac{b}{a}}]$ 上是单调递减的, 在 $[\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 上是单调递增的. 用同样的方法或根据对称性可知, 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 在 $(-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}}]$ 上是单调递增的, 在 $[-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 上是单调递减的. 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 如图2.10所示, 根据其图像的形状特点, 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b > 0$) 俗称**对勾函数**.

若 $b < 0$, 对于 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 满足 $x_1 < x_2, f(x_2) - f(x_1) > 0$. 所以函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b < 0$) 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的. 用同样的方法或根据对称性可知, 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b < 0$) 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调递增的. 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b < 0$) 的图像如图2.11所示, 函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ ($a > 0, b < 0$) 俗称为**蝴蝶函数**.

现在我们举例说明对勾函数和蝴蝶函数性质的用途.

例 2.34. 求函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, x > 1$ 的最小值.

解. 这是一个二次比一次的分式函数, 事实上, 它可以由对勾函数经过平移得到. 为了“还原”对勾函数的形式, 我们将 $x - 1$ 看成一个单独的变量, 则

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{[(x - 1) + 1]^2 + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 2}{x - 1} = x - 1 + 2 + \frac{2}{x - 1}.$$

令 $g(t) = t + \frac{2}{t} + 2, t > 0$, 根据对勾函数的性质, $g_{\min}(t) = g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$, 所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2} + 2$. ♥

例 2.35. 求函数 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5}, \frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 的最大值和最小值.

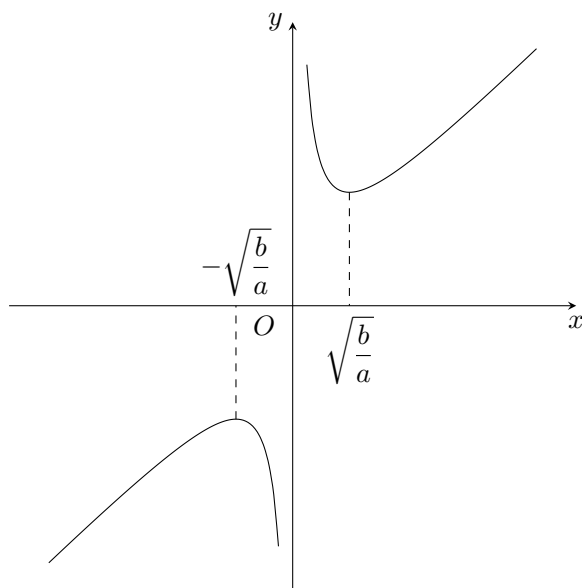


图 2.10:

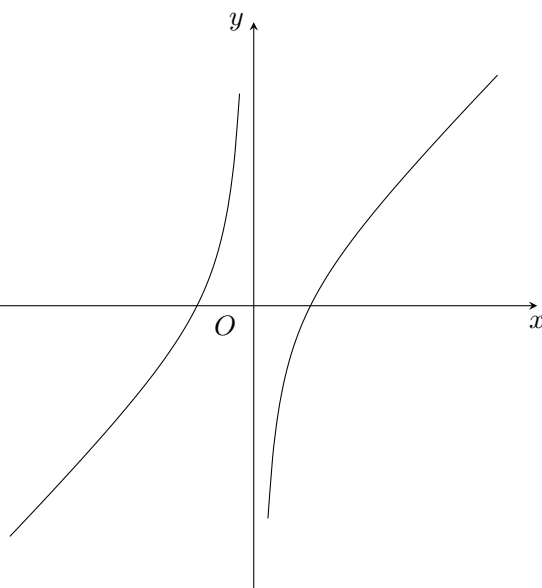


图 2.11:

解. 这是一个一次比二次的分式函数, 处理方法与前一个例题完全类似, 都可以转化为对勾函数问题. 因为 $x \neq 1$, 所以

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{x-1+\frac{4}{x-1}}, x \in [\frac{3}{2}, 2].$$

令 $g(t) = t + \frac{4}{t}$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 根据对勾函数的性质 $g(t)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上递减, 所以 $g_{\min}(t) = g(1) = 5$, $g_{\max}(t) = g(\frac{1}{2}) = \frac{17}{2}$. 所以, $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{5}$, $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = \frac{2}{17}$. ♡

例 2.36. 求函数 $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+4}$ 的值域.

解. 二次比二次的分式函数经过分离常数, 可以转化为一次比二次的最值问题:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+4} = \frac{x^2+3x+4-(x+1)}{x^2+3x+4} = 1 - \frac{x+1}{x^2+3x+4}$$

令 $g(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2+x+1+2}$, 当 $x = -1$ 时 $g(x) = 0$, 当 $x \neq -1$ 时 $g(x) = \frac{1}{x+1+1+\frac{2}{x+1}}$,

根据对勾函数值域的结论, $x+1+1+\frac{2}{x+1} \in (-\infty, 1-2\sqrt{2}] \cup [1+2\sqrt{2}, +\infty)$, 所以 $g(x) \in [-\frac{2\sqrt{2}+1}{7}, 0) \cup (0, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}]$, 综上所述, $g(x)$ 的值域为 $[-\frac{2\sqrt{2}+1}{7}, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}]$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{8-2\sqrt{2}}{7}, \frac{8+2\sqrt{2}}{7}]$.

另解 $y = f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+4}$, 因为 $x^2+3x+4 \neq 0$, 去分母并整理得

$$(1-y)x^2 - (2-3y)x + 3-4y = 0$$

当 $y = 1$ 时, $x = 1$. 当 $y \neq 1$ 时, 这是一个关于 x 的二次方程, 由 $x \in \mathbb{R}$ 可知 y 的取值集合是使得该二次方程有解的所有 y 值, $\Delta = (2-3y)^2 - 4(1-y)(3-4y) \geq 0$, 解得 $y \in [\frac{8-2\sqrt{2}}{7}, 1) \cup (1, \frac{8+2\sqrt{2}}{7}]$, 综上所述 y 的范围是 $[\frac{8-2\sqrt{2}}{7}, \frac{8+2\sqrt{2}}{7}]$, 这就是 $f(x)$ 的值域. ♡

评注 2.36.1. 对于二次比二次分式函数的最大值和最小值问题,常用的方法是去分母后,化成 x 的二次方程,然后用判别式 $\Delta \geq 0$ 得到 y 的取值范围.利用实系数二次方程有实数根,则它的判别式 $\Delta \geq 0$ 从而可以确定系数中参数的范围,进而求得最值,这种方法称为**判别式法**.

例 2.37. 已知函数 $y = \frac{ax^2 + 3x + b}{x + 1}$ 的最大值为 $\frac{11}{2}$, 最小值为 $\frac{1}{2}$, 求 a, b 的值.

解. 因为 $x^2 + 1 > 0$, 将函数整理为 $(a - y)x^2 + 3x + (b - y) = 0$, 由于 $x \in \mathbb{R}$, 所以 y 的取值集合是使得该方程有实数解的所有 y 值.

当 $y = a$ 时, $x = \frac{a - b}{3}$, 即方程有实数解; 当 $y \neq a$ 时, 这是关于 x 的二次方程, 方程有实数解, 则

$$\Delta = 9 - 4(a - y)(b - y) \geq 0,$$

即

$$4y^2 - 4(a + b)y + 4ab - 9 \leq 0.$$

这个二次不等式解集为 $y \in [\frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2}, \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2}]$, 综上所述, y 的范围是 $[\frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2}, \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2}]$, 所以

$$\begin{cases} \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2} = \frac{11}{2}, \\ \frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 9}}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 6, \\ \sqrt{(a - b)^2 + 9} = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6, \\ a - b = \pm 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, \\ b = 1. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 5. \end{cases}$$

这两组解均是符合题意的.

♡

例 2.38. 设函数 $f(x) = x^2 - (k^2 - 5ak + 3)x + 7(a, k \in \mathbb{R})$. 已知对于任意的 $k \in [0, 2]$, 若 x_1, x_2 满足 $x_1 \in [k, k + a], x_2 \in [k + 2a, k + 4a]$, 则 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 求正实数 a 的最大值.

解. 由题设条件, 函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 只要 x_1, x_2 满足 $x_1 \in [k, k + a], x_2 \in [k + 2a, k + 4a], a > 0$, 该条件等价于

$$[k, k + a] \text{ 上的最小值} \geq [k + 2a, k + 4a] \text{ 上的最大值}$$

为此必须满足轴在区间 $[k, k + a]$ 右侧 (思考: 为什么轴在区间 $[k, k + a]$ 内或在区间 $[k, k + a]$ 左侧这两种情况均不符合题意?), 所以进一步等价于 $f(k + a) \geq \max\{f(k + 2a), f(k + 4a)\}$, 记函数的轴为直线 $x = h$, 则进一步等价于 $k + 4a \leq 2h - k - a$ (如图2.12所示), 解得 $h \geq k + \frac{5}{2}a$, 即对于任意的 $k \in [0, 2]$, 都有

$$\frac{k^2 - 5ak + 3}{2} \geq k + \frac{5}{2}a.$$

即对于任意的 $k \in [0, 2]$, $a \leq \frac{k^2 - 2k + 3}{5k + 5}$ 恒成立, 记 $g(k) = \frac{k^2 - 2k + 3}{5k + 5}, k \in [0, 2]$, 则这等价于 $a \leq g_{\min}(k)$. $g(k)$ 是一个二次比一次的分式函数, 其最值可以利用对勾函数的性质求出:

$$g(k) = \frac{1}{5} \frac{k^2 - 2k + 3}{k + 1} = \frac{1}{5} (k + 1 + \frac{6}{k + 1} - 4) \geq \frac{1}{5} (2\sqrt{6} - 4)$$

当且仅当 $k = \sqrt{6} - 1$ 时取等号, 因此 $g_{\min}(k) = \frac{2\sqrt{6}-4}{5}$, 正实数 a 的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}-4}{5}$. ♡

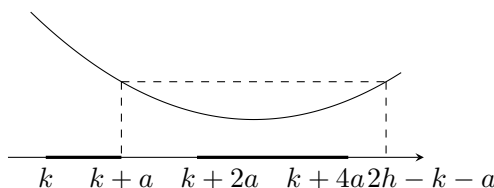


图 2.12:

2.3.5 二次函数绝对值区间最值, 平口单峰函数

例 2.39. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, 总存在 $t \in [0, 4]$, 使得 $|f(t)| \geq m$ 成立, 则实数 m 的最大值是_____.

解. 本题是恒成立与能成立问题, 等价于求 $|f(t)|$ 在闭区间 $[0, 4]$ 上的最大值, 而这个最大值是和参数 a, b 相关的, 因为参数 a, b 可以任意变化, 根据题意, 我们要使得这个最大值最小, 即求最大值的最小值:

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \{ \max_{t \in [0, 4]} |f(t)| \}$$

这个问题看似入口很小, 难以将 $|f(t)|$ 在闭区间 $[0, 4]$ 上的最大值写成统一的关于 a, b 的表达式从而进一步处理. 我们不妨回到最原始的问题上去, 在讨论二次函数问题之前, 我们先来说明下面的一个公式: 对于闭区间 $[p, q]$ 上的连续函数 $f(t)$, 显然它有最大值和最小值, 且:

$$\max |f(t)| = \left| \frac{f_{\max}(t) + f_{\min}(t)}{2} \right| + \frac{f_{\max}(t) - f_{\min}(t)}{2},$$

其中 $f_{\max}(t)$ 和 $f_{\min}(t)$ 分别表示函数在闭区间上的最大和最小值.

这个公式的理解是很直观的. 为了鼓励全民锻炼, 某平台推出了一个小程序, 它的游戏规则是: 参赛者从数轴上的 O 点出发开始步行, 并可以选择闭区间 $[m, M]$ 上的任意一点作为步行的终点, 但是在步行过程中不能改变行进方向, 即“不走回头路”, 步行的路程越多, 获得的奖品就越多. 如何能保证获得最多的奖品呢? 策略是从 O 点走到区间中点 $\frac{M+m}{2}$, 然后再沿相同方向走完区间长度的一半 $\frac{M-m}{2}$, 如图2.13所示, 很显然, 不管 m, M, O 这三个点的相对位置如何, 我们总是能够保证走的路程最长. 特别地, 如果闭区间 $[m, M]$ 是闭区间 $[p, q]$ 上连续函数 $f(t)$ 的值域 $[f_{\min}(t), f_{\max}(t)]$, 那么这个“最长路程”就是 $\max |f(t)|$ 的值, 这样, 我们从直观上说明了上述公式.

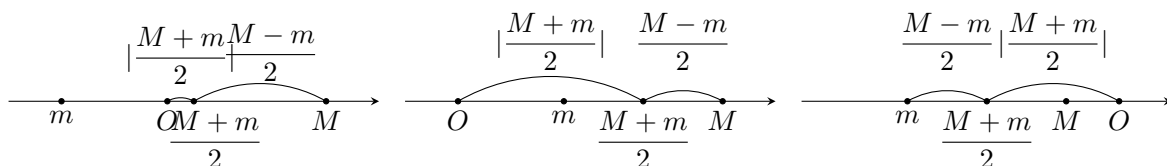


图 2.13:

我们知道二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图像的 shape 只取决于系数 a , 系数 a 确定后, 二次函数图像的 shape 也确定了, 而 b, c 的变化只是改变二次函数的位置. 现考虑 a 固定, 而 b, c 可以任意变化的情况, 因为图像可以任意地平移, 我们总是可以通过某种平移使得 $f_{\max}(x) + f_{\min}(x) = 0$. 而 $\frac{f_{\max}(t) - f_{\min}(t)}{2}$ 实际上是二次函数图像在长度为 $q - p$ 的水平跨度范围内的最小竖直跨度的一半, 这是一个几何上的量, 是不依赖于坐标轴的, 因而也不依赖于 b, c 的取值.

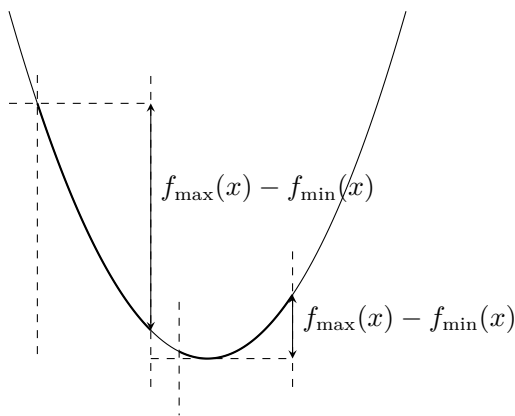


图 2.14:

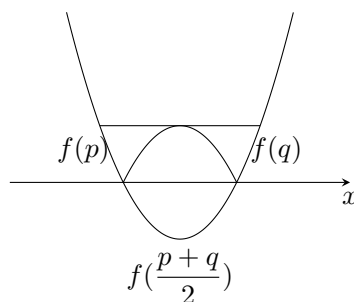


图 2.15:

根据上述的讨论, 我们考虑任意一个二次函数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (a 固定, b, c 任意), 欲求 $|f(x)|$ 在闭区间 $[p, q]$ 上的最大值的最小值 c , 只需考虑它在闭区间 $[p, q]$ 上的竖直跨度的最小值, 即 $f_{\max}(x) - f_{\min}(x)$ 的最小值. 如图 2.14 所示, 如果轴在区间 $[p, q]$ 外, 则 $[p, q]$ 包含于 $f(x)$ 的一个单调区间, 这时区间越靠近轴, 竖直跨度 $f_{\max}(x) - f_{\min}(x)$ 越小; 如果轴在区间内, 则 $f_{\min}(x)$ 是轴处的函数值 (即二次函数的最小值), 这时 $f_{\max}(x)$ 越小, 竖直跨度也越小, 故当且仅当区间中点落在轴上即 $-\frac{b}{2a} = \frac{p+q}{2}$ 时 $f_{\max}(x) - f_{\min}(x)$ 最小, 且最小值为 $f(p) - f(\frac{p+q}{2})$ 或 $f(q) - f(-\frac{p+q}{2})$, 这时 $f(p) = f(q)$.

又因为我们可以通过某种平移使得 $f_{\max}(x) + f_{\min}(x) = 0$, 这时 $\max |f(x)|$ 取得最小值, 且最小值为 $\frac{f(p) - f(\frac{p+q}{2})}{2} = f(p) = f(q) = -f(\frac{p+q}{2})$, 如图 2.15 所示.

回到本题, 根据以上讨论, $-\frac{a}{2} = \frac{0+4}{2} \Rightarrow a = -4$, $f(4) + f(2) = 0 \Rightarrow b = 2$, 所以 $\min_{a, b \in \mathbb{R}} \{ \max_{t \in [0, 4]} |f(t)| \} = f(4) = 2$. 故填 2. $\heartsuit$

评注 2.39.1. 以上我们讨论了求绝对值二次函数闭区间内的最大值的最小值的特定处理方法, 一般地, 当函数的 shape 确定且可以任意平移时, $\max |f(x)|$ 的最小值一定在 $f(x)$ 是平口函数且 $f_{\max}(x) + f_{\min}(x) = 0$ 时取得, 即 $\begin{cases} f(p) = f(q) = 0 \\ f_{\max}(x) + f_{\min}(x) = 0 \end{cases}$, 若在闭区间 $[p, q]$ 内函数 $f(x)$ 还有一个极值点, 则也叫平口单峰函数. 有关平口单峰函数的结论是一个十分自然的事实, 读者可以借助草图深入思考, 理解其本质.

平口单峰函数的相关结论还可以应用在除二次函数以外的其他函数的绝对值闭区间最值问题上.

例 2.40. 切比雪夫在用直线逼近曲线的研究中定义了偏差 E : 对任意的 $x \in [m, n]$, 函数 $y =$

$|f(x) - (ax + b)|$ 的最大值为 E , 即 $E = \max_{m \leq x \leq n} |f(x) - (ax + b)|$, 把使得 E 取到最小值的直线 $y = ax + b$ 叫做切比雪夫直线, 已知函数 $f(x) = x^2, x \in [-1, 2]$, 则其切比雪夫直线的参数 $b =$ _____.

解. 由平口单峰函数的相关结论, 记 $g(x) = x^2 - ax - b$, 则 $g(-1) = g(2)$, 所以 $\frac{a}{2} = \frac{-1+2}{2}$, 解得 $a = 1$. 又根据 $g(2) + g(\frac{1}{2}) = 4 - 2 - b + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - b = 0$, 解得 $b = \frac{7}{8}$. $\heartsuit$

习题 2.3

1. 已知集合 $A = \{x | (ax - 1)(a - x) > 0\}$, 且 $2 \in A, 3 \notin A$, 则实数 a 的取值范围是_____.
2. 从 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 八个数字中, 任取三个不同的数字作为二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的系数, 若二次函数的图像过原点, 且其顶点在第一或第三象限, 这样的二次函数有_____个?
3. 已知二次函数 $f(x)$ 满足对任意实数 x 都有 $x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$. 若 $f(11) = 181$, 则 $f(16) =$ _____.
4. 方程组 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ xy(x + y) = -6, \end{cases}$ 的实数解为_____.
5. 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c (x \in \mathbf{R})$, 其中 a, b, c 为互不相同的非零整数, 且 $f(a) = a^3$, $f(b) = b^3$, 则 $a + b + c =$ _____.
6. 已知 a, b 是实数. 若二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 满足 $f(f(0)) = f(f(1)) = 0$, 且 $f(0) \neq f(1)$, 则 $f(2)$ 的值是_____.
7. 若 $a \geq b \geq c, a + b + c = 0$, 且 x_1, x_2 为二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根, 则 $|x_1^2 - x_2^2|$ 的最大值与最小值的和为_____.
8. 已知 $a, b \in \mathbf{Z}$, 且 $a + b$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 则 b 的最大可能值为_____.
9. 已知函数 $f(x) = -x^2 + x + m + 2$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |x|$ 的解集中有且仅有 1 个整数, 则实数 m 的取值范围为_____.
10. 设实数 $a < -1$, 变量 x 满足 $x^2 + ax \leq -x$, 且 $x^2 + ax$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____.
11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2tx + t$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 记 $f(x)$ 的最小值为 m , 则 m 的最大值是_____.
12. 设 a 是实数, 要使得对任何 $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, 都有 $x^2 - 2(a - 2)x + a > 0$, 所有满足上述要求的 a 组成的集合是_____.
13. 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$, 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n] (m < n)$, 值域为 $[km, kn] (k > 1)$, 则 n 的值为_____.
14. 当 $|x| \leq 1$ 时, 不等式 $2px^2 + qx - p + 1 \geq 0$ 恒成立, 试求 $p + q$ 的最大值.
15. 已知对于任意的实数 $a \in (-2, 4]$, 均有 $x^2 - ax + 9 > 0$ 成立. 则实数 x 的取值范围是_____.

16. 已知对任意 $m \in [\frac{1}{2}, 3]$, 不等式 $x^2 + mx + 4 > 2m + 4x$ 恒成立, 则 x 的取值范围是_____.
17. 设函数 $f(x) = x^2 - (k^2 - 5ak + 3)x + 7(a, k \in \mathbf{R})$. 已知对于任意的 $k \in [0, 2]$, 若 x_1, x_2 满足 $x_1 \in [k, k + a], x_2 \in [k + 2a, k + 4a]$, 则 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 求正实数 a 的最大值.
18. 若关于 x 的二次方程 $mx^2 + (2m - 1)x - m + 2 = 0 (m > 0)$ 的两个互异的根都小于 1, 则实数 m 的取值范围是_____.
19. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在 $[0, 1]$ 中有两个实数根, 则 $a^2 - 2b$ 的取值范围为_____.
20. 已知关于 x 的方程 $x^3 + ax^2 + bx - a - b - 1 = 0$ 有两个根分别在 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内, 则 $\frac{2a + b + 1}{a + 1}$ 的取值范围是_____.
21. 已知 $b, c \in \mathbf{R}$, 二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 在 $(0, 1)$ 上与 x 轴有两个不同的交点, 求 $c^2 + (1 + b)c$ 的取值范围.
22. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + b(x + 1) - 2$, 若对任意实数 b , 方程 $f(x) = x$ 有两个相异的实数根, 求实数 a 的取值范围.
23. 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 16x + p + 3$.
- (1) 若函数在区间 $[-1, 1]$ 上存在零点, 求实数 p 的取值范围.
- (2) 是否存在常数 $q (q \geq 0)$, 当 $x \in [q, 10]$ 时, $f(x)$ 的值域为区间 D , 且 D 的长度为 $12 - q$.
24. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 总存在 $t \in [0, 4]$, 使得 $|f(t)| \geq m$ 成立, 则实数 m 的最大值是_____.
25. 设 $a \in \mathbf{R}$, 且对任意实数 b 均有 $\max_{x \in [0, 1]} |x^2 + ax + b| \geq 1$, 求 a 的取值范围.
26. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 满足 $|f(0)| \leq 2, |f(2)| \leq 2, |f(-2)| \leq 2$, 求当 $x \in [-2, 2]$ 时 $y = |f(x)|$ 的最大值.
27. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足条件:
- (1) $-4a \leq b < -2a$;
- (2) 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq 1$.
- 证明: 当 $|x| \leq 2$ 时, $f(x) \geq -\frac{5}{4}$.
28. 已知函数 $f(x) = ax - bx^2$, 其中 a, b 为正数.
- (1) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \leq 1$, 证明 $a \leq 2\sqrt{b}$;
- (2) 当 $b > 1$ 时, 证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 成立的充要条件是 $b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$.

2.4

幂函数, 指数函数和对数函数

在这一节中我们将介绍高中阶段的三种重要的基本初等函数: 幂函数, 指数函数和对数函数.

2.4.1 幂函数

我们对幂函数给出形式上的定义:

定义 2.8. 形如 $y = x^\alpha$ (α 为常数, $\alpha \neq 0$) 的函数称为**幂函数**, 例如 $y = x^2, y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x^3}$ 都是幂函数, 而 $y = \frac{1}{2}x^\alpha, y = x^\alpha + 1$ 都不是幂函数.

当 α 为正整数时, 其定义域为 $\mathbb{R}$;

当 α 为负整数时, 由于分母不得零, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

当 α 为有理数时, 也即 $\alpha = \frac{n}{m}$, 其中 $n, m \in \mathbb{Z}, m > 0$, 且 m, n 为互质数, 这时候我们认为 $x^{\frac{n}{m}} = (x^n)^{\frac{1}{m}}$, 即对幂 x^n 再开 m 次方根, 例如 $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$.

由于偶次根号下非负, 所以当 $\alpha > 0$ 即 $n > 0$, 且 m 为偶数时, 其定义域为 $[0, +\infty)$, m 为奇数时, 其定义域为 $\mathbb{R}$.

当 $\alpha < 0$ 即 $n < 0$ 且 m 为偶数时, 由于分母不得零, 其定义域为 $(0, +\infty)$, m 为奇数时, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

当 α 为无理数时, 因为无理数被理解为一串有理数逐步逼近的结果, 所以 x^α 应当理解成一串有理数幂 x^{α_n} 逼近的结果, 其中 α_n 是一串趋于无理数 α (即以 α 为极限) 的有理数. 因为 α_n 表成分数式时分母可能出现偶数, 所以我们要求无理数幂的底数是非负的. 因此当 α 是正的无理数时, 其定义域为 $[0, +\infty)$, 当 α 是负的无理数时, 由于分母不得零, 其定义域为 $(0, +\infty)$.

可见, 不管上述哪种情况, 幂函数的定义域总是包含 $(0, +\infty)$. 我们在高中阶段更多的研究的是 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 的情况.

我们在初中已经学过了幂的运算法则, 此处不再赘述.

下面是同一坐标系中画出的几个典型幂函数的图像, 由此可见幂函数的图像都通过点 $(1, 1)$, 这个点通常被称为幂函数的**特征点**. 我们还能注意到, 当 $\alpha > 0$ 时, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 上递增, 当 $\alpha < 0$ 时, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 上递减. 对于有些幂函数在 $(-\infty, 0)$ 的单调性情况较多, 但都可以通过其在 $(0, +\infty)$ 上的单调性结合其奇偶性推出.

幂函数具有如下的抽象性质: $f(xy) = f(x)f(y)$, 我们在讨论抽象函数的性质时这一等式性质做了充分的挖掘, 读者可以自己去回顾一下例题2.22.

幂函数的另一个重要特征时它的奇偶性. 当 α 为奇数时, 幂函数为奇函数; 当 α 为偶数时, 幂函数为偶函数; 当 α 为有理数且分子、分母均为奇数时, 幂函数也为奇函数, 当分子为偶数、分母为奇数时, 幂函数为偶函数.

2.4.2 指数函数

定义 2.9. 形如 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1, a$ 为常数) 的函数叫做**指数函数**.

指数函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 对于幂 a^x , 我们已经把指数 x 的范围扩展到了实数范围 (参见2.4.1节), 因而 a 的实数次幂都是一个确定的实数, 幂 a^x 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都有意义, 所以指数函数的定义域为 $\mathbb{R}$.

另外, 我们规定底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 当 $a < 0$ 时, 由于偶次根号下非负, 根据2.4.1节的讨论, 当 x 取到分母为偶数或者无理数时, 将使得 a^x 无意义, 从而导致指数函数不连续, 性质不好, 不

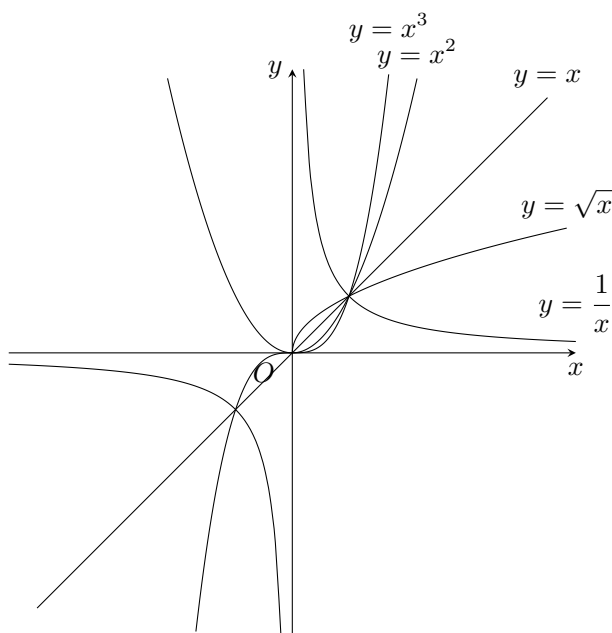


图 2.16:

易研究. 当 $a = 0$ 时, 指数函数对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 函数值都得零, 而对于 $x \in (-\infty, 0]$, 函数无意义. 当 $a = 1$ 时, 指数函数完全退化为常函数 $y = 1$. 这两种情况都非常简单, 没有必要放在指数函数当中进行研究. 总之, 我们规定指数函数的底数大于零且不等于 1.

指数函数的值域为 $(0, +\infty)$.

例 2.41. 化简 $\frac{a^2}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$.

解. 原式 $= \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}} = a^{2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$. ♡

指数函数具有抽象性质 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 我们在例题 2.23 讨论了这一抽象性质.

下面是几个典型的指数函数的图像. 指数函数的图像过定点 $(0, 1)$, 这个点是指数函数的特征点. 指数函数的图像过点 $(1, a)$, 即直线 $x = 1$ 与指数函数图像交点的纵坐标就是底数 a 的值.

$y = a^x$ 和 $y = (\frac{1}{a})^x$ 的图像关于 y 轴对称, 因为 $y = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$, 即函数 $y = (\frac{1}{a})^x$ 是由 $y = a^x$ 关于 y 轴作对称变换得到的.

指数函数的定义域都是 $\mathbb{R}$, 值域都是 $(0, +\infty)$.

指数函数在 $\mathbb{R}$ 上单调: 当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x) = a^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上递减.

我们还可以看到, 对于 $y = 2^x$ 和 $y = 10^x$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时图像无限接近 x 轴, 但不相交, 且 $y = 10^x$ 的图像比 $y = 2^x$ 的图像在 $x < 0$ 时更接近 x 轴; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 两者的图像都呈爆炸式向上延伸, 且 $y = 10^x$ 的图像延伸更快. 对于 $y = 2^{-x}$ 和 $y = 10^{-x}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时图像无限接近 x 轴, 但不相交, 且 $y = 10^{-x}$ 的图像比 $y = 2^{-x}$ 的图像在 $x > 0$ 时更接近 x 轴; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 两者的图像都呈爆炸式向上延伸, 且 $y = 10^{-x}$ 的图像上升更快.

以上规律可以总结为: 指数函数的图像在第一象限内“底大图高”, 例如在第一象限内, $y = 2^x$ 恒在 $y = 10^x$ 下方, 而 $y = 2^{-x}$ 恒在 $y = 10^{-x}$ 上方. 这一规律将是利用指数函数的性质比较一些幂

值的大小以及判断指数函数图像的重要依据.

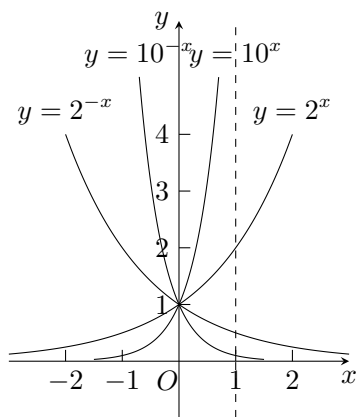


图 2.17:

例 2.42. (1) 比较大小: $a = 2^{0.3}$, $b = 0.3^2$, $c = (\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}$.

(2) 比较大小: $0.8^{\frac{2}{3}}$, $0.9^{\frac{2}{3}}$.

(3) 比较大小: $1.4^{0.01}$ 与 $0.9^{0.3}$.

解. (1) $a = 2^{0.3}$, $c = (\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}} = 2^{1.5}$, 又因为指数函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增, 且 $0 < 0.3 < 1.5$, 所以 $1 = 2^0 < a < c$. 又因为 $b = 0.3^2 = 0.09 < 1$, 所以 $b < a < c$.

(2) 因为幂函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 递增, 所以 $0.8^{\frac{2}{3}} < 0.9^{\frac{2}{3}}$.

(3) 根据指数函数的单调性, $1.4^{0.01} > 1.4^0 = 1$, $0.9^{0.3} < 0.9^0 = 1$, 所以 $0.9^{0.3} < 1.4^{0.01}$. $\heartsuit$

评注 2.42.1. 指数函数的性质, 特别是单调性和过定点 $(0, 1)$ 这两条性质, 为比较幂值的大小提供了一个有力的工具.

例 2.43. (1) 求函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^{-x^2+2x+8}$ 的定义域和值域, 并确定其单调区间;

(2) 已知函数 $f(x) = a^{2x} + 2a^x - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值为 14, 求实数 a 的值;

(3) 已知关于 x 的方程 $4^x - (a+3)2^x + 1 = 0$ 有实数解, 求实数 a 的取值范围;

(4) 已知函数 $f(x) = 3^x - \frac{1}{3^x}$, 若对于 $\forall t \in [1, 3]$, 不等式 $3^t f(2t) + m f(t) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解. (1) 这是一个复合函数, 内层为二次函数, 外层为指数函数. 确定复合函数的定义域遵循由内到外的原则, 由于二次函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 指数函数的定义域也为 $\mathbb{R}$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 设 $u = -x^2 + 2x + 8$, 则 $u = -(x-1)^2 + 9 \leq 9$, 由于 $y = (\frac{1}{2})^u$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 所以 $(\frac{1}{2})^u \geq (\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{512}$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{512}, +\infty)$. 因为 u 在 $(-\infty, 1]$ 递增, 在 $[1, +\infty)$ 递减, 而 $y = (\frac{1}{2})^u$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 根据复合函数单调性的结论, $f(x)$ 的增区间为 $[1, +\infty)$, 减区间为 $(-\infty, 1]$.

(2) 这可以理解为一个复合函数, 内层为指数函数, 外层为二次函数. 令 $a^x = t > 0$, 因为 $x \in [-1, 1]$, 所以当 $0 < a < 1$ 时 $t \in [a, \frac{1}{a}]$, 当 $a > 1$ 时 $t \in [\frac{1}{a}, a]$. $y = g(t) = t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2$, 其轴在区间左侧, 当 $0 < a < 1$ 时, $g_{\max}(t) = g(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a} + 1)^2 - 2 = 14$, 解得 $a = \frac{1}{3}$ 或 $a = -\frac{1}{5}$ (舍

去); 当 $a > 1$ 时, $g_{\max}(t) = g(a) = (a+1)^2 - 2 = 14$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -5$ (舍去). 综上所述 $a = 3$ 或 $a = \frac{1}{3}$.

(3) 令 $t = 2^x > 0$, 由指数函数的性质, 关于 x 的方程 $4^x - (a+3)2^x + 1 = 0$ 有实数解等价于关于 t 的二次方程 $t^2 - (a+3)t + 1 = 0$ 有正实数解. 记 $f(t) = t^2 - (a+3)t + 1$, 因为 $f(0) = 1$, 根据二次方程根的分布知识, 只需 $\begin{cases} \frac{a+3}{2} > 0 \\ \Delta = (a+3)^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $a \geq -1$, 所以 a 的范围是 $[-1, +\infty)$.

(4) 原不等式等价于 $3^t(3^{2t} - \frac{1}{3^{2t}}) + m(3^t - \frac{1}{3^t}) \geq 0, t \in [1, 3]$ 恒成立, 因为当 $t \in [1, 3]$ 时, $3^t - \frac{1}{3^t} = \frac{3^{2t} - 1}{3^t} > 0$, 所以进一步等价于 $m \geq -\frac{3^t(3^{2t} - \frac{1}{3^{2t}})}{\frac{3^{2t} - 1}{3^t}} = -\frac{3^{4t} - 1}{3^{2t} - 1} = -3^{2t} - 1$ 恒成立.

设 $g(t) = -3^{2t} - 1, t \in [1, 3]$, 所以进一步等价于 $m \geq g_{\max}(t)$. 由指数函数的性质可知 $g(t)$ 在 $[1, 3]$ 递减, 所以 $g_{\max}(t) = g(1) = -10$, 所以 m 的范围是 $[-10, +\infty)$. $\heartsuit$

评注 2.43.1. 本小题中求解恒成立问题中的参数范围采用了**分离参数, 直接处理**的方法. 即把参数与变量分离, 直接研究一个关于变量的函数的最大值或最小值问题, 进而确定参数范围. 一般而言, 当参数前的系数符号确定或情况比较简单, 而且分离参数后得到的函数也容易求最值时, 使用分离参数的处理方式会非常便捷. 如果参数前的系数符号不确定, 则会造成分离参数时不等号的方向不确定, 这时则需要分类讨论或寻找其他的处理方法.

我们知道, 任何一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 可以写成一个奇函数 $f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 与一个偶函数 $f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 的和 (参见例题2.14), 指数函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 可以写成一个奇函数和一个偶函数的和, 我们接下来讨论这两个函数的一些性质.

指数函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 可以写成 $f_1(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 与 $f_2(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ 的和, 其中 $f_1(x)$ 为奇函数, $f_2(x)$ 为偶函数. 并且 $f_1(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 是一个单调的奇函数, 简要解释如下: 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 和 $y = -a^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上都是递增的, 所以 $f_1(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上也是递增的; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 和 $y = -a^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上都是递减的, 所以 $f_1(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上也是递减的.

因为 $f_2(x) > 0$, 我们进一步考虑函数 $g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$, 根据奇函数与偶函数相除仍然得到奇函数, 我们知道 $g(x)$ 应当也是一个奇函数, 下面证明这一点.

例 2.44. 已知函数 $g(x) = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} (a > 0, a \neq 1), x \in \mathbb{R}$,

(1) 求 $g(x)$ 的值域;

(2) 证明: $g(x)$ 是单调的奇函数.

解. (1) 适合分离常数来处理, $f(x) = \frac{a^{2x} + 1 - 2}{a^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{a^{2x} + 1}$. 因为 $a^x \in (0, +\infty)$, 所以 $\frac{2}{a^x + 1} \in (0, 2)$, 所以 $f(x) \in (-1, 1)$, 即值域为 $(-1, 1)$.

(2) 首先证明 $g(x)$ 是奇函数, $g(-x) = \frac{a^{-2x} - 1}{a^{-2x} + 1} = \frac{1 - a^{2x}}{a^{2x} + 1} = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.

下面证明 $g(x)$ 是单调函数: 任取 $x_1 < x_2$, 那么

$$g(x_1) - g(x_2) = \left(1 - \frac{2}{a^{2x_1} + 1}\right) - \left(1 - \frac{2}{a^{2x_2} + 1}\right) = \frac{2(a^{2x_1} - a^{2x_2})}{(a^{2x_1} + 1)(a^{2x_2} + 1)}.$$

当 $a > 1$ 时, 由 $x_2 > x_1$ 及指数函数的单调性知 $a^{2x_1} < a^{2x_2}$, 又因为 $a^{2x_1} + 1 > 0, a^{2x_2} + 1 > 0$, 所以 $g(x_1) < g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数.

当 $0 < a < 1$ 时, 由 $x_2 > x_1$ 及指数函数的单调性知 $a^{2x_1} > a^{2x_2}$, 又因为 $a^{2x_1} + 1 > 0, a^{2x_2} + 1 > 0$, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数.

综上所述, 函数 $g(x) = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{a^{2x} + 1} (a > 0, a \neq 1)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $(-1, 1)$, 且是单调的奇函数, 当 $a > 1$ 时, 函数递增, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数递减. $\heartsuit$

例 2.45. 已知 a 为正实数, 且 $f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^x + 1}$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的值域为_____.

解. 由结论可知, $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2$, 由结论可知 $f(x)$ 的值域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $\heartsuit$

评注 2.45.1. 如果熟知函数 $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{a^{2x} + 1} (a > 0, a \neq 1)$ 是单调的奇函数且值域为 $(-1, 1)$ 这一事实, 可以迅速解答这个例题.

例 2.46. 已知函数 $f(x) = \frac{25^x}{25^x + 5}$, 则 $\sum_{k=1}^{2020} f(\frac{k}{2021}) =$ _____.

解. $f(x) = \frac{25^x}{25^x + 5} = \frac{1}{1 + 5^{-2(x-\frac{1}{2})}}$, 根据结论可知函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称, 即对于 $\forall x_1 + x_2 = 1$, 有 $f(x_1) + f(x_2) = 1$, 所以原式 = 1010. $\heartsuit$

评注 2.46.1. 本题给出的函数是 $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{a^{2x} + 1} (a > 0, a \neq 1)$ 经伸缩和平移变换得到的, 当然也具有中心对称性, 读者在解答这道例题时要注意到这一点.

例 2.47. 已知函数 $f(x) = x|x| + \frac{2}{2^x + 1} - 1, x \in [-2022, 2022]$ 的值域为 $[a, b]$, 则 $f(a + b) =$ _____.

(A) 2^{2022} (B) $2022^2 - \frac{1}{2022}$ (C) 2 (D) 0

解. $y = x|x|$ 是奇函数, 由前述结论知 $y = \frac{2}{2^x + 1} - 1$ 也是奇函数, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 其值域关于原点对称, 所以 $a + b = 0$, 所以 $f(0) = 0$, 选 D. $\heartsuit$

例 2.48. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x > 0, \\ -2x^2 - 4x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = m$ 有且仅有 3 个实数根, 则实数 m 的范围是_____.

解. 根据指数函数和二次函数的图像特点作出函数的草图如下, 方程 $f(x) = m$ 有且仅有 3 个实数根等价于 $f(x)$ 的图像与直线 $y = m$ 有且仅有 3 个公共点, 分析图像可知 m 的范围是 $(0, 2)$. $\heartsuit$

评注 2.48.1. 在解答有关函数的零点或方程根的个数的客观题时, 常常转化为公共点个数问题, 并结合函数图像用数形结合的方法解答.

例 2.49. 已知函数 $f(x) = a + x - b^x$ 的零点 $x_0 \in (n, n + 1) (n \in \mathbf{Z})$, 其中常数 a, b 满足条件 $2021^a = 2022, 2022^b = 2021$, 则 n 的值为_____.

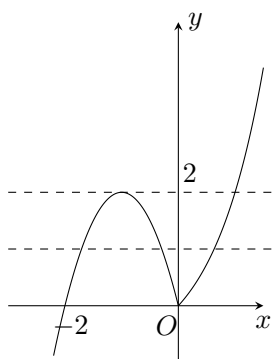


图 2.18:

解. 根据指数函数的性质估计 a 和 b 的范围: $2021^1 = 2021 < 2022 = 2021^a$, 所以 $1 < a < 2$, $2022^b = 2021 < 2022 = 2022^1$, 所以 $0 < b < 1$, 所以 $f(x)$ 是增函数, $f(x)$ 至多有一个零点. $f(0) = a - b > 0$, $f(-1) = a - 1 - \frac{1}{b} < 1 - \frac{1}{b} < 0$, 根据零点存在定理, $x_0 \in (-1, 0)$, 所以 $n = -1$. ♡

评注 2.49.1. 本题中, 利用指数函数的性质可以估计 a 和 b 的范围, 进而比较 0 处和 1 处的函数值与 0 的大小关系. 我们在学习了对数的相关知识后, 还可以更加精确地估计 a 和 b 的范围.

2.4.3 对数与对数函数

约翰·纳皮尔 (John Napier) 是苏格兰卓越的数学家和发明家. 纳皮尔提出对数的概念, 引起了计算上的一场革命. 为了解决天文学上耗时的大数计算, 他制作了一个 Napier 算筹, 就是一个可以被叫做“对数表”的表格, 对数可以将乘除法简化为加减法运算. 比如我们要用下表计算 32×256 , 查询对数表可知 32 的对数是 5, 256 的对数是 8, 由于 $5 + 8 = 13$, 我们找回 13 的真数 8192, 这就是 32×256 的结果. 我们有了幂的运算法则的知识, 知道这样做的原理是 $32 \times 256 = 2^5 \times 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13} = 8192$, 因而在现在的看法下, 对数与指数是紧密联系的.

表 2.1: 对数表概念

真数	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
对数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

如果我们引入正实数范围内的对数运算作为一个相当完备的“对数表”, 充分研究对数运算的性质, 将带给我们诸多便利. 纳皮尔曾希望对数将会节约计算员的时间, 把他们从各种棘手的计算错误中解放出来. 200 年后, 法国天文学家 Pierre-Simon Laplace 证实了纳皮尔的期望, 他说对数“通过节省劳动, 让天文学家的寿命延长了一倍”².

定义 2.10. 一般地, 如果 $a^x = N (a > 0, a \neq 1)$, 那么数 x 称为以 a 为底 N 的**对数**, 记作

$$x = \log_a N,$$

其中 a 叫做对数的**底数**, N 叫做对数的**真数**.

² 内容均引自知乎专栏“纳皮尔与对数”<https://zhuanlan.zhihu.com/p/338032640>.

例如 $2^5 = 32, 2^8 = 256, 2^{13} = 8192, \log_2 32 = 5, \log_2 256 = 8, \log_2 8192 = 13$, 这里的 5, 8, 13 分别是以 2 为底 32, 256, 8192 的对数.

人们习惯用十进制, 通常我们将以 10 为底的对数叫做**常用对数**, 并且将 $\log_{10} N$ 记作 $\lg N$. 例如 $\lg 100 = 2, \lg 10^{-7} = -7$. 另外在科技、经济和社会生活中常常使用以无理数 e 为底数的对数, 以 e 为底的对数称为**自然对数**, 并将 $\log_e N$ 记作 $\ln N$. $e \approx 2.718281828$, 伯努利 (Bernoulli) 在研究复利计算时发现了 e 作为 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的极限, 而欧拉 (Euler) 首先使用 e 来代表它, e 的引进简化了许多计算, 成为数学中最重要的常数之一, 我们在今后的学习中会逐渐体会到 e 的重要性.

由于指数和对数具有如下的关系: 当 $a > 0, a \neq 1$ 时, $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$, 所以我们得到对数的如下结论:

对数运算要求底数大于零且不等于 1; 负数和 0 没有对数 (即: 真数总是大于 0); 且 $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$.

我们已经知道了对数和指数之间的关系, 利用指数幂的运算法则:

$$a^m a^n = a^{m+n}, a^m / a^n = a^{m-n}, (a^m)^n = a^{mn},$$

我们记真数 $a^m = M, a^n = N$ (其中 $m, n \in \mathbb{R}$), 则立刻得到以 a 为底数的对数的如下运算性质:

如果 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, 则有:

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M.$$

可见取了对数以后, 我们可以将真数的乘除运算转化为对数加减运算, 因而也可以将幂的运算转化为一个数乘对数的运算.

例 2.50. (1) 计算: $\frac{\lg 8 + \lg 125 - \lg 2 - \lg 5}{\lg \sqrt{10} \lg 0.1},$

(2) 如果 $\lg 2 = m, \lg 3 = n$, 试用 m, n 表示 $\frac{\lg 12}{\lg 15}$.

解. (1)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\lg 2^3 + \lg 5^3 - \lg 2 - \lg 5}{\lg 10^{\frac{1}{2}} \lg 10^{-1}} \\ &= \frac{3 \lg 2 + 3 \lg 5 - \lg 2 - \lg 5}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2(\lg 2 + \lg 5)}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2 \lg 10}{-\frac{1}{2}} \\ &= -4. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\lg 12}{\lg 15} = \frac{\lg(2^2 \times 3)}{\lg(3 \times 10/2)} = \frac{2 \lg 2 + \lg 3}{\lg 3 + \lg 10 - \lg 2} = \frac{2 \lg 2 + \lg 3}{\lg 3 - \lg 2 + 1} = \frac{2m + n}{n - m + 1}.$$

接下来我们介绍一个非常重要的对数运算公式:

♡

定理 2.4.1. 设 $\log_a b = x$, 则 $a^x = b$, 于是

$$\log_c a^x = \log_c b.$$

又根据对数的运算性质, 幂的对数等于幂指数乘以对数: $x \log_c a = \log_c b$, 即

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (a > 0, a \neq 1; b > 0; c > 0, c \neq 1).$$

我们把上式叫做**对数换底公式**, 特别地, 我们常常换成以 10 为底和以 e 为底的对数:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a} (a > 0, a \neq 1; b > 0).$$

若 $b \neq 1$, 因为

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} (a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1).$$

因此, 当真数不为 1 时, 交换真数和底数的位置, 对数变为原来的倒数, 即 $\log_a b$ 和 $\log_b a$ 互为倒数.

另外, 由于

$$\log_a b = \frac{\log_{\frac{1}{a}} b}{\log_{\frac{1}{a}} a} = -\log_{\frac{1}{a}} b$$

因此, 当底数变为原来的倒数时, 对数变成原来的相反数, 即 $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$.

数学史上, 人们经过努力制作了常用对数表和自然对数表, 有了换底公式, 就能将其他底的对数转换为以 10 或 e 为底数的对数, 从而可以通过查表方便地求出这些对数. 现在, 对数换底公式作为一个恒等变形公式也有着广泛而重要的应用.

例 2.51. (1) 若 $a > 0$ 满足 $a^a = 9a^{8a}$, 则 $\log_a(3a) =$ _____.

(2) $\frac{1 - 2\log_6 5 \cdot \log_{10} 3 \cdot \log_{15} 2}{\log_6 5 \cdot \log_{10} 3 + \log_{10} 3 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 2 \cdot \log_6 5}$ 的值为_____.

解. (1) 对式 $a^a = 9a^{8a}$ 两边同时取对数, 得到 $a \ln a = 8a \ln(9a) = 8a(2 \ln 3 + \ln a)$, 所以 $\ln a = -\frac{16}{7} \ln 3$. 由对数换底公式可知 $\log_a(3a) = \frac{\ln 3a}{\ln a} = \frac{\ln 3 + \ln a}{\ln a} = \frac{1 - \frac{16}{7}}{-\frac{16}{7}} = \frac{9}{16}$.

评注 2.51.1. 本题中的幂指运算难以直接处理, 而通过取对数可以使它变成更加简洁的乘法运算, 从而很方便地得到 $\ln a$ 的值.

(2) 令 $a = \log_6 5, b = \log_{10} 3, c = \log_{15} 2$,

用换底公式, $a = \frac{\ln 5}{\ln 2 + \ln 3}, b = \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 5}, c = \frac{\ln 2}{\ln 3 + \ln 5}$, 为了得到 a, b, c 之间的关系, 作如下变形:

$$\frac{1+a}{a} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 5}{\ln 5}, \frac{1+b}{b} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 5}{\ln 3}, \frac{1+c}{c} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 5}{\ln 2},$$

由此看出 $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = \frac{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}{\ln 2 + \ln 3 + \ln 5} = 1$, 化简得到 $2abc + ab + bc + ca = 1$.

又因为原式 $= \frac{1-2abc}{ab+bc+ca}$, 所以原式 $= 1$. ♡

例 2.52. (1) 若正实数 a, b 满足 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ 和 $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$, 则 $\log_4 a + \log_8 b$ 的值是_____.

(2) 已知 $\log_a b + 3\log_b a = \frac{13}{2}$. 当 $a > b > 1$ 时, $\frac{a+b^4}{a^2+b^2}$ 的值为_____.

解. (1) 因为 a, b 为正实数, 令 $\log_2 a = x, \log_2 b = y$, 则 $\log_8 a + \log_4 b^2 = \log_8 a + 2\log_4 b = \frac{\log_2 a}{\log_2 8} + 2\frac{\log_2 b}{\log_2 4} = \frac{x}{3} + y = 5$, $\log_8 b + \log_4 a^2 = \log_8 b + 2\log_4 a = \frac{\log_2 b}{\log_2 8} + 2\frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \frac{y}{3} + x = 7$.

解方程组 $\begin{cases} \frac{x}{3} + y = 5, \\ \frac{y}{3} + x = 7. \end{cases}$ 得到 $x = 6, y = 3$, 从而 $\log_4 a + \log_8 b = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} + \frac{\log_2 b}{\log_2 8} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y =$

$3 + 1 = 4$.

(2) 因为 $\log_a b$ 和 $\log_b a$ 互为倒数, 令 $\log_a b = t$, 因为 $a > b > 1$, 所以 $0 < t < 1$, $t + \frac{3}{t} = \frac{13}{2}$, 解得 $t = \frac{1}{2}$ 或 $t = 6$ (舍去), 所以 $b = \sqrt{a}$, 所以原式 $= \frac{a+a^2}{a^2+a} = 1$. $\heartsuit$

有了对数的运算法则, 我们引入对数函数的概念:

定义 2.11. 一般地, 形如 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的函数称为**对数函数**, 其中 x 为自变量. 由于真数大于零, 所以对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$. 例如函数 $y = \log_3 x^2$, 因为 $x^2 > 0$, 即 $x \neq 0$, 所以函数 $y = \log_3 x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 事实上, $y = \log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$, 根据真数大于零也可确定函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

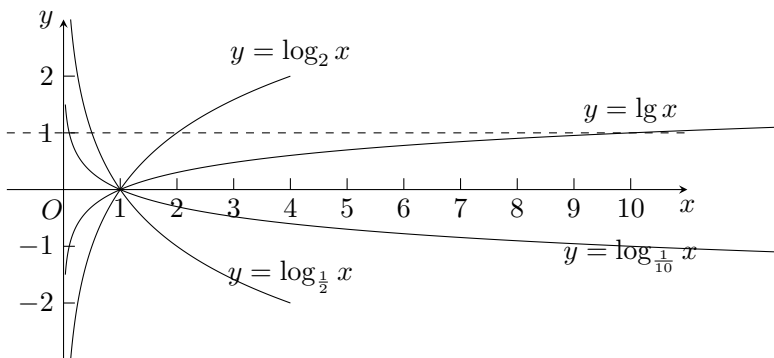


图 2.19:

由于在指数运算中指数可以取全体实数, 所以对数函数的值域为 $\mathbb{R}$. 对数函数具有抽象性质 $f(x) + f(y) = f(xy)$, 对这条性质的讨论参见例题 2.24.

图2.19示出了几个典型的对数函数的图像, 对数函数都经过定点 $(1, 0)$, 这是对数函数的特征点. 另外, 根据对数的运算规律 $\log_a a = 1$, 对数函数的图像经过点 $(a, 1)$, 即直线 $y = 1$ 与对数函数图像的交点就是底数 a 的值. 由换底公式 (参见定理2.4.1), $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, 所以函数 $y = \log_a x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像关于 x 轴对称.

对数函数在定义域 $(0, +\infty)$ 是单调函数, 当底数 $a \in (0, 1)$ 时, $y = \log_a x$ 递减; 当底数 $a \in (1, +\infty)$ 时, $y = \log_a x$ 递增, 因此: 若 $a \in (1, +\infty)$, 真数 $x > 1$, 则对数 $\log_a x > 0$, 真数 $0 < x < 1$, 则对数 $\log_a x < 0$. $a \in (0, 1)$ 的情况留给读者自己考虑.

例 2.53. 比较大小: $\log_2 5, \log_2 7, \log_3 5, \log_3 7$,

解. (1) 根据对数函数的单调性, $\log_2 5 < \log_2 7$, $\log_3 5 < \log_3 7$, 对于 $\log_2 5$ 和 $\log_3 5$, 由换底公式可知 $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$, $\log_3 5 = \frac{\lg 5}{\lg 3}$, 根据对数函数 $y = \lg x$ 的单调性, $\lg 2 < \lg 3$, 所以 $\log_2 5 > \log_3 5$, 同理 $\log_2 7 > \log_3 7$.

对于 $\log_2 5$ 和 $\log_3 7$ 的比较, 无法直接根据单调性判断, 需借助中间量. 注意到 $\log_2 5 > \log_2 4 = 2 = \log_3 9 > \log_3 7$, 所以 $\log_2 5 > \log_3 7$. 综上所述, 四者的大小关系为 $\log_3 5 < \log_3 7 < \log_2 5 < \log_2 7$. ♡

评注 2.53.1. 这种“曲边四边形”比大小的问题, 只有 B 和 D 这两个位置的函数值不能直接比较, 一般的处理方法是寻找一个中间量再利用不等式的传递性来判断. 例如本题中寻找的中间量是 2.

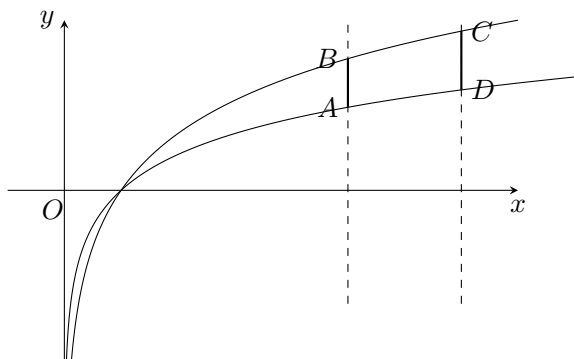


图 2.20:

例 2.54. 已知 α, β 分别满足 $\alpha \cdot e^\alpha = e^2$, $\beta(\ln \beta - 2) = e^4$, 则 $\alpha\beta$ 的值为 ().

- (A) e (B) e^2 (C) e^3 (D) e^4

解. 本题所给条件似乎与欲求的 $\alpha\beta$ 关系不大, 难以入手, 不妨对所给条件两边分别取自然对数, 得:

$$\ln \alpha + \alpha = 2$$

$$\ln \beta + \ln(\ln \beta - 2) = 4 \Rightarrow \ln(\ln \beta - 2) + (\ln \beta - 2) = 2$$

由此, 考虑构造函数 $f(x) = \ln x + x, x \in (0, +\infty)$, 则显然 $f(x)$ 是增函数, 且 $f(\alpha) = f(\ln \beta - 2) = 2$, 所以 $\alpha = \ln \beta - 2$. 又因为 $\alpha = 2 - \ln \alpha$, 所以 $2 - \ln \alpha = \ln \beta - 2 \Rightarrow \ln \alpha + \ln \beta = 4 \Rightarrow \ln(\alpha\beta) = 4 \Rightarrow \alpha\beta = e^4$, 故选 D 项. ♡

例 2.55. 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$, 则

- (A) $a > 2b$ (B) $a < 2b$ (C) $a > b^2$ (D) $a < b^2$

解. 因为 $2^a + \log_2 a = 4b^2 + 2 \log_4 b = 2^{2b} + 2 \times \frac{\log_2 b}{\log_2 4} = 2^{2b} + \log_2 b < 2^{2b} + \log_2(2b)$.

构造函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 则 $f(a) < f(2b)$, 注意到函数 $f(x)$ 递增, 所以 $a < 2b$, 选择 B 项. ♡

评注 2.55.1. 以上两个例题都体现了“同构”思想, 用这种思想解决双变量问题, 就是构造一个函数使得两个变量都具有这种结构, 从而在两个变量之间建立联系.

- 例 2.56.** (1) 若 $y = \log_{2022}(x^2 - ax + 65)$ 的值域为 $\mathbb{R}^+$ 的子集, 求 a 的取值范围;
 (2) 已知函数 $f(x) = \log_a(ax^2 - x + \frac{1}{2})$ 在区间 $[1, 2]$ 上的值恒正, 求实数 a 的取值范围;
 (3) 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - mx - m)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 求 m 的范围;
 (4) 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 3)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $(-\infty, -1]$, 求实数 a 的值.

解. (1) $y = \log_{2022}(x^2 - ax + 65)$ 的值域为 $\mathbb{R}^+$ 的子集, 根据对数函数的性质, 该条件等价于 $x^2 - ax + 65 > 1$ 恒成立, 即 $x^2 - ax + 64 > 0$ 恒成立. 根据二次函数的性质, 只需 $\Delta = a^2 - 64 \times 4 > 0$, 解得 $a \in (-16, 16)$.

(2) 当 $a > 1$ 时, 条件等价于 $ax^2 - x + \frac{1}{2} > 1$ 对任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 即 $a > \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ 恒成立, 记 $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}, x \in [1, 2]$, 则只需 $a > g_{\max}(x)$. 将 $g(x)$ 理解为关于变量 $\frac{1}{x}$ 的二次函数, 因为 $x \in [1, 2]$, 所以 $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{2}, 1]$, $g(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + 1)^2 - \frac{1}{2}$, $g_{\max}(x) = g(1) = \frac{3}{2}$, 所以 $a > \frac{3}{2}$.

当 $0 < a < 1$ 时, 条件等价于 $0 < ax^2 - x + \frac{1}{2} < 1$ 对任意的 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 即 $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} < a < \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$ 恒成立, 记 $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, x \in [1, 2]$, 则只需 $h_{\max}(x) < a < g_{\min}(x)$. $g(x)$ 和 $h(x)$ 均是关于变量 $\frac{1}{x}$ 的二次函数, 因为 $x \in [1, 2]$, 所以 $\frac{1}{x} \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + 1)^2 - \frac{1}{2}, g_{\min}(x) = g(2) = \frac{5}{8}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - 1)^2 + \frac{1}{2}, h_{\max}(x) = h(1) = \frac{1}{2}$$

所以 $a \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$.

综上所述, $a \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

评注 2.56.1. 本小问的解答采用的是分离参数的处理方法, 另外也可以分类讨论, 把问题转化为二次函数的闭区间最值, 过程留给读者自己完成.

(3) 因为函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - mx - m)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 所以内层函数 $u = x^2 - mx - m$ 取遍了一切正实数, 即 $\mathbb{R}^+$ 是 u 的值域的子集. 由二次函数的性质可知, 只需 $\Delta = m^2 + 4m \geq 0$, 解得 $m \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

(4) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 3)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ 等价于对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立, 由二次函数的性质可知, 只需 $\Delta = 4a^2 - 12 < 0$, 解得 $a \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. 记 $u = x^2 - 2ax + 3$, 因为外层函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 递减, 所以 $\log_{\frac{1}{2}} u \leq -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$ 等价于 $u \geq 2$, 即 u 的值域为 $[2, +\infty)$, 因为 $u = (x - a)^2 + 3 - a^2$ 的值域为 $[3 - a^2, +\infty)$, 所以 $3 - a^2 = 2$, 解得 $a = \pm 1$. $\heartsuit$

评注 2.56.2. 这是一组关于对数函数复合二次函数的问题, 解答这类问题需要充分理解对数函数和二次函数的性质, 从而完成对条件的转化, 并以此为基础灵活应用复合函数的定义域、值域和单调性的相关结论.

接下来我们讨论函数 $y = f(x) = |\log_a x| (a > 0, a \neq 1)$ 的性质, 以 $a > 1$ 的情形为例, $y = |\log_a x|$ 的图像可以看成是由对数函数 $y = \log_a x$ 经过翻折变换地得到的, 如图 2.21 所示. 显然, $y = |\log_a x|$ 和 $y = |\log_{\frac{1}{a}} x| = |-\log_a x|$ 表示的是同一函数.

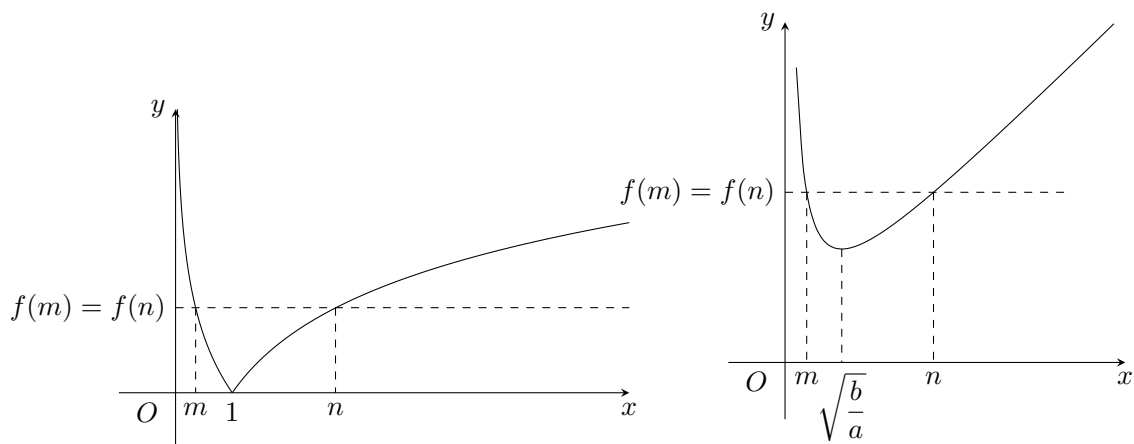


图 2.22:

图 2.21:

设 $m \neq n$, 不妨 $0 < m < n$ 满足 $f(m) = f(n)$, 因为对数函数是单调的, 所以 $\log_a m \neq \log_a n$, 所以 $\log_a m = -\log_a n$, 其中 $0 < m < 1 < n$, 所以 $\log_a(mn) = 0$, $mn = 1$. 反之, 若 $0 < m < 1 < n$ 满足 $mn = 1$, 则 $f(m) = f(n)$, 即**积为定值的作用对象所对应的函数值相等**. 我们在这里指出, 对勾函数也有类似的性质: 对于函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, $a, b > 0$, 由 $f(m) = f(n)$, $0 < m < n$ 推出 $mn = \frac{b}{a}$, 反之, 如果 $0 < m < \sqrt{\frac{b}{a}} < n$ 满足 $mn = \frac{b}{a}$, 则 $f(m) = f(n)$, 如图2.22所示.

例 2.57. 定义区间 $[x_1, x_2]$ 的长度为 $x_2 - x_1$. 若函数 $y = |\log_2 x|$ 的定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[0, 2]$, 则区间 $[a, b]$ 的长度的最大值与最小值的差为_____.

解. 作出 $y = |\log_2 x|$ 的草图, 如图2.4.3所示, 根据图像可知区间长度最大为 $\frac{15}{4}$, 最小为 $\frac{3}{4}$, 所以最大值和最小值的差为 3. ♡

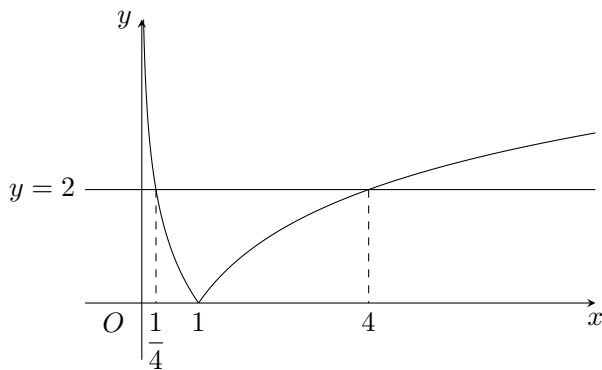


图 2.23:

例 2.58. 若函数 $f(x) = |\log_a x| - 2^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的两个零点为 m, n , 则 ().

(A) $mn = 1$

(B) $mn > 1$

(C) $mn < 1$

(D) mn 与 1 的大小关系不能确定

解. 令 $f(x) = 0$ 得到 $|\log_a x| = 2^{-x}$, 函数 $f(x) = |\log_a x| - 2^{-x} (a > 0, a \neq 1)$ 的两个零点为 m, n 等价于 $y = |\log_a x|$ 和 $y = 2^{-x}$ 有两个交点, 作出草图 (如图2.24) 并结合上述性质可知 $n < \frac{1}{m}$, 所以 $mn < 1$, 选择 C 项. $\heartsuit$

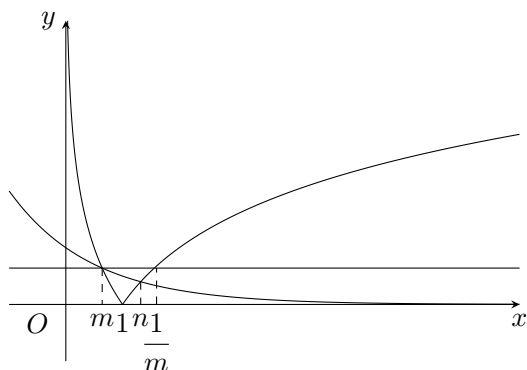


图 2.24:

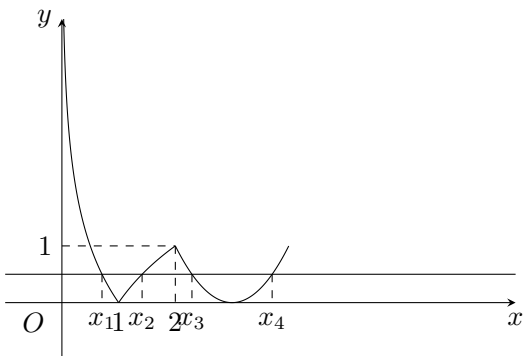


图 2.25:

例 2.59. 已知定义在 $(0, 4)$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 9, & 2 < x < 4, \end{cases}$ 已知方程 $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$ 有 4 个不同的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的范围为_____.

解. 方程 $f(x) = m$ 有 4 个不同的实数根等价于 $y = f(x)$ 与 $y = m$ 有 4 个不同的交点, x_1, x_2, x_3, x_4 是四个交点的横坐标, 作出草图2.25, 不妨 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 因为函数值相等 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 根据二次函数的对称性可知作用对象满足关系 $x_3 + x_4 = 6$, 再根据 $y = |\log_2 x|$ 的性质 $x_1 x_2 = 1$ 且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 所以 $x_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 + x_1 + \frac{1}{x_1}$, 根据对勾函数的性质, $6 + x_1 + \frac{1}{x_1} \in (8, \frac{17}{2})$. $\heartsuit$

例 2.60. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10, \\ 6 - \frac{1}{2}x, & x > 10 \end{cases}$ 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的范围为_____.

解. 作出草图2.26, 根据 $y = |\lg x|$ 的性质可知 $ab = 1$. 分析图像得 $c \in (10, 12)$, 所以 $abc = c \in (10, 12)$. $\heartsuit$

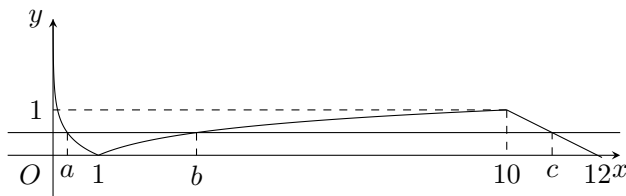


图 2.26:

2.4.4 反函数, 逆映射存在的充要条件

前面我们根据指数和对数之间的关系得到 $y = a^x, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$ (其中 $a > 0, a \neq 1$). 由函数的定义可知 $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$ 是一个函数. 这样我们由指数函数 $y = a^x, x \in \mathbb{R}$ 得到了对数函数 $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$, 可以看出它们的定义域和值域正好互换, 这时我们就说函数 $y = a^x, x \in \mathbb{R}$ 与函数 $x = \log_a y, y \in (0, +\infty)$ 互为**反函数**. 由于我们更加习惯以 x 表示自变量, y 表示因变量, 所以通常说 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 互为反函数. 对数函数与指数函数是最典型也是最为大家所熟知的一对反函数.

定义 2.12. 若映射 $f: X \rightarrow Y$ 既是满射又是一一映射, 根据满射和一一映射的定义, 对于每一个 $y \in Y$ 都有唯一一个确定的 x 使得 $f(x) = y$. 这样就形成了一个自 Y 到 X 的映射, 我们把这个映射称为映射 f 的**逆映射**, 记作 $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

根据定义立刻得到 f 的逆映射存在的充分必要条件是 f 既是满射又是一一映射.

特别地, 若函数 $f: X \rightarrow Y$ 作为映射是一一满射, 则其逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 称为 f 的**反函数**. 由此可见, f 和 f^{-1} 的定义域和值域是恰好互换的.

一般地, 函数 $f(x), x \in D$ 作为映射是一一映射等价于对于 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地, 连续函数 $f(x)$ 是一一映射的充分必要条件是 $f(x)$ 严格单调, 因此**严格单调的连续函数必有反函数, 且其反函数也是严格单调的连续函数**.

根据反函数的定义, 我们立刻得到它具有如下性质: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$, 即作用对象被一个映射和其逆映射先后作用又变回作用对象本身.

对于函数 $y = f(x), (x_0, f(x_0))$ 在它的图像上, 考虑其反函数 $y = f^{-1}(x)$, 因为 $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$, 所以 $(f(x_0), x_0)$ 在它的图像上, 由此可知 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 即若点 (x, y) 在函数 $y = f(x)$ 的图像上, 则 (y, x) 在函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上.

例 2.61. (1) 已知实数 a, b 满足 $a + \lg a = 10, b + 10^b = 10$, 则 $\lg(a+b) =$ _____.
(2) 若 x_1 满足 $2x + 2^x = 5$, x_2 满足 $2x + 2\log_2(x-1) = 5$, 则 $x_1 + x_2 =$ _____.

解. (1) 因为 $\lg a = 10 - a, 10^b = 10 - b$, 则 a 为 $y = \lg x$ 与 $y = 10 - x$ 交点的横坐标, b 为 $y = 10^x$ 与 $y = 10 - x$ 交点的横坐标. 作出 $y = 10^x, y = \lg 10, y = 10 - x$ 的草图 2.27, 因为 $y = \lg x$ 和 $y = 10^x$ 互为反函数, 两者的图像关于 $y = x$ 对称, 而 $y = 10 - x$ 的图像关于直线 $y = x$ 也对称, 所以点 $(a, \lg a)$ 和点 $(b, 10^b)$ 关于直线 $y = x$ 也对称, 两者的横纵坐标恰好互换, 所以 $a = 10^b, \lg a = b$. 所以 (a, b) 和 (b, a) 在 $y = 10 - x$ 的图像上, $b = 10 - a$, 所以 $a + b = 10$, 所以 $\lg(a+b) = 1$.

(2) 由题设, $2^{x_1-1} = \frac{5}{2} - x_1, \log_2(x_2 - 1) = \frac{5}{2} - x_2$, 考虑以 $x_1 - 1$ 和 $x_2 - 1$ 为主元, 即 $2^{x_1-1} = \frac{3}{2} - (x_1 - 1), \log_2(x_2 - 1) = \frac{3}{2} - (x_2 - 1)$. 与第一小问同理可得, $x_1 - 1 = \frac{3}{2} - (x_2 - 1)$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$. ♡

评注 2.61.1. 这道例题的两个小问灵活应用了互为反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称这一重要性质, 在反函数问题中也常常借助数形结合的方法, 通过分析函数图像解答问题.

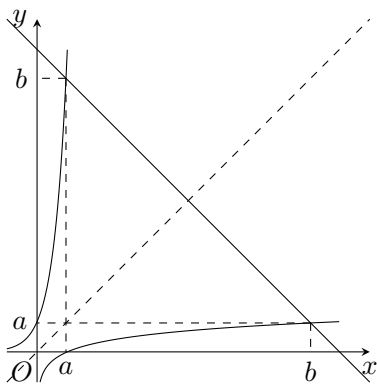


图 2.27:

设有连续的单调函数 $f(x)$, 根据逆映射存在的充要条件可知 $f(x)$ 存在反函数, 记为 $f^{-1}(x)$, 如果 $f(x)$ 的定义域关于原点对称且是奇函数, 由奇函数的性质知其值域也关于原点对称, 可以证明 $f^{-1}(x)$ 也是单调的奇函数 (留给读者).

例 2.62. 已知函数 $y = f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}, a > 1$, 由 2.4.2 节可知它是一个单调递增的奇函数, 所以它存在反函数, 记为 $g(x)$;

(1) 求 $g(x)$;

(2) 证明 $g(x)$ 是单调递增的奇函数.

解. (1) 因为 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 所以 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 由 $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ 整理得 $a^{2x} - 2ya^x - 1 = 0$, 因为 $a^x > 0$, 解这个关于 a^x 的二次方程得 $a^x = \frac{2y + \sqrt{4 + 4y^2}}{2} = 1 + \sqrt{1 + y^2}$ (另一根为负, 舍去), 所以 $x = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$, 习惯上用 y 表示因变量, x 表示自变量, 所以

$$g(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}.$$

(2) 先证明 $g(x)$ 是奇函数, $g(x) + g(-x) = \log_a(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \log_a(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \log_a[(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)] = \log_a(x^2 + 1 - x^2) = 0$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.

下面证明 $g(x)$ 单调递增, 任取 $x_1 < x_2$, 则需证明

$$g(x_1) - g(x_2) = \log_a\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2}\right) < 0$$

为此只需证明 $\frac{\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1}{\sqrt{x_2^2 + 1} + x_2} < 1$, 因为 $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$, 所以只需证明 $\sqrt{x_1^2 + 1} + x_1 - \sqrt{x_2^2 + 1} - x_2 < 0$.

因为

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} + x_1 - x_2 &= \frac{x_1^2 + 1 - x_2^2 - 1}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} + x_1 - x_2 \\ &= (x_1 - x_2)\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} + 1\right) \\ &= (x_1 - x_2)\left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} + x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}\right). \end{aligned}$$

又因为 $x_1 - x_2 < 0, x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1} + x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} > 0$, 所以 $g(x_1) - g(x_2) < 0$, $g(x)$ 是单调递增的奇函数.

总之我们证明了函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), a > 1$ 是单调递增的奇函数. 另外, 我们已经证明了 $f(x) = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$ 是单调的奇函数 (参见例2.44), 其反函数 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 也是单调的奇函数, 有兴趣的读者可以自己证明这一结论. $\heartsuit$

2.4.5 指对幂增长的比较

我们看到指数函数 $y = a^x, a > 1$, 对数函数 $y = \log_a x, a > 1$ 和 $y = x^\alpha, \alpha > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 都是增函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 y 都趋向于 $+\infty$, 但是它们的增长方式有很大的差异. 这种差异正是不同类型的现实问题具有不同增长规律的反映, 下面我们从定性上认识和比较这些函数增长的特点.

指数函数、对数函数和幂函数增长的速度不同, 且不在同一个档次上. 随着 x 的增长, $y = a^x (a > 1)$ 增长越来越快, 会超过并且远远大于 $y = x^n$ 的增长速度, 呈爆炸式增长. 而 $y = \log_a x, a > 1$ 的增长速度越来越慢, 图像也随着 x 的增长越来越平缓, 就像与 x 轴平行一样. 例如 $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 10000 = 4$, 而对于一次函数 $y = \frac{1}{10}x$, 它在 10 处的函数值也为 1, 但是 $\frac{1}{10} \times 100 = 10$, $\frac{1}{10} \times 1000 = 100$, $\frac{1}{10} \times 10000 = 1000$, 由此可见当 $x > 10$ 时, $y = \lg x$ 的增长与 $y = \frac{1}{10}x$ 相比, 就显得极其缓慢了.

对于幂函数而言, 随 α 值的不同, 也会在 $(0, +\infty)$ 呈现不同的增长规律. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 幂函数增长得越来越慢, 但是快于对数函数. 而当 $\alpha = 1$ 时, 幂函数匀速增长, 当 $\alpha > 1$ 时, 幂函数增长越来越快, 且对于更大的 α 值, 其增长就更加剧烈. 例如三次函数的增长比二次函数的增长更快. 但是不论对于多么大的 α 值, 幂函数的增长速度都比不上指数函数, 幂函数也许会暂时领先, 但随着 x 的不断增长, 指数函数的增长速度最终必会超过并远远大于幂函数的增长速度.

例 2.63. (1) 命题 p : 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 关于 x 的不等式 $1.0001^x - \lambda x^{10000} > 0$ 总有解, 则命题 p 是_____ (“真”或“假”) 命题.

(2) 若方程 $a^x - x - a = 0, a > 0$ 有两个实数解, 则 a 的取值范围是_____.

(3) 方程 $3^x = x^3$ 的解集中有_____个元素.

解. (1) 当 $\lambda \leq 0$ 时, 不等式恒成立, 当 $\lambda > 0$ 时, 根据指对幂增长的比较, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $1.0001^x > \lambda x^{10000}$ 成立, 只要 $x > x_0$, 所以命题 p 是真命题.

(2) 作出图像, 当 $0 < a \leq 1$ 时, 根据指数函数的性质, 方程最多有 1 个实数解, 当 $a > 1$ 时, 根据图像2.28结合指数函数增长的特点可知方程有两个实数解, 所以 a 的范围是 $(1, +\infty)$. $\heartsuit$

(3) 作出图像2.29, 结合指数函数和幂函数增长的比较可知方程有 2 个实数解, 所以方程 $3^x = x^3$ 的解集中有 2 个元素.

习题 2.4

1. 若对任意的 $x \in (-\infty, -1)$, 均有 $(m - m^2)4^x + 2^x + 1 > 0$, 则实数 m 的取值范围是_____.

2. 设函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x, x \in [0, +\infty)$, 则该函数图象上整点的个数为_____.

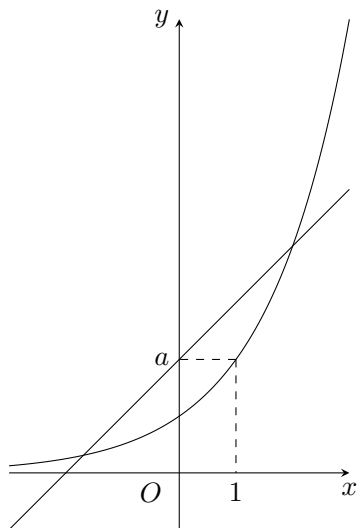


图 2.28:

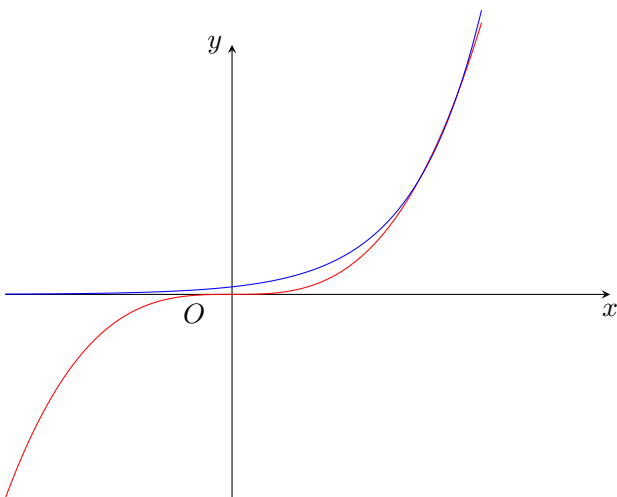


图 2.29: 指数函数有一个落后反超的过程

3. 方程 $3^x + 5^x + 7^x = 11^x$ 共有_____个不同的实根.
4. 若方程 $a^x - x - a = 0$ 有两个实数解, 则 a 的取值范围是_____.
5. 不等式 $3^{|x+2|} + 3^{|x-1|} \geq 28$ 的解集为_____.
6. 已知函数 $f(x) = a + x - b^x$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1) (n \in \mathbf{Z})$, 其中常数 a, b 满足条件 $2019^a = 2020$, $2020^b = 2019$, 则 n 的值为_____.
7. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $3^a + 11^b = 16^a, 6^a + 8^b = 13^b$, 求证: $a < b$.
8. 如果 $x \in [0, 1]$, 且 $\log_2 \log_2 (2x+2) + 2^{2x+2}$ 为整数, 则满足此条件的实数 x 有_____个.
9. 关于 x 的方程 $\lg(ax+1) = \lg(x-1) + \lg(2-x)$ 有唯一实数解, 则实数 a 的取值范围是_____.
10. 已知 $\log_{\sqrt{7}}(5a-3) = \log_{\sqrt{a^2+1}} 5$, 则实数 $a =$ _____.
11. 已知 $a = \log_8 5, b = \log_4 3, c = \frac{2}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系是_____.
12. 已知 $a > 1$, 则 $\log_a 16 + 2 \log_4 a$ 的最小值为_____.
13. 若 $4^a = 6^b = 9^c$, 则 $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c} =$ _____.
14. 已知点 $P(4, 1)$ 在函数 $f(x) = \log_a(x-b) (b > 0)$ 的图象上, 则 ab 的最大值是_____.
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e, \\ \frac{e}{x}, & x > e. \end{cases}$ 若存在 3 个不同的实数 a, b, c 使得 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $af(b) + bf(c) + cf(a)$ 的取值范围是_____.
16. 方程 $(\lg x)^{\lg(\lg x)} = 10000$ 的整数解为 $x =$ _____.

17. 已知函数 $f(x) = \log_2(a^x - b^x)$, 且 $f(1) = 1$, $f(2) = \log_2 12$.

(1) 求 a 、 b 的值;

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值.

18. 已知函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) + kx (k \in \mathbf{R})$ 为偶函数.

(1) 求 k 的值;

(2) 若方程 $f(x) = \log_4(\frac{m}{2^x} - 1)$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

第三章 基本初等函数 II

What we do may be small, but it has a certain character of permanence.

(我们所做的事情可能是渺小的, 但是它具有某些永恒的性质.)

——G.H.Hardy

在前一讲中我们介绍了函数的性质, 并以二次函数为例介绍了从函数性质的角度研究函数的方法, 进而介绍了几类非常重要的基本初等函数: 幂函数, 指数函数和对数函数. 在这一讲中我们介绍另外一类重要的初等函数, 即三角函数.

在初中课程中我们已经学过了锐角三角函数, 并掌握了利用锐角三角函数解直角三角形的方法. 在高中阶段, 我们将把三角函数的定义域推广到实数范围来讨论问题. 为此, 我们需要引入任意角作为更加普适的角的概念, 同时需要引入弧度制从而在角的集合与实数集 $\mathbb{R}$ 之间建立一一对应的关系, 进而深入研究三角函数的性质.

3.1

三角函数

3.1.1 任意角与弧度制

角可以看成是平面内一条射线绕它的端点从其初始位置 (称为**始边**) 旋转至终止位置 (称为**终边**) 所形成的图形, 如图 3.1 所示. 角是一个由旋转产生的图形, 我们把射线的端点称为角的顶点.

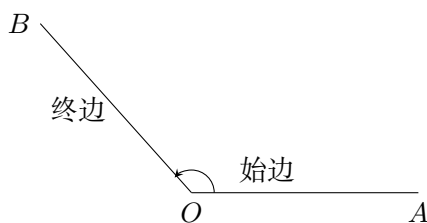


图 3.1:

我们规定: 按逆时针方向旋转形成的角为**正角**, 按顺时针旋转形成的角为**负角**, 如果一条射线从始边 OA 没有作任何旋转, 终边 OB 与始边 OA 重合, 我们称这样的角是**零度角**或**零角**. 如图所示, 图3.2中 α 是正角, 图 3.3中 α 是负角, 图3.4 是零角. 这样, 我们得到了任意角的概念: 任意角

的形成过程需要两个要素：旋转量和旋转方向，任意角包括正角、负角和零角，任意角角度的概念不再限于 0° 到 360° .

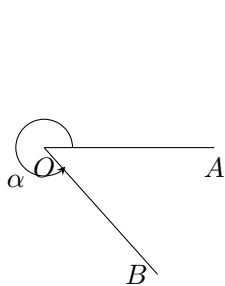


图 3.2:

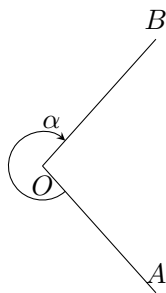


图 3.3:



图 3.4:

为了方便，我们常在平面直角坐标系中讨论角. 我们使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么角度终边（除端点外）落在第几象限内，我们就说这个角是**第几象限角**，例如 -40° 的终边落在第四象限，所以它是第四象限角， 361° 的终边落在第一象限内，所以它是第一象限角.

如果角的终边不在任何象限内，而是落在了坐标轴，我们就说这个角是**轴线角**. 对于任何一个任意角，它要么是象限角，要么是轴线角.

观察： $30^\circ, 390^\circ, 750^\circ$ 这几个角有什么共同点？

如果角 α, β 的终边相同，即终边重合，则将 α 的终边再旋转（逆时针或顺时针） k 周 ($k \in \mathbb{Z}$ 即可得到 β ，由此我们立刻得到所有与 α 终边相同的角连同它本身可构成集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \times 360^\circ\}$ ，即任何一个与 α 终边相同的角都可以写成角 α 和 360° 周角的整数倍之和的结构.

确定角的终边所在象限或所在的轴线是一个重要的问题. 我们可以根据终边相同的角之间相差 $k \times 360^\circ$ 这一结论找到与所给角终边相同的最小正角 $\alpha (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ)$ ，则 α 的终边所在位置就是所给角的终边所在位置.

例 3.1. (1) 372° 的终边所在象限为 ().

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(2) 已知 α 是第二象限角，则 $180^\circ - \alpha, 2\alpha, \frac{\alpha}{3}, -\frac{\alpha}{2}$ 终边的位置如何？

(3) 试表示出集合 $\{\alpha | k \cdot 180^\circ + 45^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 90^\circ\}$ 中终边所在的平面区域.

解. (1) $372^\circ = 360^\circ + 12^\circ$ ， 372° 与 12° 的终边相同，所以 372° 的终边在第一象限.

(2) 由 α 是第二象限角可知 $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ，所以：

$-k \cdot 360^\circ < 180^\circ - \alpha < 90^\circ - k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 $180^\circ - \alpha$ 是第一象限角.

$180^\circ + 2k \cdot 360^\circ < 2\alpha < 360^\circ + 2k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ，所以 2α 是第三象限角或第四象限角或终边落在 y 轴非正半轴的角.

$k \cdot 120^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 60^\circ$ ，当 $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$ 时， $n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 60^\circ, n \in \mathbb{Z}$ ，这时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；当 $k = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 时， $n \cdot 360^\circ + 150^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ, n \in \mathbb{Z}$ ，这

时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角; 当 $k = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$ 时, $n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 300^\circ, n \in \mathbb{Z}$, 这时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限角.

综上所述, $\frac{\alpha}{3}$ 是第一, 第二或者第四象限角.

我们也可以用图解的方法直观地看出本题的结论. 为确定 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围, 我们用原点出发的射线将每个象限 3 等分, 它们正好与坐标轴共同将周角分为 12 个区域, 从 x 轴的非负半轴起按逆时针将这些区域顺次循环标注 1, 2, 3, 4, 这样我们便得到了 α 角终边所在位置与 $\frac{\alpha}{3}$ 终边所处区域的对应关系. 例如本题中, 图 3.5 中标有数字 2 的区域是 $\frac{\alpha}{3}$ 终边所在区域, 所以 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一, 第二或者第四象限角.

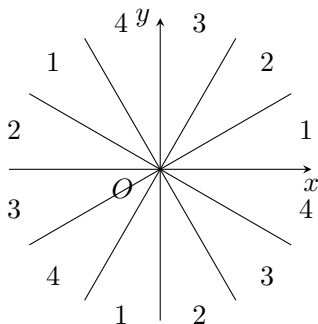


图 3.5:

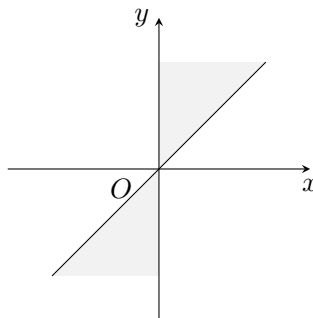


图 3.6:

$-k \cdot 180^\circ - 45^\circ < -\frac{\alpha}{2} < -k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. 当 k 为偶数时, $-\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角; 当 k 为奇数时, $-\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

本题也可以用图解法先确定 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在象限为第一或第三象限, 再根据 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $-\frac{\alpha}{2}$ 终边关于 x 轴对称得到 $-\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

(3) 当 k 为偶数 $2n, n \in \mathbb{Z}$ 时, $n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$, 当 k 为奇数 $2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 时, $n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$. 综上所述我们确定了 α 终边的位置, 表示为平面区域如图 3.6 所示. ♡

我们现在引入**弧度制**. 在初中阶段我们采用的是角度制, 在角度制下角的单位是度, 1° 的角是周角的 $\frac{1}{360}$. 而在弧度制下角的单位是弧度 (记作 rad).

我们把圆弧长与半径的比值定义为**弧度**. 在单位圆 (半径为单位长度 1) 中, 长度为 1 的弧所对的圆心角称为 1 弧度角或 1rad 角. 在单位圆中, 圆心角的弧度数就等于其所对的弧长, 当圆心角为周角时, 他所对的弧长等于圆周长 2π , 因此周角的弧度为 2π , 由此 1° 角的弧度为 $\frac{\pi}{180}$ rad, 我们将 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad 这两个公式称为角度制与弧度制的互化公式, 有了这个公式, 我们就可以将一个角的度量值由弧度换算为角度, 或是由角度换算为弧度. 我们规定正角的弧度数是正数, 负角的弧度数是负数, 零角的弧度数是 0. 这种以弧度作为单位来度量任意角的单位制叫做**弧度制**. 从本质上来说, 弧度制相当于用一个实数来表示角的度量, 因为弧度实际上是两个长度的比值, 在这个看法下, 我们也可以认为弧度的单位是 1, 单位 rad 是冗余的, 可以省略. 弧度的引入仅仅是类比于角度 $^\circ$, 我们人为添加以突出这是用来度量角的单位, 这种表示, 用于弧度制与角度制之间换算, 在形式上也比较方便.

既然我们可以用不同的实数来表示不同的任意角, 所以在弧度制下, 角的集合和实数集 $\mathbb{R}$ 建立

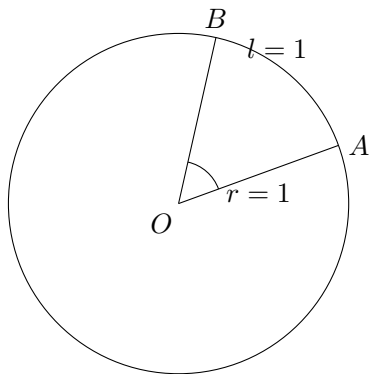


图 3.7:

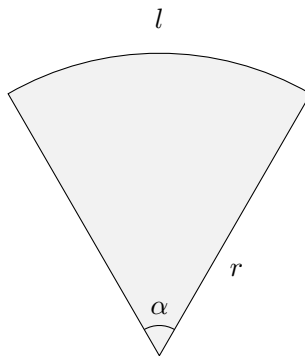


图 3.8:

了一一对应. 这是引入弧度制的重要意义, 这意味着我们可以将角度与三角函数值之间的映射表示为实数与三角函数值之间的映射, 即我们在今后可以将三角函数定义为数集与数集之间的映射, 进而讨论三角函数的性质.

我们列出一些常见特殊角的度数与弧度数的对应如下表, 读者可以花些时间去熟悉一下.

表 3.1: 特殊角的度数与弧度的对应表

弧度数	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
度数	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	180°

记忆特殊角的角度与弧度互化的根本是抓住 $15^\circ = \frac{\pi}{12}$.

我们知道弧度数的定义为 $|\alpha| = \frac{l}{r}$, 其中 l 是 α 所对弧长, r 是圆弧半径. 因此我们立刻得到弧度制下的弧长公式:

$$l = |\alpha|r$$

考虑一个弧长为 l , 半径为 r , 圆心角的弧度数为 α 的扇形, 如图3.8所示, 则它在弧度制下的面积公式为

$$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$$

推导: 考虑半径为 r 的圆面积为 $S_{\text{圆}} = \pi r^2$, 它所对的圆心角为 $2\pi \text{rad}$, 所以 1rad 所对的扇形面积为 $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$. 对于这个公式的记忆, 也可以将扇形想象成以弧长 l 为底, 半径 r 为高的三角形, 则扇形面积为 $S = \frac{1}{2}lr$.

在弧度制下, 终边相同的角构成集合的结构为 $S = \{\beta | \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. 即终边相同的角相差 2π 的整数倍.

例 3.2. (1) 2 弧度的角终边在第几象限?

(2) 角 β 的终边与角 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ 关于直线 $x + y = 0$ 对称, 求 β .

解. (1) 因为 $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, 所以 2 弧度的角终边在第二象限.

(2) 由题意可知 β 的终边与 $-\frac{\pi}{6}$ 相同, 所以 $\beta = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

♡

3.1.2 三角函数概念与单位圆的三角函数线, 诱导公式

我们利用单位圆来定义正弦和余弦函数. 作以坐标原点为圆心的单位圆, 对于任意的角 α , 使角 α 的顶点与原点重合, 终边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆交于唯一的点 $P(u, v)$, 则我们把有向线段 MP 称为**正弦线**, 把有向线段 OM 称为**余弦线**, 点 P 的纵坐标 v 是角 α 的**正弦函数**, 点 P 的横坐标 u 是角 α 的**余弦函数**. 显然正弦函数的值就等于正弦线的有向长度, 而余弦函数的值就等于余弦线的有向长度, 记为:

$$v = \sin \alpha = \text{线段} MP \text{的有向长度}, u = \cos \alpha = \text{线段} OM \text{的有向长度}$$

因为对于任意角 α 可以是正角、负角或零角, 所以正弦和余弦函数的定义域 $\mathbb{R}$, 值域为 $[-1, 1]$. 在弧度制下, 任意角的正弦和余弦函数建立了从 $\mathbb{R}$ 到 $[-1, 1]$ 的映射关系, 这与我们先前所讨论的函数定义是一致的.

当 α 满足 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 显然这时 α 的终边不落在 y 轴上, 那么我们将唯一确定比值 $\frac{v}{u}$, 且保证了比值有意义. 我们将这个比值定义为角 α 的正切函数.

我们设单位圆与 x 轴非负半轴的交点 $(1, 0)$ 是点 A , 过点 A 作 x 轴的垂线, 与角 α 终边所在直线即直线 OP 交于点 T , 则有向线段 AT 称为**正切线**, AT 的有向长度就是正切函数的值, 记作:

$$\frac{v}{u} = \tan \alpha = \text{线段} AT \text{的有向长度}, \text{其中 } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

我们可以直观地看出正切函数的定义域为 $\{\alpha | \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $\mathbb{R}$.

结合正弦和余弦函数的定义, 不难看出对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan \alpha = \frac{v}{u} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

这是一个非常重要的关系式.

正弦、余弦、正切函数都是以角的弧度数为自变量, 以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数, 我们统称它们为三角函数.

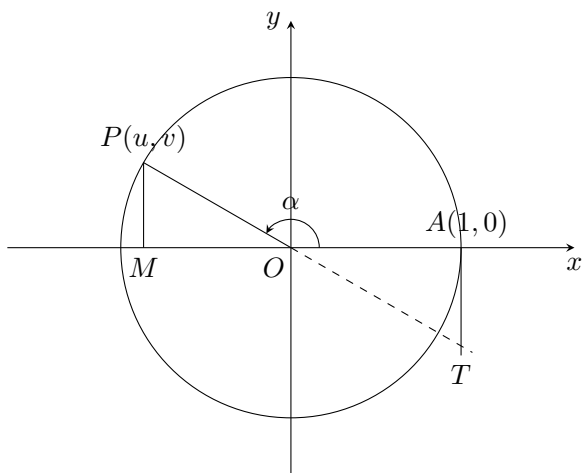


图 3.9: 单位圆的三角函数线

从定义上可以看出, 我们只需知道角 α 终边上的一点, 就可以计算出角 α 的各三角函数值. 例如角 α 终边上一点为 $Q(x, y)$, 则 $|OQ| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则由定义可知 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$. 当 $x \neq 0$ 时, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$. 事实上, 角的终边与单位圆的交点坐标为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 所以点 Q 的坐标为 $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, 即 $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$.

根据正弦、余弦、正切函数的定和各个象限内横纵坐标的符号, 我们可以得到正弦、余弦、正切函数值在每个象限内的符号如图3.10所示, 可以简单记忆为: 一全正, 二正弦, 三正切, 四余弦.

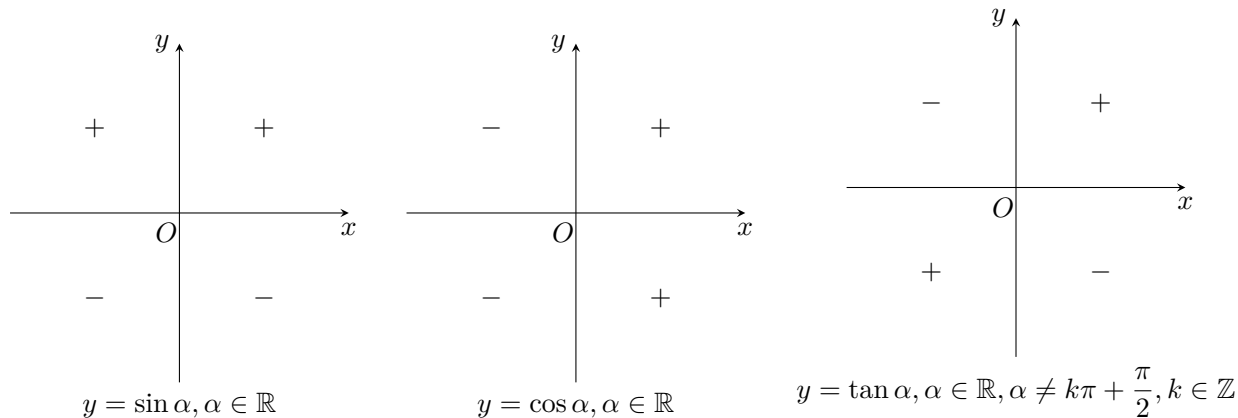


图 3.10:

我们在初中阶段已经学过了一些特殊的锐角三角函数值. 现在我们采用了弧度制, 并且将角推广到了任意角, 自然要问一个问题: 是否能够得到除锐角范围内的特殊角以外的一些其他特殊角的三角函数值?

观察: 设我们有已知角 α , 借助单位圆的某些对称性和周期性思考: 以下角的三角函数值与已知角 α 的三角函数值有什么关系? (1) 终边与 α 相同的角; (2) 终边与 α 分别与 α 关于原点、 y 轴、 x 轴和直线 $y = x$ 对称的角.

作图3.11, 我们不难看出终边与 α 相同的角的正弦、余弦函数值相等, 即:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

上述两个等式说明: 对于任意一个角 α , 每增加 2π 的整数倍, 其正弦、余弦函数值均不变. 由此亦可见正弦、余弦函数是周期函数, 且它们的最小正周期都是 2π .

对于正切函数 $y = \tan \alpha$, 根据定义, 只要两个角的终边在同一直线上, 其正切函数值就相等, 即:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

复原正切函数值只需要“转半圈”, 即对于任意一个角 x , 每增加 π 的整数倍, 正切函数值不变, 所以正切函数也是周期函数, 它的最小正周期是 π .

接下来我们考虑终边与 α 关于原点对称的角 $\pi + \alpha$. 作图3.12 可知角 α 和 $\pi + \alpha$ 的终边与单位圆的交点横、纵坐标的绝对值相等、符号相反, 因此:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha. \quad (3.1)$$

类似地考虑终边与 α 关于 x 轴的角 $-\alpha$ 和 y 轴对称的角 $\pi - \alpha$, 我们得到下面两组公式:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha; \quad (3.2)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha. \quad (3.3)$$

其中公式3.3也可以通过用 $-\alpha$ 替换式3.1中的 α , 再根据式3.2 得到.

对于终边与 α 关于直线 $y = x$ 对称的角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, 从图中可以看出角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 与 α 的终边与单位圆的交点横纵坐标恰好互换, 所以我们得到下面一组公式:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}. \quad (3.4)$$

如果角 α 满足 $\alpha \neq k\pi$ 且 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 我们将角 α 的正切函数的倒数定义为角 α 的余切函数, 特别地, 当 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, 角 α 的余切函数值为 0, 当 $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 角 α 的余切函数值不存在, 记作:

$$y = \cot \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

因此上述公式也常写成:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha. \quad (3.5)$$

用 α 替换上述公式中的 $-\alpha$, 再根据式3.2, 又可以得到一组公式:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha. \quad (3.6)$$

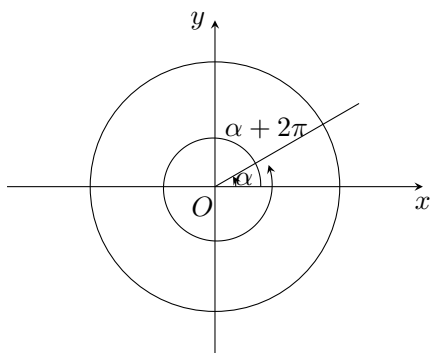


图 3.11:

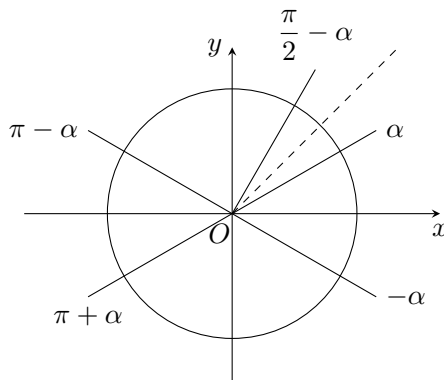


图 3.12:

有了3.1到3.6这几组公式, 我们就可以计算很多除锐角范围内的特殊角以外的一些其他特殊角的三角函数值了, 这些公式都是基于单位圆的周期性和对称性得到的, 上面几组公式俗称为**诱导公式**.

上面的几组公式形式过于繁多, 不便于记忆, 应用起来也很不方便, 为此我们给出诱导公式的统一形式:

定理 3.1.1 (诱导公式). 已知角 α , 欲求角 $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$ 的三角函数值, 我们有“奇变偶不变, 符号看象限”的规律. 具体操作如下:

(1) 当 k 为奇数时, $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 的函数值等于 α 的异名函数值 (正弦变余弦, 余弦变正弦, 正切变余切), 前面再加上一个把 α 看成锐角时待求函数值的符号.

(2) 当 k 为偶数时, $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 的函数值等于 α 的同名三角函数值, 前面也加上把 α 看成锐角时待求函数值的符号.

例如公式 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$, 由于 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 中 $k = 3$, 因此函数名改变, 正弦变余弦; 把 α 看成锐角, 则 $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ 转过“一圈半”, 是第四象限角, 其正弦函数值为负, 所以要在 $\cos \alpha$ 前加一个负号.

由此可见, 我们只需按照(1) 根据“奇变偶不变”确定函数名 (2) 根据假设 α 为锐角, 确定 $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 所在象限 (3) 确定待求函数的符号这几个步骤进行, 就可以方便地应用诱导公式, 也免去了记忆上的麻烦.

利用诱导公式, 我们可以计算几个常用特殊角的三角函数值:

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{3} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin \frac{5\pi}{6} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, & \cos \frac{5\pi}{6} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \tan \frac{2\pi}{3} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}, & \tan \frac{5\pi}{6} &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

例 3.3. (1) $\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4$ 的符号为 ().

(A) 正 (B) 负 (C) 0 (D) 不能确定

(2) 角 α 的终边过点 $P(\sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3})$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

(3) 已知函数 $f(x) = a \sin(\pi x + \varphi) + b \cos(\pi x + \theta)$ (a, b, φ, θ 都是非零的常数), 如果 $f(2020) = 1$, 则 $f(2021)$ 的值为_____.

(4) 已知函数 $f(x), x \in \mathbb{R}$ 满足 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$. 当 $0 \leq x < \pi$ 时 $f(x) = 0$, 则 $f(\frac{23\pi}{6}) =$ ().

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$

解. (1) 要判断三角函数值的符号, 只要判断角所在的象限. $0 < 1 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < 2 < 3 < \pi, \pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, 所以 1, 2, 3, 4 这四个角分别是第一, 第二, 第二和第三象限角, $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$ 的符号分别为正, 正, 正, 负, 所以原式的符号为负, 选 B 项.

(2) 根据正切函数的定义及特殊角的三角函数值, $\tan \alpha = \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $f(2020) = a \sin(2020\pi + \varphi) + b \cos(2020\pi + \theta) = a \sin \varphi + b \cos \theta = 1$, 所以 $f(2021) = a \sin(2021\pi + \varphi) + b \cos(2021\pi + \theta) = -a \sin \varphi - b \cos \theta = -1$.

(4) 考虑到已知函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上是常数 0, 因此反复利用题给函数性质将 $f(\frac{23\pi}{6})$ 转化, 再

利用诱导公式求值:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{23\pi}{6}\right) &= f\left(\frac{17\pi}{6}\right) + \sin \frac{17\pi}{6} = f\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin \frac{17\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} \\
 &= f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin \frac{17\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{17\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} \\
 &= 2 \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

因此选 A 项.

♡

3.1.3 正、余弦函数的图像和性质

正弦函数是以 2π 为周期的周期函数, 因此要研究其图像, 只要画出 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像, 再不断地向左、向右平移 (每次平移 2π 单位长度), 就可以得到 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的图像.

根据正弦函数的定义, 对于 $[0, 2\pi]$ 上任取的一个值 x_0 , 只需将点 $A(1, 0)$ 在单位圆上绕着 O 旋转 x_0 弧度至点 B , 那么点 B 的纵坐标 $y_0 = \sin x_0$. 由此, (x_0, y_0) 就是函数图像上的点.

若把 x 轴上从 0 到 2π 的这一段分成 12 等份, 使得 x_0 的值分别取 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots, 2\pi$, 它们所对的角的终边与单位圆的交点也将圆周 12 等分, 再按照上述方法描点, 便可得到自变量取这些值时对应的函数图像上的点, 如图 3.13 所示.

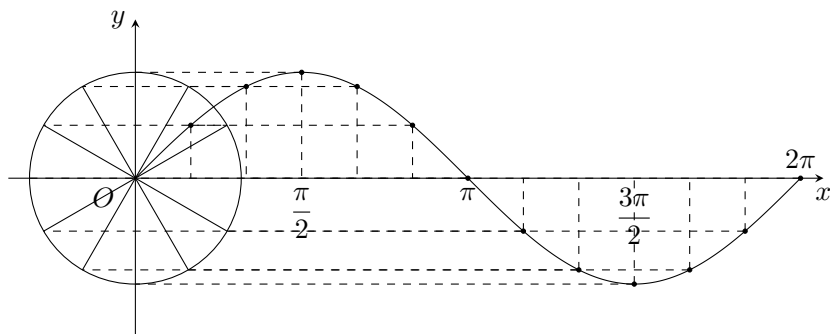


图 3.13:

如果我们让 x_0 取到足够多的值, 画出足够多的点并用光滑曲线把这些点连接起来, 就可以得到比较精确的 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像, 进而得到 $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 的图像, 它的图像是一条波浪起伏的连续光滑曲线, 如图 3.14 所示.

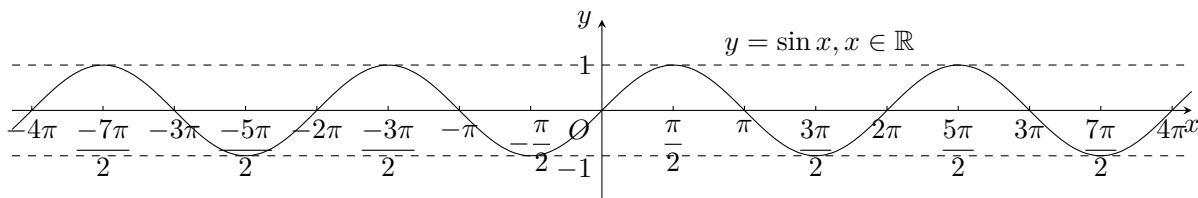


图 3.14:

对于函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像, 可以发现其最高点是 $(\frac{\pi}{2}, 1)$, 最低点是 $(\frac{3\pi}{2}, -1)$, 与 x 轴的交点是 $(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$, 这五个点对图像的形状起到关键的作用, 图像的形状就基本确定

了. 描出这五个点后, 再用光滑的曲线顺次连接它们, 可以作出 $y = \sin x$ 的简图, 我们将这种作图方法称为**五点法**, 五点法虽然精度不高, 但是却包含了关于正弦函数图像的关键信息, 因而可以用来说明许多问题.

根据诱导公式, 我们有: $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}$. 可见, 余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ 的图像可以由正弦函数的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度而得到, 如图3.15中的实线所示.

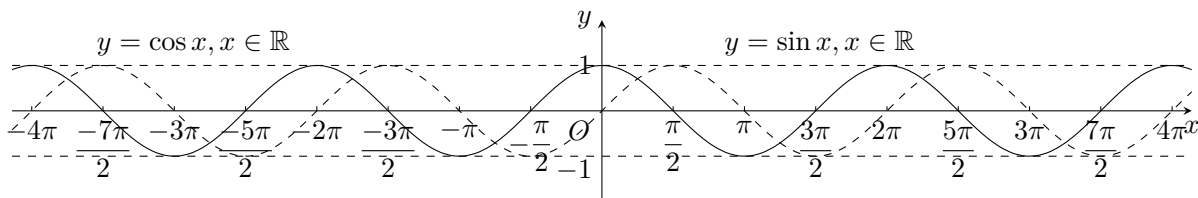


图 3.15:

同样, 余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图像也有对应的五点作图法, 这里选定的五个点依次是 $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1)$.

观察正弦函数的图像, 结合其定义和之前讨论过的问题, 我们很自然地得到正弦函数具有如下性质:

1° 有界性: $y = \sin x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $[-1, 1]$. 函数 $y = \sin x$ 是有界函数, 且以 1 和 -1 为上、下确界, 同时也以 1 和 -1 为最大值和最小值. 三角函数的有界性是一个重要的特性.

2° 周期性: $y = \sin x$ 是一个周期函数, 最小正周期 $T = 2\pi$.

3° 奇偶性, 对称性: 根据诱导公式 $\sin(-x) = -\sin x$, $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ 是奇函数. 另外根据诱导公式 $\sin(2k\pi - x) = -\sin x, k \in \mathbb{Z}$ 可知 $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ 都是 $y = \sin x$ 的对称中心.

与此同理, 根据诱导公式 $\sin[(2k+1)\pi - x] = \sin x$ 可知直线 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 都是 $y = \sin x$ 的对称轴.

4° 单调性: 观察图像可知, $y = \sin x$ 的增区间是 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$, 单调减区间是 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$. 这里要特别提醒读者注意, $y = \sin x$ 的单调区间是一个个分立的区间, 对于每一个 k , 函数在这些区间上都单调, 但是这些分立的区间并在一起显然就不单调了, 因此我们不能将 $y = \sin x$ 的单调增 (或减) 区间表示成集合 $\{x | 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ (或集合 $\{x | 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$).

5° 零点, 最值点: 结合图像和单调性, $y = \sin x, x \in \mathbb{Z}$ 的零点是点 $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 最大值点是 $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 最小值点是 $2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

可见, 函数 $y = \sin x$ 的零点恰好就是对称中心的横坐标, 最值点恰好就是对称轴的横坐标.

6° 对于 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 不等式 $\tan x > x > \sin x > \frac{2}{\pi}x$ 总是成立的, 我们对此进行一个直观的解释¹: 作图3.16, 图中的圆为单位圆, 根据三角函数的定义, $AB = \sin x$, 弧 AD 长 $\widehat{AD} = x$, $CD =$

¹这里给出的说明并不严格, 严格证明需要用到导数相关的知识, 读者可以在学习了那部分知识后给出严格证明.

$\tan x$. 从直观上容易看出 $\sin x < x$, 另一方面, 扇形 OAD 的面积小于三角形 OCD 的面积, 即 $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$. 这样, 我们说明了对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 有:

$$\sin x < x < \tan x.$$

我们作出 $y = x, y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像 3.17, 从直观上可以看到在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, $y = x$ 在 $y = \sin x$ 上方, 而 $y = \sin x$ 在 $y = \frac{2}{\pi}x$ 上方, 即:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x.$$

总之, 对于 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 不等式 $\tan x > x > \sin x > \frac{2}{\pi}x$ 总是成立的. 这是一个非常重要的不等式, 因为

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

所以不等式有时也写成

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

上面的式子对于 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 的情况也成立, 因为 $\cos x$ 和 $\sin x/x$ 都是偶函数 (参见余弦函数奇偶性), 将 x 换成 $-x$ 时函数值不变.

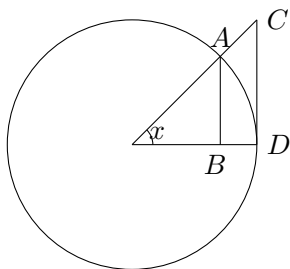


图 3.16:

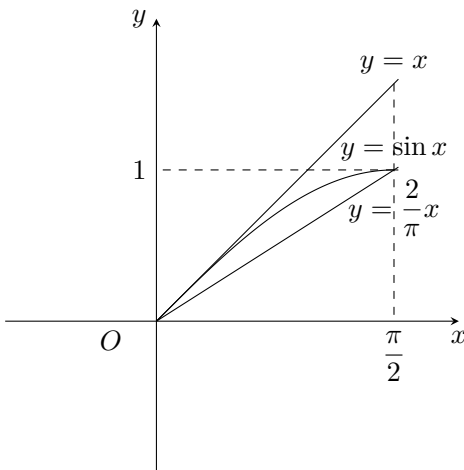


图 3.17:

余弦函数可以看成是由正弦函数平移变换得到的, 观察余弦函数的图像, 我们同样可以得到余弦函数的性质:

1° 有界性: $y = \cos x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $[-1, 1]$. 与正弦函数一样, 函数 $y = \cos x$ 是有界函数, 且以 1 和 -1 为上、下确界.

2° 周期性: $y = \cos x$ 是一个周期函数, 最小正周期 $T = 2\pi$.

3° 奇偶性, 对称性: 根据诱导公式 $\cos(-x) = \cos x$, $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ 是偶函数. 另外根据诱导公式 $\cos(2k\pi - x) = \cos(x), k \in \mathbb{Z}$ 可知直线 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 都是 $y = \cos x$ 的对称轴.

与此同理, 根据诱导公式 $\cos[(2k+1)\pi - x] = -\cos x$ 可知点 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ 都是 $y = \cos x$ 的对称中心.

4° 单调性: 观察图像可知, $y = \cos x$ 的增区间是 $[2k\pi, 2k\pi + \pi], k \in \mathbb{Z}$, 单调减区间是 $[2k\pi - \pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$. 同样, 这里表示的含义也是一个一个分立的区间, 不能写成集合的形式.

5° 零点, 最值点: 结合图像和单调性, $y = \cos x, x \in \mathbb{Z}$ 的零点是点 $k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 最大值点是 $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 最小值点是 $2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$.

可见, 函数 $y = \cos x$ 的零点恰好就是对称中心的横坐标, 最值点恰好就是对称轴的横坐标. 这与正弦函数的规律相同, 因为余弦函数是由正弦函数经平移变换得到的, 因此余弦曲线的形状与正弦曲线是相同的, 当然具有相同的几何性质.

例 3.4. (1) 比较 $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$ 四个值的大小.

(2) 求函数 $y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{1 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin x}$ 的定义域.

(3) 若 $x, y \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}], a \in \mathbb{R}$, 且满足 $\begin{cases} x^3 + \sin x - 3a = 0, \\ 9y^3 + \frac{1}{3} \sin 3y + a = 0, \end{cases}$ 则 $\cos(x + 3y) =$ _____.

(4) 已知函数 $f(x) = \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f(\alpha) = \alpha, \sin(f(\beta)) = \beta, f(\sin \gamma) = \gamma$, 试比较 α, β, γ 的大小.

解. (1) 考虑用诱导公式将作用对象都转化到正弦函数的单调区间内, 再利用单调性进行比较:

$$\sin 2 = \sin(\pi - 2), \sin 3 = \sin(\pi - 3), \sin 4 = \sin(\pi - 4).$$

函数 $y = \sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 递增, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \pi - 4 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin(\pi - 4) < \sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2)$, 即 $\sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.

(2) 要使表达式有意义, 则分母不得零, 偶次根号下非负, 真数大于零, 即

$$\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin x \neq 1, \\ 25 - x^2 \geq 0, \\ 0 < \sin x \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -5 \leq x \leq 5, \\ 0 < \sin x \leq 1. \end{cases}$$

作出函数 $y = \sin x$ 的图像 3.18, 根据图像可直接看出上述不等式的解集为 $[-5, -\frac{4}{3}\pi) \cup (-\frac{4}{3}\pi, -\pi) \cup (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)$.

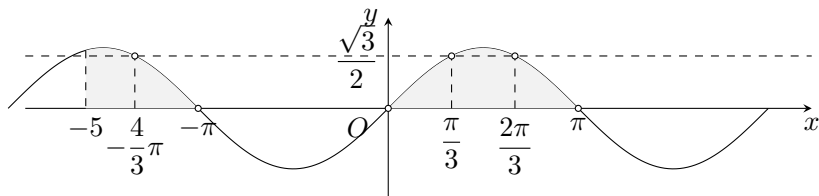


图 3.18:

(3) 本题要求的 $\cos(x + 3y)$ 令人摸不着头脑, 不妨将条件变形为 $\begin{cases} x^3 + \sin x = 3a, \\ (3y)^3 + \sin 3y = -3a, \end{cases}$

构造函数 $f(t) = t^3 + \sin t$, 则 $f(x) = 3a = -f(3y)$. 又因为 $f(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 是单调递增的奇函数, 且 $x, 3y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $f(x) = -f(3y) = f(-3y)$, 进而 $x = -3y$, 即 $x + 3y = 0$, 所以 $\cos(x + 3y) = 1$.

评注 3.4.1. 这道例题巧妙地构造了函数, 并利用函数的奇偶性解决了问题. 发现函数的对称性和奇偶性, 并从这些性质入手处理问题一种常见且有用的技巧.

(4) 根据题给条件显然无法直接比较这三个角的大小, 要想利用余弦函数的单调性, 必须对作用对象进行转化. 考虑不等式 $x > \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 因为 $f(\beta) \in (0, 1), \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\beta = \sin(f(\beta)) < f(\beta), \sin \gamma < \gamma$. 又因为 $y = \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 递减, 所以 $\cos(\sin \gamma) > \cos \gamma$, 即 $\gamma > f(\gamma)$. 构造函数 $g(x) = x - f(x), x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 显然 $g(x)$ 是增函数, 而 $g(\alpha) = 0, g(\beta) < 0, g(\gamma) > 0$, 所以 $\beta < \alpha < \gamma$.

事实上, 这三个角的大致位置如图所示, 也可以从直观上看出 $\beta < \alpha < \gamma$. ♡

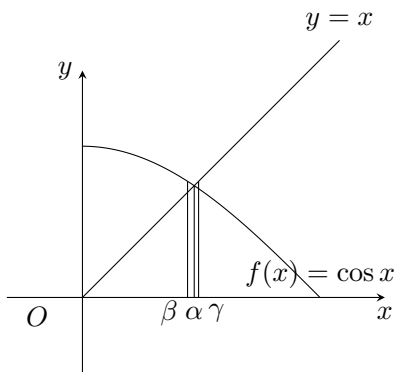


图 3.19:

例 3.5. (1) 设 $\theta \in [0, 2\pi]$, 若对任意 $x \in [0, 1]$ 恒有 $2x^2 \sin \theta - 4x(1-x) \cos \theta + 3(1-x)^2 > 0$, 则 θ 的取值范围是_____.

(2) 设函数 $f(x) = x^3 + x$, 若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f(m \cos \theta) + f(1-m) > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

(3) 方程 $a(1 - 2\sin^2 x) + 3a \sin x - 2 = 0$ 有且仅有两个解, 求 a 的取值范围.

(4) 已知函数 $f(x) = -\cos^2 x + a \cos x + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}$ 在闭区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上最大值为 1, 求 a .

解. (1) 考虑将 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 看成参数, 转化为二次函数问题进行处理. 设 $f(x) = 2x^2 \sin \theta - 4x(1-x) \cos \theta + 3(1-x)^2$, $f(0) = 3 > 0$ 显然成立, 当 $x \neq 0$ 时, 原不等式等价于 $2 \sin \theta - 4 \frac{1-x}{x} \cos \theta + 3(\frac{1-x}{x})^2 > 0$ 恒成立, 令 $t = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \in [0, +\infty)$, 则进一步等价于 $g(t) = 2 \sin \theta - 4 \cos \theta t + 3t^2 > 0$ 恒成立, 这是一个关于 t 的二次函数, 其轴为 $x = \frac{2 \cos \theta}{3}$.

若轴不在区间内即 $\frac{2 \cos \theta}{3} < 0, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $g_{\min}(t) = g(0) = 2 \sin \theta > 0$, 所以 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$;

若轴在区间内即 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, 则只需 $g_{\min}(t) = g(\frac{2 \cos \theta}{3}) = -\frac{4}{3} \cos^2 \theta + 2 \sin \theta = -\frac{4}{3} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - \frac{4}{3} > 0$, 结合 $\sin \theta$ 的有界性, 解得 $\frac{1}{2} < \sin \theta < 1$, 所以 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

综上所述, θ 的范围是 $(\frac{\pi}{6}, \pi)$.

(2) 函数 $f(x)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上单调递增的奇函数, 因为 $f(m \cos \theta) + f(1-m) > 0$, 所以 $f(m \cos \theta) > -f(1-m) = f(m-1)$, 等价于 $m \cos \theta > m-1$ 对任意 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立. 令 $t = \cos \theta \in [0, 1]$, 则 $g(t) = mt - m + 1 > 0$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 恒成立, 这是一个关于 t 的一次函数, 为此只需 $g(0) = -m + 1 > 0, g(1) = m - m + 1 > 0$, 解得 $m \in (-\infty, 1)$.

(3) 令 $u = \sin x \in [0, 1]$, 原方程可化为 $a(1 + 3u - 2u^2) = 2$, 则 $a \neq 0$, 进一步化为 $\frac{2}{a} = -2u^2 + 3u + 1 = -2(u - \frac{3}{4})^2 + \frac{17}{8}$.

先分析关于 u 的方程根的个数, 作出 $f(u) = -2(u - \frac{3}{4})^2 + \frac{17}{8}$ 和直线 $y = \frac{2}{a}$ 的图像 3.20 可知, 当 $\frac{2}{a} \in [1, 2)$ 或 $\frac{2}{a} = \frac{17}{8}$ 时, 两图像在 $[0, 1]$ 范围内有唯一的公共点, 根据复合方程根的个数的相关结论, 关于 x 的方程 $\frac{2}{a} = -2(\sin x - \frac{3}{4})^2 + \frac{17}{8}$ 在 $[0, \pi]$ 内有且仅有两个解, 此时 a 的范围为 $(1, 2] \cup \{\frac{16}{17}\}$.

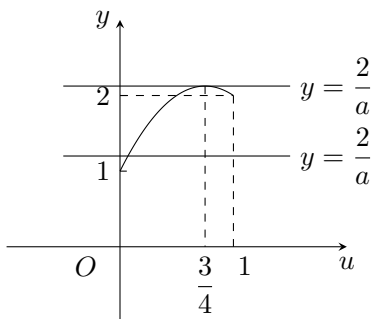


图 3.20:

评注 3.5.1. 这道例题是关于三角函数的复合方程根的个数问题, 处理思路也是按照(1) **确定外方程的零点的个数和取值范围** (2) **再据此确定内层函数的 u 点的个数**这两个步骤进行的, 灵活运用数形结合的方法可以较为快速和直观地将这些问题分析清楚.

(4) 令 $t = \cos x \in [0, 1]$, 则 $y = f(t) = -t^2 + at + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = -(\cos x - \frac{1}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}$. 这是关于 t 的二次函数, 问题转化成二次函数闭区间最值问题.

若轴在区间内即 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$, 也即 $0 \leq a \leq 2$, 则 $f_{\max}(t) = f(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} + \frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = 1$, 解得 $a = \frac{3}{2}$.

若轴不在区间内即 $a > 2$ 或 $a < 0$, 则 $f_{\max}(t) = \max\{f(0), f(1)\} = \max\{\frac{5}{8} - \frac{1}{2}, \frac{13}{8}a - \frac{3}{2}\} = 1$.

若 $f(0) < f(1)$ 即 $a > 2$, 则 $\frac{13}{8}a - \frac{3}{2} = 1$, 解得 $a = \frac{20}{13} < 2$, 舍去.

若 $f(1) < f(0)$ 即 $a < 0$, 则 $\frac{5}{8}a - \frac{1}{2} = 1$, 解得 $a = \frac{12}{5} > 0$, 舍去.

综上所述, $a = \frac{3}{2}$.

♡

评注 3.5.2. 这道例题的 (2)(3)(4) 这几个小问题都是关于三角函数的复合函数问题, 解答这些问题的关键就是抓住三角函数的有界性, 从而确定新元的取值范围, 再进行变更主元, 从而将三角问题转化为其他的问题.

例 3.6. 函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|, x \in [0, 2\pi]$ 的图像与直线 $y = k$ 有且只有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是_____.

解. 根据正弦函数的性质将 $f(x)$ 化简得 $f(x) = \begin{cases} 3\sin x & , x \in [0, \pi] \\ -\sin x & , x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$, 作出图像3.21, 容易看出 k 的范围是 $k \in (1, 3)$. ♡

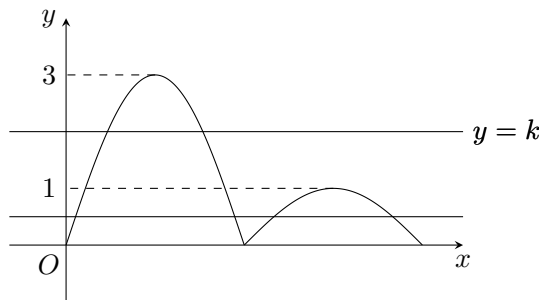


图 3.21:

3.1.4 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质

正弦型函数是指形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的函数. 通常我们取 $A > 0, \omega > 0$, 这时我们称之为标准的正弦型函数.

$y = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 可以由正弦函数 $y = \sin x$ 经过一系列的平移和伸缩变换后得到, 变换既可以是先伸缩后平移, 也可以是先平移后伸缩:

1° (先伸缩后平移)

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{原来的 } A \text{ 倍, 横坐标不变}]{\text{纵坐标伸长或缩短为}} y = A \sin x \xrightarrow[\text{原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍, 纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长或缩短为}} y = A \sin \omega x$$

$$\xrightarrow[|\frac{\varphi}{\omega}| \text{ 个单位长度}]{\text{向左或向右平移}} y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

2° (先平移后伸缩)

$$y = \sin x \xrightarrow[|\varphi| \text{ 个单位长度}]{\text{向左或向右平移}} y = \sin(x + \varphi) \xrightarrow[\text{原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍, 纵坐标不变}]{\text{横坐标伸长或缩短为}} y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{原来的 } A \text{ 倍, 横坐标不变}]{\text{纵坐标伸长或缩短为}} y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

需要提醒读者注意的是, 伸缩和平移变换都是针对自变量 x 而言的, 而不是针对正弦函数 $\sin$ 的作用对象而言的. 所以在进行图像变换时, 一定要注意平移和伸缩的先后顺序, 否则容易出错.

将 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像作纵向的平移变换, 可以得到 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图像, 有时也将 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 称为正弦型函数.

接下来我们讨论正弦型函数的参数 A, ω, φ 对函数性质的影响.

事实上, 我们可以将正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 理解为一个复合函数, 其中内层函数 $u = \omega x + \varphi$ 是一个关于 x 的一次函数. 我们将内层函数 $\omega x + \varphi$ 称为 x 处的**相位**, 简称为相位. 因为相位是 $\sin$ 函数的作用对象, 所以我们在研究正弦型函数时, 常常需要先求出某点处的相位.

参数 φ 就是 0 处的相位, 因此我们将参数 φ 称为**初相**, 初相决定了正弦型函数在 0 处的函数值是 $A \sin \varphi$.

A 是正弦型函数的纵向伸缩系数, 显然它会影响函数的最大值和最小值, 因而也会影响函数的值域. 我们将参数 A 称为**振幅**, 当我们取 $A > 0$ 时, $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的最大值为 A , 最小值为 $-A$, 值域为 $[-A, A]$.

$\frac{1}{\omega}$ 是正弦型函数的横向伸缩系数, 显然它会影响函数的周期. 函数 $y = \sin x$ 的最小正周期是 2π , 因为我们将横坐标伸缩为原来的 $\frac{1}{\omega}$ (取 $\omega > 0$), 所以周期相应地也会伸缩为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍, 即正弦型函数的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 这是正弦型函数的最小正周期的计算公式.

当我们取 $A > 0, \omega > 0$ 时, 我们同样可以通过五个关键点作出正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 在一个周期内的简图. 我们取相位等于 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 相应地可以得到对应的 x 值和函数值, 列表如下:

表 3.2: 五点法作出正弦型函数在一个周期内的图像

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{\omega}$	$\frac{\pi - \varphi}{\omega}$	$\frac{\frac{3\pi}{2} - \varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi - \varphi}{\omega}$
$A \sin(\omega x + \varphi)$	b	$b + A$	b	$b - A$	b

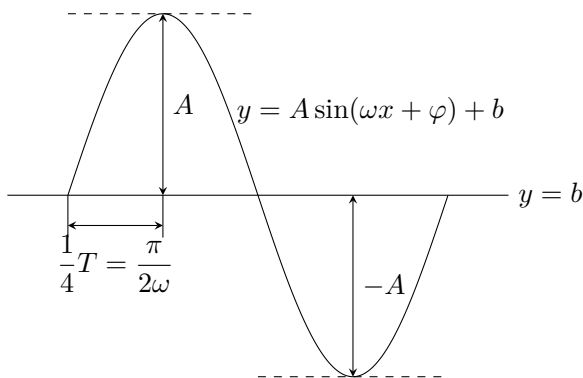


图 3.22:

五点作图法作出的图像包含了很多信息. 例如通过最大值和最小值之差可以得到参数 $A = \frac{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)}{2}$, 通过最大值和最小值之和可以得到参数 $b = \frac{f_{\max}(x) + f_{\min}(x)}{2}$, 通过某两个特殊点之间的横向距离, 再根据比例可以确定周期 T , 进而得到参数 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 等等.

事实上在五点法中, 我们只需作出“第一段”的图像 (“第一点” 和 “第二点” 之间的图像), 然后由对称性就可以对应画出整个周期内的图像. 在“第一段”内, 关键要把握好几个特殊点和相应比例, 如下图所示:

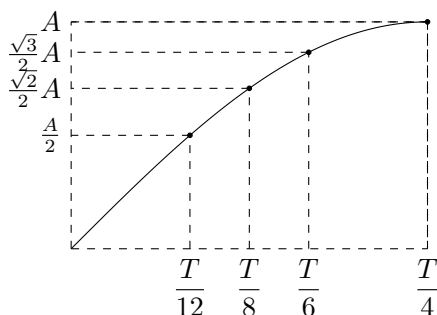


图 3.23:

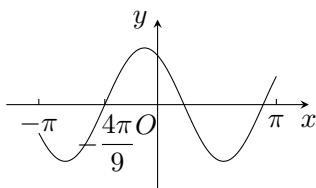
前已讨论, 正弦型函数是由正弦函数 $y = \sin x$ 经平移和伸缩变换得到的, 因此某两个特殊点之间的横向距离与周期的比例不变, 而某两个特殊点之间的纵向距离与振幅的比例也不变, 结合这一事实, 我们很容易理解图3.23.

例 3.7. (1) 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x) =$ ().

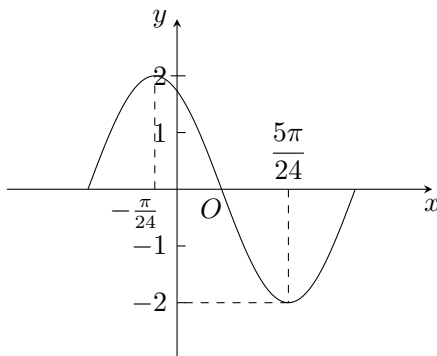
- (A) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7}{12}\right)$ (B) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\right)$
 (C) $\sin\left(2x - \frac{7}{12}\right)$ (D) $\sin\left(2x + \frac{1}{12}\right)$

(2) 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().

- (A) $\frac{10\pi}{9}$ (B) $\frac{7\pi}{6}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$



(3) 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$ 的图像如下图所示, 求 ω 和 φ .



解. (1) 有两种理解问题的方案:

法一: 从函数 $f(x)$ 出发, 先伸缩, 后平移得到 $y = f(2(x - \frac{\pi}{3}))$, 即 $f(2(x - \frac{\pi}{3})) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$. 令 $u = 2(x - \frac{\pi}{3})$, 则 $x = \frac{1}{2}u + \frac{\pi}{3}$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}u + \frac{\pi}{12}$. 所以 $f(u) = \sin(\frac{1}{2}u + \frac{\pi}{12})$, 所以 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12})$.

法二: 从已知函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 逆向变换, 直接得到 $f(x)$. 由题意可知, $f(x)$ 可以由函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 先向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍得到, 即 $f(x) = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$.

(2) 观察图像可知, $-\frac{4}{9}\pi$ 处的相位等于 $2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $-\frac{4}{9}\pi\omega + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\omega = -\frac{9}{2}k - 3$. 又根据图像可得函数的最小正周期满足 $\pi < T < 2\pi$, 即 $\pi < \frac{2\pi}{|\omega|} < 2\pi$, 所以 $1 < |\omega| < 2$, 而满足条件的 k 有且仅有 $k = -1$, 所以 $\omega = \frac{3}{2}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{3}$.

事实上, 由于本题中的函数虽然表达式含有余弦, 但是根据诱导公式, 也可以理解成正弦型函数, 且振幅为 1, 因此可以看成是由 $y = \sin x$ 经过平移和横向伸缩变换得到的. 因为 $f(0) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且根据图像, 结合 $y = \sin x$ 的图像可知 0 处的相位所对应的角与 $\frac{2\pi}{3}$ 终边相同, 而 $-\frac{4\pi}{9}$ 处所对应的角与 0 的终边相同. 由于横向伸缩变换不改变比例, 所以 $\frac{4\pi}{9} = T \times \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}T$, 所以 $T = \frac{4\pi}{3}$. ♡

评注 3.7.1. 本题的第一种方法是解决正弦型函数的图像问题的通法, 即通过观察图像直接得到某些参数的值, 或是根据图像先得出某些特殊点处的相位, 再解出参数的值. 而第二种方法较为快捷, 关键是要理解正弦型函数是由正弦函数经过平移和伸缩变换得到的, 而伸缩变换前后, 某两个特殊点之间的横向距离与周期的比例不变, 而某两个特殊点之间的纵向距离与振幅的比例也不变.

(3) 由图像可知周期为 $T = 2 \times (\frac{5\pi}{24} - (-\frac{\pi}{24})) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 4$, 而根据最高点处的相位等于 $2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 可知 $4 \times (-\frac{\pi}{24}) + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$, 又因为 $\varphi \in (0, \pi)$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

观察正弦型函数的图像, 我们可以讨论 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b, A > 0, \omega > 0$ 的性质:

1° 定义域, 值域: $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $[b - A, b + A]$.

2° 周期性: $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 是一个周期函数, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

3° 对称性: 因为正弦型函数是由函数 $y = \sin x$ 经过平移和伸缩变换得到的, 所以欲求出对称中心或对称轴的横坐标, 只需令相位等于正弦函数 $y = \sin x$ 的对称中心或对称轴的横坐标, 再解出 x 即可. 例如对称中心横坐标由方程 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 求出, 对称轴方程由 $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 求出.

奇偶性是对称性的特殊情况, 要判断正弦型函数是否具有奇偶性只需验证原点或 y 轴是不是对称中心或对称轴. 初相 $\varphi = k\pi$ 且 $b = 0$ 时, 为奇函数; $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 为偶函数. 事实上正弦型函数是奇函数或偶函数的前提是初相 φ 为轴线角.

4° 单调性: 研究正弦型函数的单调性时应把函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 看成是一个复合函数. 因为内层函数 $\omega x + \varphi$ 具有确定的单调性, 根据复合函数单调性的“同增异减”结论, 如果取 $A > 0, \omega > 0$,

因为内层函数递增, 所以复合函数在相关区间的单调性与外层函数在对应区间单调性相同. 由此, 我们只需将相位 $\omega x + \varphi$ 放进正弦函数 $y = \sin x$ 的单调增 (或减) 区间, 解出 x 的范围就是正弦型函数的增 (或减) 区间. 例如由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 解得 x 范围是单调增区间; 而由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 解得 x 范围是单调减区间.

对于 A 和 ω 取其他符号的情况, 则需要根据复合函数的单调性结论进行转化求解, 也可以用诱导公式先化成标准形式再求解.

例 3.8. 求函数 $y = 4\sin\left(-2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$ 的单调增区间.

解. 先化成 $A > 0, \omega > 0$ 的标准形式: $y = 4\sin\left(-2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1 = -4\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1 = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$,

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x \in [k\pi - \frac{5}{12}\pi, k\pi + \frac{1}{12}\pi], k \in \mathbb{Z}$, 这就是单调增区间.

另解: 根据复合函数单调性的结论, 因为内层函数递减, 所以欲求 $y = 4\sin\left(-2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$ 的单调增区间, 只需将相位放在正弦函数 $y = \sin x$ 的单调减区间, 即 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq -2x + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x \in [-k\pi - \frac{5}{12}\pi, -k\pi + \frac{1}{12}\pi], k \in \mathbb{Z}$, 即单调增区间为 $[k\pi - \frac{5}{12}\pi, k\pi + \frac{1}{12}\pi], k \in \mathbb{Z}$.
♡

5° 与直线 $y = b$ 的交点, 最值点: b 是纵向平移量, 方程 $A\sin(\omega x + \varphi) + b = b$ 等价于 $A\sin(\omega x + \varphi) = 0$, 即求 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的零点, 为此只需解方程 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 注意到正弦型函数与 $y = b$ 的交点都是对称中心, 这与正弦函数的相关规律是相同的, 这是由于正弦型函数是由正弦函数经平移和伸缩变换得到的. 与此同理, 当 $\omega x + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 取得最大值 $b + A$, 当 $\omega x + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 取得最小值 $b - A$, 而最值点都是对称中心的横坐标.

类比研究 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的方法, 我们同样可以把相位看成整体类比研究 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的性质. 当然也可以用诱导公式化成正弦型函数, 从而转化为研究正弦型函数的性质.

例 3.9. (1) 已知 $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 图像的两条相邻对称轴, 则 $\varphi =$ ().

- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

(2) 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi), A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 两个等式: $f(-\frac{\pi}{4} + x) - f(-\frac{\pi}{4} - x) = 0$, $f(\frac{\pi}{4} - x) + f(\frac{\pi}{4} + x) = 0$ 对任意实数 x 均成立, 且 $f(x)$ 在 $(0, \frac{3}{16})$ 上单调, 则 ω 的值为 ().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(3) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi), \omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图像的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调, 则 ω 的最大值为 ().

(A) 11 (B) 9 (C) 7 (D) 5

(4) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 的图象与直线 $y = 1$ 的所有交点中, 最近的两点间距离为 $\frac{\pi}{3}$, 且函数 $f(x - \frac{\pi}{3})$ 是奇函数. 若设 $a = f(\frac{2\pi}{3})$, $b = f(\frac{\pi}{2})$, 试比较 a, b 的大小关系.

解.(1) 根据正弦型函数的图像特点, 相邻两对称轴之间的距离等于最小正周期 T 的一半, 所以 $T = 2(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. 将 $\frac{\pi}{4}$ 处的相位 $\frac{\pi}{4} + \varphi$ 代入对称轴方程 $k\pi + \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, 因为 $\omega \in (0, \pi)$, 所以 $\omega = \frac{\pi}{4}$.

(2) 根据题意, $x = -\frac{\pi}{4}$ 是一条对称轴, 所以 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是函数的一个零点. 根据正弦型函数的图像特点, 对称轴与零点之间的距离等于 $\frac{T}{4} + kT$, $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\frac{\pi}{2} = kT + \mathbb{Z}$, 因为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\omega = 2k + 1$ (或将两个位置处的相位分别代入对称轴和零点方程, 两式相减得到 $\omega = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$).

因为函数在 $(0, \frac{3\pi}{16})$ 单调, 等价于在开区间 $(0, \frac{3\pi}{16})$ 上不存在最值点, 其必要条件为区间长度不大于周期的一半 (否则, 至少包含一个最值点, 从而不单调), 即 $\frac{3\pi}{16} \leq \frac{\pi}{\omega}$, 即 $\omega \leq \frac{16}{3}$. 根据题意, 只需验证 $\omega = 3$ 和 $\omega = 1$ 这两个情况的充分性.

如果 $\omega = 3$, 因为 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是一个零点, 将该处的相位代入零点方程得到 $\frac{3\pi}{4} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. 而当 $x \in (0, \frac{3}{16})$, 相位的范围是 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16})$, 由此可知函数在该区间内存在最值点, 从而不符合题意.

观察选项, 出于对命题者的信任他应该不会出错题, 故选 A 项. 下面验证 $\omega = 1$, 同样将 $\frac{\pi}{4}$ 处的相位代入零点方程, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 而容易验证 (验证过程留给读者) 函数 $y = A \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 在区间 $(0, \frac{3}{16})$ 不存在最值点, 所以 $\omega = 1$ 符合题意, 选 A 项.

(3) 与第二小问同理, 根据正弦型函数图像的特点得到 $\omega = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{36})$ 是 $f(x)$ 的单调区间, 等价于在这个区间上 $f(x)$ 没有最值点, 其必要条件为区间长度不大于周期的一半, 即 $\frac{\pi}{12} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 解得 $\omega \leq 12$. 根据题意, 欲求 ω 的最大值, 只需按照从大到小的顺序对不大于 12 的正奇数逐个验证其充分性即可.

如果 $\omega = 11$, 与第二小问同理可以解得 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 此时函数在区间 $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{36})$ 不单调, 不符合题意.

如果 $\omega = 9$, 同理解得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 此时函数在区间 $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 符合题意.

所以符合题意的 ω 最大为 9.

(4) 根据正弦型函数的图像特点, 纵坐标与振幅的比例为 $\frac{1}{2}$ 的所有点中, 最近的距离等于周期的 $\frac{1}{3}$, 所以周期 $T = 3$, $\omega = 2$ (或代入相位等于 $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 和 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, 解出 ω 的值). $f(x - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(2x - \frac{2\pi}{3} + \varphi)$, 因为它是奇函数, 所以初相 $\varphi - \frac{2\pi}{3} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 满足题意的 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. 所以 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 所以 $f(\frac{2\pi}{3}) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$. 所以 $a < b$. ♡

评注 3.9.1. 解答正弦型函数问题时, 要尤其关注相位, 因为相位时作为内层函数出现的, 在研究单调性、对称性和最值问题时, 应当将相位看成整体.

3.1.5 正切函数的图像和性质

根据任意角的正切函数的定义，正切函数是以 π 为周期的函数，且根据诱导公式 $\tan(-x) = -\tan x$ 可知 $\tan x$ 是奇函数，由此，我们只需画出 $y = \tan x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 的图像，再根据对称性和周期性进行延拓.

与正弦函数类似，为了画出 $y = \tan x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 的图像，我们可以利用单位圆和正切线，分别让 x 取 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ，画出图像如图3.24:

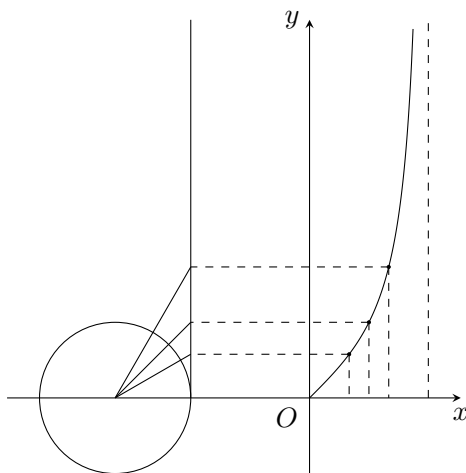


图 3.24:

根据周期性和对称性进行延拓，我们得到正切函数 $y = \tan x, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，如图3.25所示:

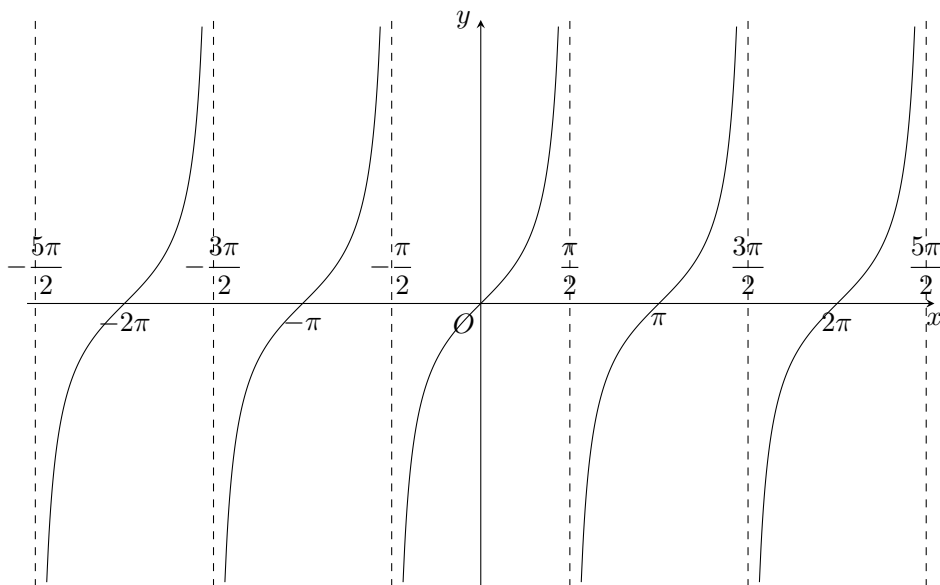


图 3.25:

由图像可知，正切函数是被由相互平行的直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 隔开的无穷多支曲线组成的，这些直线是正切函数图像的各支曲线的渐近线，相应地，当 x 从左侧趋近于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，正切函数

值 $\tan x$ 趋向正无穷, 当 x 从右侧趋近于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 正切函数值 $\tan x$ 趋向负无穷.

正切函数的性质总结如下:

1° 定义域, 值域: $y = \tan x$ 的定义域是 $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 值域为 $\mathbb{R}$.

2° 对称性: 根据诱导公式 $\tan(k\pi - x) = -\tan x, k \in \mathbb{Z}$ 可知, $y = \tan x$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}, 0)$. 这里要提醒读者注意正切函数的对称中心不一定在正切曲线上, 例如 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 是 $y = \tan x$ 的对称中心, 但是 $y = \tan x$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处是没有定义的.

特别地, 原点是正切函数的对称中心, 所以正切函数是一个奇函数.

正切函数并不具有轴对称性.

3° 周期性: 正切函数的最小正周期为 π .

4° 单调性: 正切函数在每一个开区间 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ 都是增加的. 同样, 这里也不能说正切函数在整个定义域上是增加的.

5° 正切函数是在定义域上既没有最值, 也没有界.

6° 对于 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 不等式 $\tan x > x > \sin x$ 总成立 (前已讨论). 对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$, 不等式 $\frac{4}{\pi}x > \tan x > x > \sin x$ 总成立. 作出图像3.26, 从直观上可以看出, $y = \frac{4}{\pi}x$ 是 $y = \tan x$ 的一条割线, 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上, $y = \tan x$ 的图像总是在 $y = \frac{4}{\pi}x$ 下方.

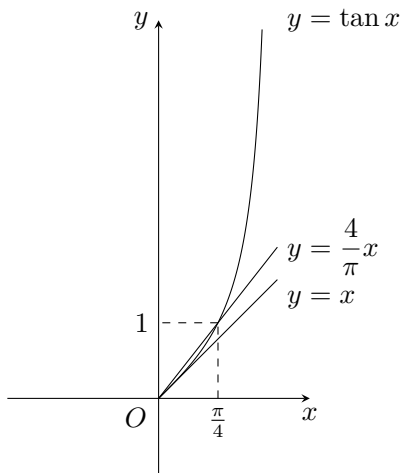


图 3.26:

例 3.10. (1) 设 $0 < a < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, x = (\sin \theta)^{\log_a \sin \theta}, y = (\cos \theta)^{\log_a \tan \theta}$, 则 x, y 的大小关系为 _____.

(2) 当 $\theta \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5})$ 时, 求 $\tan \theta + \cot \theta$ 的范围.

解. 根据正弦函数和余弦函数的图像可知, 当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时 $\cos \theta > \sin \theta$, 再结合重要不等式可知 $1 > \tan \theta > \sin \theta$. 因为 $0 < a < 1$, 所以 $\log_a x$ 是减函数, 所以 $\log_a \sin \theta > \log_a \tan \theta > 0$.

所以 $x = (\sin \theta)^{\log_a \sin \theta} < (\sin \theta)^{\log_a \tan \theta} < (\cos \theta)^{\log_a \tan \theta} = y$.

(2) 令 $\tan \theta = t$, 注意到 $\tan x$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上递增, 所以 $t \in (-\sqrt{3}, \tan \frac{4\pi}{5})$. 从而 $\tan \theta + \cot \theta = t + \frac{1}{t}, t \in (-\sqrt{3}, \tan \frac{4\pi}{5})$, 记为 $f(t)$.

根据对勾函数的性质, $f(t)$ 在 $(-\sqrt{3}, -1]$ 递增, 在 $(-1, \tan \frac{4\pi}{5})$ 递减, 且 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\sqrt{3})$, 因为 $\tan \frac{4\pi}{5} < \tan \frac{5\pi}{6} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $f(\tan \frac{4\pi}{5}) > f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(-\sqrt{3})$.

综上, $f(t) \in (f(-\sqrt{3}), f(-1)] = (-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -2]$. ♡

习题 3.1

- 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 在 $x = \frac{43\pi}{24}$ 处的值是_____.
- 若 $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $a \in \mathbb{R}$, 且 $x^3 + \sin x - 2a = 0$, $4y^3 + \frac{1}{2} \sin 2y + a = 0$, 则 $\cos(x + 2y)$ 的值为_____.
- 方程 $2|\sin x|^{1+\ln 2} = 1 + |\sin x|$ 的解集为_____.
- 实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + \sin y = 2014, \\ 2x + 2014 \cos y = 2013, \end{cases} (0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $x + 2y =$ _____.
- 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 满足 $|f(x) + \cos^2 x| \leq \frac{3}{4}$, $|f(x) - \sin^2 x| \leq \frac{1}{4}$, 则函数 $f(x) =$ _____.
- 函数 $y = \tan(\omega x) (\omega > 0)$ 与直线 $y = a$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|$ 最小值为 π , 则函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x$ 的单调增区间是_____.
- 设 $f(x) = \cos(\omega x)$ 的最小正周期为 6, 则 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2018)$ 的值是_____.
- 设函数 $f(x) = M \sin(\omega x + \varphi) (M \neq 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的图像关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 其周期为 π . 则下列说法正确的有_____.
 (A) $f(x)$ 的图像过点 $(0, \frac{1}{2})$
 (B) $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}]$ 内为减函数
 (C) $f(x)$ 的一个对称中心 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$
 (D) $f(x)$ 的最大值为 M .
- 如果函数 $y = 2 \sin(2x + \varphi)$ 的图像关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 那么 $|\varphi|$ 的最小值为_____.
- 某旅游区每年各个月接待游客的人数近似地满足周期性规律, 即第 n 个月从事旅游服务工作的人数 $f(n)$ 可近似地用函数 $f(n) = 100[A \cos(\omega n + \alpha) + k]$ 来刻画, 其中正整数 n 表示月份且 $n \in \mathbb{N}^*$, 例如 $n = 1$ 表示 1 月份, A 和 k 是正整数, $\omega > 0$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. 统计发现, 该地区每年各个月份从事旅游服务工作的人数有以下规律:
 (1) 每年相同的月份, 该地区从事旅游服务工作的人数基本相同;
 (2) 该地区从事旅游服务工作的人数最多的 8 月份和最少的 2 月份相差约 400 人;
 (3) 2 月份该地区从事旅游服务工作的人数约为 100 人, 随后逐月递增直到 8 月份达到最多.

- (1) 试根据已知信息, 确定一个符合条件的 $f(n)$ 的表达式;
- (2) 一般地, 当该地区从事旅游服务工作的人数在 400 或 400 以上时, 该地区也进入了一年中的旅游“旺季”, 那么, 一年中的哪几个月是该地区的旅游“旺季”? 请说明理由.

3.2

三角恒等变形

前面我们学习了诱导公式, 利用它们对三角函数式进行了恒等变形, 从而解决了化简、求值等相关问题. 这种利用公式对三角函数式进行的恒等变形就是三角恒等变形.

观察诱导公式的形式, 可以发现它们都是特殊角 (即 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍 $\frac{k\pi}{2}$) 和任意角 α 的和或差的三角函数值与 α 的三角函数值的关系, 那么如果把这个特殊角换成任意角 β , 任意角 α 和 β 的和与差的三角函数值与 α, β 的三角函数值又会有怎样的关系呢? 这是我们在这一节内主要解决的问题.

在讨论两角和与差的三角函数问题之前, 我们先来讨论同角三角函数的基本关系.

3.2.1 同角三角函数的基本关系

根据三角函数的定义, 三角函数值都是由角的终边与单位圆的交点所唯一确定的, 所以终边相同的角的三角函数值之间一定有内在联系. 又因为终边相同的角的各三角函数值相等, 所以我们只需讨论同一个角的三角函数值之间的关系.

观察图3.9, 在直角三角形 OMP 中, $OM^2 + MP^2 = 1$, 即

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

显然, 当 α 为轴线角时, 上式也成立. 同一个角 α 的正弦和余弦的平方和为 1, 这是一个重要的恒等式, 我们通常将这个恒等式称为**平方关系**.

根据三角函数的定义, 当 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时, 有

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

我们通常将这个恒等式称为**商数关系**, 利用这个关系式可以实现**弦切互化**. 由平方关系和商数关系, 我们立刻得到下面的恒等式:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = 1.$$

这个恒等式中只包含余弦和正切函数, 有时使用起来会稍微方便一些.

例 3.11. (1) 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 9 \cos \alpha}, \frac{2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha - 9 \cos^2 \alpha}, 4 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha$ 的值.

(2) 已知 $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{10}$, 求 $\tan \alpha$.

(3) 已知 $3 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 求 $\frac{1}{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$.

(4) 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $|\sin \alpha - \cos \alpha| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $t \in [0, 2\pi)$, 并且满足 $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 $\sin t + \cos t$ 的值为_____.

(6) 已知 $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{35}{12}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\tan \theta$.

解. (1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, 可见 $\tan \alpha$ 是 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 两个变量的商变量. 而前两个式子都是 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的齐次分式, 即分子、分母各项的幂次均相等.

一般地, 所谓 $f(x, y)$ 是齐次分式, 是指该分式具有如下特点: 对于任意的 $t \neq 0$, $f(tx, ty) = f(x, y)$ 都成立. 可以证明, $f(x, y)$ 是齐次分式, 等价于 $f(x, y)$ 可以写成 $\frac{y}{x}$ 的函数 $h(\frac{y}{x})$, 即所有的齐次分式都可以表示为商变量 $\frac{y}{x}$ 的函数.

例如 $f(x, y) = \frac{\frac{y^2}{x} + 2y}{2x - 7y}$ 是一个齐次分式, 它的分子、分母都是一次齐次式. 分子、分母同时除以 x , 即可改写成商变量的函数:

$$f(x, y) = h(\frac{y}{x}) = \frac{(\frac{y}{x})^2 + 2(\frac{y}{x})}{2 - 7\frac{y}{x}}.$$

因此在本题中, 前两个式子都可以写成 $h(\tan \alpha)$ 的形式, 将 $\tan \alpha = 2$ 代入即可解决问题:

$$\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 9 \cos \alpha} \xrightarrow{\text{分子、分母同时除以 } \cos \alpha} \frac{2 \tan \alpha - 3}{4 \tan \alpha - 9} = \frac{2 \times 2 - 3}{4 \times 2 - 9} = -1.$$

$$\frac{2 \sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha - 9 \cos^2 \alpha} \xrightarrow{\text{分子、分母同时除以 } \cos^2 \alpha} \frac{2 \tan^2 \alpha - 3}{4 \tan^2 \alpha - 9} = \frac{2 \times 4 - 3}{4 \times 4 - 9} = \frac{5}{7}.$$

第三个式子是二次齐次式, 考虑到平方关系 $\sin^2 + \cos^2 = 1$, 可以将分母的“1”代换为二次齐次式, 从而转化为齐次分式, 与前两问同样处理:

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha &= \frac{4 \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha}{1} \\ &= \frac{4 \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha - 5}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4 \times 4 - 3 \times 2 - 5}{4 + 1} = 1. \end{aligned}$$

(2) 利用“1”的代换, 将二次齐次式变形成齐次分式, 从而将原等式转化为 $\tan \alpha$ 的方程:

$$2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \cos^2 \alpha - 3 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 - 3 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{9}{10}$$

整理得 $9 \tan^2 \alpha + 30 \tan \alpha - 11 = 0$, 这是一个关于 $\tan \alpha$ 的二次方程, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 或 $\tan \alpha = -\frac{11}{3}$.

(3) 由 $3 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$ 可得 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$. 与第二问相同, 利用平方关系代换分子的“1”, 变换为齐次分式, 从而将原等式表成 $\tan \alpha$ 的函数, 代入求值即可:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + 1}{1 + 2 \tan \alpha} = \frac{10}{3}.$$

(4) 两边同时平方, 并根据平方关系得:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{25}$$

而 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \times \frac{12}{25} = \frac{49}{25}$, 所以 $|\sin \alpha - \cos \alpha| = \frac{7}{5}$.

评注 3.11.1. 利用平方关系, 我们可以得到 $|\sin \theta \pm \cos \theta|$ 与 $\sin \theta \cos \theta$ 之间的关系, 知道其中一个就可以求出其余的两个. 如果要去掉绝对值, 则需要根据 θ 的范围来确定 $\sin \theta \pm \cos \theta$ 的符号.

(5) 由条件可知 $\sin t \cos t + \sin t + \cos t + 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{5}{4}$, 再根据平方关系可得 $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t$, 代入并整理得

$$(\sin t + \cos t)^2 + 2(\sin t + \cos t) + 1 = \sqrt{6} + \frac{5}{2} \Rightarrow (\sin t + \cos t + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{6} + 2}{2}\right)^2.$$

解得 $\sin t + \cos t = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2} - 2$, 根据 $\sin t$ 和 $\cos t$ 有界性可知 $\sin t + \cos t = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(6) 根据条件可知 $12(\sin \theta + \cos \theta) = 35 \sin \theta \cos \theta$, 又因为 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$, 代入并整理得

$$35(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 24(\sin \theta + \cos \theta) - 35 = 0$$

解得 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ 或 $-\frac{5}{7}$, 又因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$, 所以 $\sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$, 所以:

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{12}{25}$$

解得 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{4}{3}$.

♡

3.2.2 两角和与差的三角函数, 辅助角公式

下面, 我们来探讨 $\cos(\alpha - \beta)$ 与角 α 和 β 的正弦、余弦之间的关系:

不妨令 $\alpha \neq 2k\pi + \beta, k \in \mathbb{Z}$, 作角 $\alpha, \beta, \alpha - \beta$, 它们的终边分别与单位圆交于 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $A_1(\cos \beta, \sin \beta)$, $P(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$, 如图3.27.

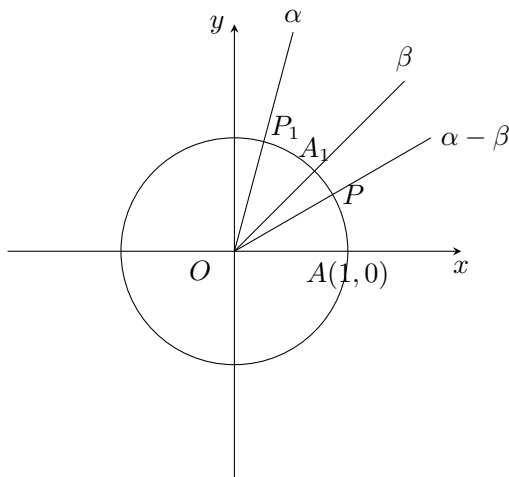


图 3.27:

根据圆的旋转对称性, $\widehat{AP}$ 和 $\widehat{A_1P_1}$ 的弧度相等, 它们所对的弦长也相等, 即 $|AP| = |A_1P_1|$, 根据两点间的距离公式, 可得

$$[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2,$$

化简得

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

显然当 $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, 上式同样成立, 所以对于任意角 α, β , 有关两角之差的余弦值, 我们有两角差的余弦公式, 简记为 $C_{\alpha-\beta}$:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (C_{\alpha-\beta})$$

用 β 替换 $C_{\alpha-\beta}$ 中的 $-\beta$, 因为 $\cos(-\beta) = \cos \beta, \sin(-\beta) = -\sin \beta$, 所以我们有 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

这样, 我们得到了两角和的余弦公式, 简记为 $C_{\alpha+\beta}$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (C_{\alpha+\beta})$$

运用 $C_{\alpha+\beta}$ 和 $C_{\alpha-\beta}$, 结合诱导公式, 有 $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

这样, 我们得到了两角和与差的正弦公式, 简记为 $S_{\alpha+\beta}$ 和 $S_{\alpha-\beta}$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (S_{\alpha-\beta})$$

根据商数关系, 我们立刻得到两角差的正切公式:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

用 β 替换上述公式中的 $-\beta$, 并注意到 $\tan(-\beta) = -\tan \beta$, 我们得到两角和的正切公式: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

我们将两角和与差的正切公式简记为 $T_{\alpha+\beta}$ 和 $T_{\alpha-\beta}$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}. \quad (T_{\alpha+\beta})$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}. \quad (T_{\alpha-\beta})$$

两角和与差的正余弦、正切公式的形式具有规律性, 记忆起来很方便, 读者可以从自己的角度寻找其中的规律来帮助记忆, 并做到熟练掌握.

利用两角和与差的三角函数公式, 我们可以计算出一些特殊角的三角函数值, 例如:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

根据诱导公式, 还可以计算出这两个特殊角的余弦值:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

这两个结果也可以利用两角和与差的余弦公式得到.

我们还可以计算出这两个角的正切值:

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \cot \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

这两个结果也可以利用商数关系得到.

例 3.12. (1) 求 $\sin 15^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 75^\circ$.

(2) 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin(\beta - 2\alpha) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos(2\beta - \alpha) = -\frac{11}{14}$, 求 $\alpha + \beta$.

(3) 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, 且 $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$, 求 $\beta - \alpha$. (4)

已知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 求 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$.

(5) 已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, 证明 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

解. (1) $\sin 15^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 75^\circ = \sin 15^\circ \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cos 15^\circ = \cos(30^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

(2) 已知角是 $\beta - 2\alpha$ 和 $2\beta - \alpha$, 所以要求的角 $\alpha + \beta$ 应理解为已知角之差 $(2\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha)$.

由条件可知 $\alpha + \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 因为余弦函数在这个区间上是单调的, 所以考虑计算其余弦值:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[(2\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha)] = \cos(2\beta - \alpha) \cos(\beta - 2\alpha) + \sin(2\beta - \alpha) \sin(\beta - 2\alpha).$$

因为 $\beta - 2\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $2\beta - \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$, 所以 $\cos(\beta - 2\alpha) > 0$, $\sin(2\beta - \alpha) > 0$, 由平方关系知 $\sin(\beta - 2\alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\cos(\beta - 2\alpha) = \frac{1}{7}$.

所以

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[(2\beta - \alpha) - (\beta - 2\alpha)] = -\frac{11}{14} \times \frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}$$

因为 $\alpha + \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 而 $\cos x$ 在这个区间上是单调的, 所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

评注 3.12.1. 解答这个问题的关键是将 $\beta - 2\alpha$ 和 $2\beta - \alpha$ 理解为已知角, 将 $\alpha + \beta$ 理解为两个已知角的差, 而不宜将 α 和 β 看成变量, 盲目地使用两角和与差的三角函数公式, 这样是无法解决问题的. 另外, 在解决“给值求角”的问题中, 首先要尽可能缩小角的范围, 并根据角所在的大致区间尽可能选择计算单调的三角函数值, 这样能够避免讨论, 防止由值到角的过程太繁甚至结果出错:

如果角的范围是 $(0, \frac{\pi}{2})$, 选正弦、余弦均可; 如果角的范围是 $(0, \pi)$, 应选 $\cos$; 如果角的范围是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 应选 $\sin$.

另外, 正切函数在它的任何一个周期内的值与角都是一一对应的, 所以如果可能, 优先选择计算正切值.

(3) 由于本题要求 $\beta - \alpha$, 考虑先根据平方关系消去 γ :

$$\cos \gamma = -\cos \alpha - \cos \beta, \sin \gamma = -\sin \alpha - \sin \beta$$

所以 $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 1$, 再根据平方关系整理得 $2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 1$, 即 $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}$, 所以 $\cos(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}$.

根据条件 $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ 可知 $\beta - \alpha \in (0, 2\pi)$, 所以 $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$.

接下来我们考虑 $\alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ 这一限制条件, 为此, 与上述过程同理, 根据平方关系分别消去 α 和 β , 同样能得到:

$$\gamma - \beta = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3}, \gamma - \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3}.$$

结合 $\alpha < \beta < \gamma < 2\pi$, 可知 $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}, \gamma - \beta = \frac{2\pi}{3}, \gamma - \alpha = \frac{4\pi}{3}$. 综上所述, $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

(4) 由两角和的正切公式, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, 整理得 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1$.

所以 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 2$. 这是一个非常漂亮的结果.

(5) 在这个问题中, 我们只需根据三角形中的等角关系, 两边同时取正切函数, 从而将角的等式转化为三角恒等式, 进而运用三角恒等变形证明结论, 具体过程如下:

考虑在 $\triangle ABC$ 中, 有 $A + B + C = \pi$, 又因为 A, B, C 均不等于 $\frac{\pi}{2}$, 则 $A + B = \pi - C \neq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) = \tan(-C) = -\tan C$,

即 $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$, 所以 $\tan A + \tan B = \tan A \tan B \tan C - \tan C$,

故 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, 原命题得证. $\heartsuit$

观察: 考虑正弦型函数 $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 根据两角和的正弦公式, $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) = \sin x + \cos x$, 可以想象, 运用两角和的正弦公式, 任何一个正弦型函数 $A \sin(u + \varphi)$ 可以写成 $a \sin u + b \cos u$ 的形式. 反过来, 针对形如 $a \sin u + b \cos u$ 的式子, 能否逆用两角和的正弦公式消去其中一种三角函数, 从而化成只含一个角和一个函数名的正弦型函数的形式?

设 $a \sin u + b \cos u = A \sin(u + \varphi) = A \cos \varphi \sin u + A \sin \varphi \cos u$, A 和 φ 为待定系数, 比较系数可知:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = a, \\ A \sin \varphi = b. \end{cases}$$

根据平方关系和商数关系可知 $A^2 = a^2 + b^2$, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

为了方便, 我们不妨取 A 为正值 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, 于是得到 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 由于 a, b 是已知的, 所以 φ 可以被确定下来, 具体来说, 可以由余弦和正弦的符号 (即 a, b 的符号) 确定 φ 终边所在的象限, 再由 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ 来确定 φ 的值.

类似地, 设想 $a \sin u - b \cos u$ 可以写成 $A \sin(u - \varphi)$ 的形式, 根据两角差的正弦公式, $a \sin u - b \cos u = A \cos \varphi \sin u - A \sin \varphi \cos u$, 同样比较系数, 并取 A 为正值, 得到 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

结合上述讨论, 我们给出辅助角公式的统一形式:

定理 3.2.1 (辅助角公式). 对于 $a > 0, b > 0$:

$$a \sin u \pm b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(u \pm \varphi)$$

其中 $\tan \varphi = \frac{b}{a} > 0$, 为了方便, 我们通常取 φ 为锐角即 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

这个公式通常称为**辅助角公式**.

有了辅助角公式, 我们可以将形如 $a \sin u \pm b \cos u$ 的函数化为正弦型函数, 从而根据正弦型函数的知识, 研究这些函数的单调性和最值问题.

例 3.13. 已知函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$, 若 θ 是 $f(x)$ 的最大值点, 求 $\cos \theta$.

解. $f(x) = \sin x - 2 \cos x = \sqrt{5} \sin(x - \varphi)$, 其中 φ 为锐角且 $\tan \varphi = 2$,

将 θ 处的相位 $\theta - \varphi$ 代入最大值点方程得 $\theta - \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 解得 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi, k \in \mathbb{Z}$.

所以 $\cos \theta = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$.

因为 φ 为锐角, 所以 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ♡

评注 3.13.1. 从这个例子中可以看出运用辅助角公式的统一形式并将 φ 规定为锐角的方便之处, 这样做可以为我们省去一些讨论的过程.

例 3.14. 已知将函数 $g(x) = \cos x$ 图像上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度的到函数 $y = f(x)$ 的图像, 且关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β .

(1) 求满足题意的实数 m 的取值范围;

(2) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ (用含 m 的式子表示).

解. (1) 将 $g(x)$ 图像上的所有点的纵坐标伸长到原来的两倍, 得到 $y = 2 \cos x$, 再将 $y = 2 \cos x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的图像, 所以 $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x$.

$f(x) + g(x) = 2 \sin x + \cos x = \sqrt{5} \sin(x + \varphi)$, 其中 φ 为锐角且 $\tan \varphi = 2$.

依题意, $\sin(x + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}}$ 在 $[0, 2\pi)$ 内有两个不同的解 α 和 β , 当且仅当 $|\frac{m}{\sqrt{5}}| < 1$, 所以 $m \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

(2) 依题意, $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}}, \sin(\beta + \varphi) = \frac{m}{\sqrt{5}}$,

根据正弦函数的对称性, 当 $1 \leq m < \sqrt{5}$ 时, $\alpha + \beta + 2\varphi = 2 \times \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha + \varphi = \pi - \beta - \varphi$;

当 $-\sqrt{5} < m \leq 1$ 时, $\alpha + \beta + 2\varphi = 2 \times \frac{3\pi}{2}$, 即 $\alpha + \varphi = 3\pi - \beta - \varphi$,

于是 $\cos(\alpha + \varphi) = -\cos(\beta + \varphi)$, 所以 $\cos(\alpha + \varphi) \cos(\beta + \varphi) = -(1 - \sin^2(\beta + \varphi)) = \frac{m^2}{5} - 1$

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos((\alpha + \varphi) - (\beta - \varphi)) = \cos(\alpha + \varphi) \cos(\beta + \varphi) + \sin(\alpha + \varphi) \sin(\beta + \varphi) = \frac{m^2}{5} - 1 + \frac{m^2}{5} = \frac{2m^2}{5} - 1$

事实上, 我们学习过二倍角公式后, 可以直接得到 $\cos(\alpha - \beta) = -\cos 2(\beta + \varphi) = 2 \sin^2(\alpha + \beta) - 1$, 比上述过程要简洁一些. ♡

例 3.15. (1) 求函数 $y = x + \sqrt{10 - x^2}$ 的值域.

(2) $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x+12}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $\frac{M}{m}$.

(3) 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}$, $x \in [0, 1]$ 的最小值.

(4) 求函数 $f(x) = \sqrt{2x-x^2} + x$ 的值域.

解. (1) 函数的定义域为 $x \in [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$, 注意到当 $\theta \in [0, \pi]$ 时 $\cos \theta \in [-1, 1]$, 不妨令 $x = \sqrt{10} \cos \theta$, 则 $\sqrt{10-x^2} = \sqrt{10} \sin \theta$, 所以 $y = \sqrt{10} \sin \theta + \sqrt{10} \cos \theta = 2\sqrt{5} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $y \in [-\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \in [-4, 2]$ 注意到 $(\sqrt{2-x})^2 = 2-x$, $(\sqrt{3x+12})^2 = 3x+12$, 即 $3(\sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{3x+12})^2 = 18$, 不妨令 $\sqrt{2-x} = \sqrt{6} \cos \theta$, $\sqrt{3x+12} = \sqrt{18} \sin \theta$, 因为 $0 \leq \sqrt{2-x} \leq \sqrt{6}$, 所以 $\cos \theta \in [0, 1]$, 不妨设 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

此时 $y = f(x) = g(\theta) = \sqrt{6} \cos \theta + \sqrt{18} \sin \theta = 2\sqrt{6} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $\theta + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 所以 $M = 2\sqrt{6}, m = \sqrt{6}$, 所以 $M/m = 2$.

(3) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 不妨令 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, 那么 $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$, 所以 $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2}$.

所以 $f(x) = g(t) = \frac{t^2}{2(t+2)}$.

下面确定新元 t 的范围, 因为 $\sqrt{1+x} \in [0, \sqrt{2}]$, 不妨令 $\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cos \theta$, 其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sqrt{1-x} = \sqrt{2 - (\sqrt{1+x})^2} = \sqrt{2 - 2 \cos^2 \theta} = \sqrt{2} \sin \theta$, 所以 $t = \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in [\sqrt{2}, 2]$.

$g(t)$ 是一个二次比一次的分式函数:

$$g(t) = \frac{(t+2)^2 - 4(t+2) + 4}{2(t+2)} = \frac{t+2}{2} + \frac{2}{t+2} - 2.$$

根据对勾函数的性质, $g(t) \in [1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$, 即最小值为 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) 注意到 $(\sqrt{2x-x^2})^2 = 2x-x^2$, $(x-1)^2 = x^2-2x+1$, 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 所以 $x-1 \in [-1, 1]$, 不妨令 $x-1 = \cos \theta$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, 则 $\sqrt{2x-x^2} = \sin \theta$, $y = f(x) = g(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$, 因为 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 所以 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $f(x) \in [0, \sqrt{2} + 1]$. ♡

评注 3.15.1. 这组例题都是利用三角换元来研究函数值域的问题. 三角换元法即根据所研究函数的特点, 将变量替换为三角函数, 进而利用三角恒等变形的技巧将问题转化为三角函数的值域问题. 这类问题往往需要从平方关系入手, 将一些平方和为定值的结构 (通常是根式) 替换为三角函数, 再利用平方关系化简. 运用三角换元这一技巧常常能够化繁为简, 在解决很多问题时都很有效.

例 3.16. 证明: 对于 $a > 0, b > 0$,

$$a \cos u \pm b \sin u = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(u \mp \varphi)$$

其中 φ 为锐角且 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

证明. 设 $a \cos u \pm b \sin u = A \cos(u \mp \varphi) = A \cos \varphi \cos u \pm A \sin \varphi \sin u$, A 和 φ 为待定系数, 比较系数可知:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = a, \\ A \sin \varphi = b. \end{cases}$$

根据平方关系和商数关系可知 $A^2 = a^2 + b^2$, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, 不妨取 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

因为 $\tan \varphi \in (0, +\infty)$, 所以不妨取 $\varphi \in (0, 2\pi)$, 综上, 我们有 $a \cos u \pm b \sin u = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(u \mp \varphi)$, 其中 φ 为锐角且 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$. $\square$

有时我们也用这个公式将形如 $a \cos u \pm b \sin u$ 变换为余弦型函数.

最后我们列举几个常用的辅助角公式的结论, 在这几个例子中 φ 是特殊角:

$$\begin{aligned} \sin x \pm \cos x &= \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right), & \cos x \pm \sin x &= \sqrt{2} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right), \\ \sqrt{3} \sin x \pm \cos x &= 2 \sin\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right), & \sqrt{3} \cos x \pm \sin x &= 2 \cos\left(x \mp \frac{\pi}{6}\right), \\ \sin x \pm \sqrt{3} \cos x &= 2 \sin\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right), & \cos x \pm \sqrt{3} \sin x &= 2 \cos\left(x \mp \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

3.2.3 倍角, 半角的三角函数, 和积互化

我们以两角和与差的正、余弦公式为基础, 可以推出二倍角公式. 在公式 $S_{\alpha+\beta}$, $C_{\alpha+\beta}$ 和 $T_{\alpha+\beta}$ 中, 分别令 $\beta = \alpha$, 可以得到下面一组公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (C_{2\alpha})$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}. \quad (T_{2\alpha})$$

利用平方关系, 还可以使二倍角的余弦公式中只含 α 的正弦或余弦:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

以上这些公式都称为倍角公式.

例 3.17. (1) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}$, 试求 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{12})$.

(3) 设 $x \in (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 且 $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos 2x$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 若 $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$, 则 $\cos 4x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. (1) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \cos(10^\circ + 60^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} = 4$.

(2) 已知角是 $\frac{\pi}{6} + \alpha$, 所以待求的角应理解为 $2\alpha + \frac{\pi}{12} = 2(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}$. 因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$, 所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$. 由二倍角公式:

$$\sin 2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) \cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}.$$

$$\text{所以 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{24}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{50}.$$

$$(3) \text{ 已知角是 } \frac{\pi}{4} - x, \text{ 所以待求角应当理解为 } -2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{\pi}{2}, \cos 2x = \cos\left(-2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

$$\text{因为 } x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } \frac{\pi}{4} - x \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos 2x = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$(4) \text{ 根据平方关系, } 16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10, \text{ 令 } 16^{\sin^2 x} = t, \text{ 所以 } t + \frac{16}{t} = 10, \\ \text{解得 } t = 2 \text{ 或 } t = 8, \text{ 所以 } \sin^2 x = \frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}, \text{ 所以} \\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = -\frac{1}{2}.$$

♡

观察: 考虑 $C_{2\alpha}$ 的三种形式, 能否用 $\cos 2\alpha$ 表示出 $\sin^2 \alpha$ 和 $\cos^2 \alpha$?

定理 3.2.2 (降幂公式).

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

我们通常将这两个公式称为**降幂公式**, 由降幂公式可知, α 的正弦或余弦的平方可以写成 2α 的一次式. 从公式的左边到右边, 三角函数的幂次降低了, 与此同时角则相应地变成了二倍角, 这是这组公式被称为降幂公式的原因.

由 $C_{2\alpha}$ 的两种变形, 可以立刻推出降幂公式.

另外, 根据 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ 立刻得到

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

有时也将这个公式称为降幂公式. 因为从这个公式的左边到右边, 三角函数的次数也降低了, 角也相应地变成了二倍角.

例 3.18. 函数 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$ 的最小正周期是_____

$$\text{解. } f(x) = 3\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x - \sin x \cos x = -\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x \cos x.$$

$$\text{由降幂公式, } f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) - \sin 2x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \\ 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 所以最小正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

♡

$$\text{根据降幂公式, 用 } \frac{\alpha}{2} \text{ 代替 } \alpha \text{ 可得 } \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \text{ 上面两个公} \\ \text{式两边相除可得 } \tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

事实上, $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, 分子分母同时分别乘以 $\cos \frac{\pi}{2}$ 或是 $\sin \frac{\pi}{2}$ 后, 都可以得到关于二次式相比的结构, 再利用降幂公式即可得到关于 α 的三角函数的一次式相比的结构, 即:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}{\frac{1}{2} \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

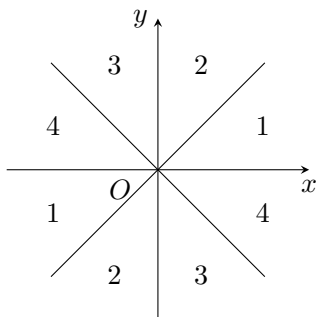


图 3.28:

由图3.28, 结合各象限内三角函数值的符号可知, $\sin \alpha$ 和 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 的符号相同.

定理 3.2.3 (半角公式).

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

以上几个公式称为**半角公式**. 如果给出了 α 的范围, 则可以先求出 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围, 然后根据 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在象限来确定三角函数值的符号, 如果仍不能确定符号, 则需要在根号前保留 $\pm$.

观察: 根据倍角公式可知, 角 α 的正、余弦都可以写成 $\frac{\alpha}{2}$ 的正、余弦的二次式或二次齐次式. 那么, 如果将分母上的 1 根据平方关系写成 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, 则 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 将成为齐次分式, 应当可以表成以商变量 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 为唯一变量的函数.

定理 3.2.4 (万能公式). 记 $\tan \alpha = t$, 则:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

由此, 任何一个关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的三角函数有理式 $R(\sin x, \cos x)$, 只要作变量替换 $t = \tan \frac{x}{2}$, 就可以将 $R(\sin x, \cos x)$ 写成关于 t 的有理式 $f(t)$, 通过研究一元有理函数 $f(t)$ 来解决有关问题. 上面这组公式俗称**万能公式**.

$$\begin{aligned} \text{证明. } \sin \alpha &= \frac{\sin \alpha}{1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

□

观察: 考虑 $C_{\alpha+\beta}, C_{\alpha-\beta}, S_{\alpha+\beta}, S_{\alpha-\beta}$ 这四个公式, 我们对 $S_{\alpha+\beta}$ 和 $S_{\alpha-\beta}$ 左右两边分别作和与差, 可得到:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

对 $C_{\alpha+\beta}$ 和 $C_{\alpha-\beta}$ 左右两边分别作和与差, 可得到:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

以上四个公式称为**积化和差公式**.

例 3.19. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域.

解. 为了将 $f(x)$ 化成正弦型函数, 积化和差得:

$$f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\omega x + \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 $2\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 所以 $\omega = 1$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}$.
因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, 所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, 所以 $f(x) \in [0, \frac{2 + \sqrt{2}}{4}]$.
♡

如果我们想将两个同名三角函数的和或差化成三角函数的积, 我们可以在积化和差公式中令 $\alpha + \beta = \theta$, $\alpha - \beta = \varphi$, 得 $\alpha = \frac{\theta + \varphi}{2}$, $\beta = \frac{\theta - \varphi}{2}$, 相应地, 我们同样得到四个公式:

$$\begin{aligned}\sin \theta + \sin \varphi &= 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, \\ \sin \theta - \sin \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}, \\ \cos \theta + \cos \varphi &= 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}, \\ \cos \theta - \cos \varphi &= -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}.\end{aligned}$$

以上四个公式称为**和差化积公式**.

例 3.20. 证明 $\sum_{k=1}^m \cos k\varphi = \frac{\sin \frac{m\varphi}{2} \cos \frac{(m+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \neq 0$.

解. 表达式左侧乘并除以 $\sin \frac{\varphi}{2}$ 并积化和差, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \cos k\varphi &= \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^m \cos k\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sum_{k=1}^m \sin \frac{\varphi}{2} \cos k\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [\sin \frac{(2k+1)\varphi}{2} - \sin \frac{(2k-1)\varphi}{2}]}{\sin \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{3\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{5\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2} + \cdots + \sin \frac{(2m+1)\varphi}{2} - \sin \frac{(2m-1)\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin \frac{(2m+1)\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\end{aligned}$$

再和差化积得, $\sum_{k=1}^m \cos k\varphi = \frac{\sin \frac{(2m+1)\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos \frac{(m+1)\varphi}{2} \sin \frac{m\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, 等式得证. ♡

用类似方法可以证明 $\sum_{k=1}^m \sin k\varphi = \frac{\sin \frac{m\varphi}{2} \sin \frac{(m+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \neq 0$, 读者可以尝试自己写出过程.

例 3.21. 求 $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$ 的值.

解. 与上例类似, 表达式乘并除以 $2 \sin \frac{\pi}{9}$, 再积化和差得

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{9}} (2 \cos \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{3\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{7\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{9}} (\sin \frac{2\pi}{9} - \sin 0 + \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{6\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9} + \sin \frac{8\pi}{9} - \sin \frac{6\pi}{9}) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{9}} \sin \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♡

定理 3.2.5 (三倍角公式).

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

以上一组公式称为三倍角公式, 正弦和余弦的三倍角公式记忆起来很有规律, 在同一个公式中出现的都是同名三角函数, 且中间都以减号连接, 其系数和次数可以简单记忆为“正弦 3143, 余弦 4331”.

图一乐看看, 反正不会考.

证明. 证明三倍角公式只需先用两角和的正余弦公式, 再利用二倍角公式即可:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \\ &= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

例 3.22. (1) 已知 $f(\cos x) = \frac{\cos 3x}{\cos^2 x}$, 则函数 $y = f(\cos x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值为_____.

(2) 设 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$. 则 $\sin 3\alpha + \cos 3\alpha =$ _____.

解. (1) 运用三倍角公式, $f(\cos x) = \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos^2 x} = 4 \cos x - 3 \frac{1}{\cos x}$, 令 $t = \cos x$, 则 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(\cos x) = g(t) = 4t - \frac{3}{t}$, 根据蝴蝶函数的性质, $g(t)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上递增, 所以 $g(t)$ 的最小值为 $g(\frac{1}{2}) = -4$.

(2) 运用三倍角公式, $\sin 3\alpha + \cos 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 3(\sin \alpha - \cos \alpha) + 4(\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha) = 1 - 4(\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha) = 1 - 4(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) = 1 - \frac{4}{3}(1 + \sin \alpha \cos \alpha)$

因为 $2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{8}{9}$,

所以原式 $= 1 - \frac{4}{3} \times (1 + \frac{4}{9}) = -\frac{25}{27}$.

♡

例 3.23. 综合运用三角恒等变形的技巧求下面各式的值:

(1) $\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 30^\circ \sin 70^\circ$;

(2) $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$;

(3) $\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ)$;

(4) $\frac{\sin 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ} (\tan 5^\circ - \cot 5^\circ)$.

解. (1) 由降幂公式:

$$\text{原式} = \frac{1 - \cos 40^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 100^\circ}{2} + \frac{1}{2} \sin 70^\circ$$

考虑以 10° 为主元:

$$\text{原式} = 1 - \frac{1}{2} \cos(30^\circ + 10^\circ) - \frac{1}{2} \sin 10^\circ + \frac{1}{2} \sin(60^\circ + 10^\circ) = 1 + \frac{1}{2} \sin 10^\circ \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos 10^\circ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1.$$

事实上, 积化和差可得 $\sin 30^\circ \sin 70^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 100^\circ - \cos 40^\circ)$, 由此直接得到原式 = 1.

(2)

$$\text{原式} = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ (-\cos 96^\circ) = -\frac{\sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ}{\sin 12^\circ}$$

不断运用二倍角公式可得原式 = $-\frac{1}{16} \frac{\sin 192^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{1}{16}$.

(3) 切化弦并通分, 再利用辅助角公式和二倍角公式:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sin 50^\circ + \sqrt{3} \sin 50^\circ \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ} (\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ) \\ &= 2 \frac{\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ} \sin 40^\circ = \frac{2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

(4) 切化弦并利用半角公式和降幂公式:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \tan 10^\circ \left(\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} - \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} \right) = \tan 10^\circ \frac{\sin^2 5^\circ - \cos^2 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} \\ &= \tan 10^\circ \frac{-\cos 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ} = -2. \end{aligned}$$

♡

例 3.24. 综合运用三角恒等变形的技巧求化简下面各式:

(1) 已知 $450^\circ < \alpha < 540^\circ$, 化简 $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha}}$.

(2) 已知 $\theta \in (0, \pi)$, 化简 $\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 - \sin \theta}$.

(3) 已知 α 是第三象限角, 化简 $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$.

解. (1) 由二倍角公式 (升幂公式), $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha$, 因为 $\alpha \in (\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$, $2\alpha \in (5\pi, 6\pi)$, 所以 $\cos 2\alpha \in (-1, 0)$.

$$\text{所以原式} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha}$$

又因为 $\frac{\alpha}{2} \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$, 所以 $\sin \frac{\alpha}{2} \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. 根据二倍角公式 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, 所以

$$\text{原式} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha} = -\sin \frac{\alpha}{2}.$$

(2) 由二倍角公式, $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, 再由平方关系, $1 + \sin \theta = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = (\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2$, $1 - \sin \theta = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = (\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2})^2$.

$$\text{所以原式} = \sqrt{(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2} + \sqrt{(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2})^2} = \begin{cases} 2 \sin \frac{\theta}{2}, & 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos \frac{\theta}{2}, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

评注 3.24.1. 事实上, $1 \pm \sin \alpha = (\sin \frac{\alpha}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2})^2$, 理解成完全平方式.

(3) 因为 α 是第三象限角, 所以 $\cos \alpha < 0, \sin \alpha < 0$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sqrt{\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}} + \sqrt{\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} + \sqrt{\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} \\ &= -\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= -2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= -2 \tan \alpha \end{aligned}$$

♡

习题 3.2

定义

- 函数 $y = f(x) = \sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 是递增的连续函数, 这意味着它具有反函数 $x = f^{-1}(y)$, 记为 $x = \arcsin y$, 它定义在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 且在这个区间上的值由 $-\frac{\pi}{2}$ 递增到 $\frac{\pi}{2}$.
- 函数 $y = \cos x$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 是递减的连续函数, 所以它有反函数, 记为 $x = \arccos y$, $\arccos$ 函数定义在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 且在这个区间上的值由 π 递减到 0 .
- 函数 $y = \tan x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是由 $-\infty$ 向 $+\infty$ 递增的连续函数, 因此它有定义在实数 $\mathbb{R}$ 上的反函数, 记作 $x = \arctan y$, 其值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值是_____.
- 如果 $\triangle ABC$ 中, $\tan A, \tan B, \tan C$ 都是整数, 且 $A > B > C$, 则以下说法错误的是_____.
(A. $A < 80^\circ$, B. $B < 60^\circ$, C. $C < 50^\circ$, D. $A > 65^\circ$) .
- 已知 P 是正方形 $ABCD$ 内切圆上的一点, 记 $\angle APC = \alpha, \angle BPD = \beta$, 则 $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta =$ _____.
- $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C , 若 $\frac{\sin A + \sqrt{3} \cos A}{\cos A - \sqrt{3} \sin A} = \tan \frac{7\pi}{12}$, 则 $\sin 2B + 2 \cos C$ 的最大值为_____.
- 若 $\tan \alpha = 3 \tan \beta (0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha - \beta$ 的最大值为_____.

6. 若函数 $y = 3 \sin x - 4 \cos x$ 在 x_0 处取得最大值, 则 $\tan x_0$ 的值为_____.
7. 已知 $\sin \alpha + \sqrt{3} \sin \beta = 1$, $\cos \alpha + \sqrt{3} \cos \beta = \sqrt{3}$, 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为_____.
8. 不等式 $|\sin 2\pi x| > |\cos 2\pi x|$ 的解集是_____.
9. 已知函数 $f(x) = \cos(a \sin x) - \sin(b \cos x)$ 无零点, 则 $a^2 + b^2$ 的取值范围为_____.
10. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{50}} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{65}} =$ _____.
11. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$, 试求 $\cos \alpha$ 的最大值.
12. 已知 $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\frac{\sin A}{\sin B} = \sin(A + B)$, 求 $\tan A$ 的最大值.
13. 对任意的 x 和自然数 n , 比较 $n \sin^2 x$ 和 $\sin x \sin nx$ 的大小.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} = 1$, 则 $\tan \frac{C}{2}$ 的最小值为_____.
15. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C , 若
- $$\sin A^2 + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$
- 则 $\cos A + \cos B + 2 \cos C$ 的最大值为_____.
16. 设 $x + \sin x \cos x - 1 = 0$, $2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0$, 则 $\sin(2x - y)$ 的值是_____.
17. 设 $x \in (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 且 $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos 2x$ 的值是_____.
18. 函数 $y = \frac{\sin 2x - 3}{\sin x + \cos x - 2}$ 的值域是_____.
19. 函数 $y = \frac{(\sin x - 1)(\cos x - 1)}{2 + \sin 2x} (x \in \mathbb{R})$ 的最大值为_____.
20. 函数 $f(x) = \cos 2x + 2|\sin x|$ 的最大值为_____.
21. 函数 $y = |\cos x| - \cos 2x (x \in \mathbb{R})$ 的值域为_____.
22. 如果存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $a \cos x + b \cos 2x > 1$ 无实数解, 则实数 b 的最大值为_____.
23. 函数 $y = \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x$ 的值域为_____.
24. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + \sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} (x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}])$ 的值域为_____.
25. 设 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 且方程 $\cos 2x - 4a \cos x + 2 = 0$ 有两个不同的解, 求 a 的取值范围.
26. 求实数 a 的取值范围, 使不等式 $\sin 2\theta - 2\sqrt{2}a \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}a}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} > -3 - a^2$ 对 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立.
27. 函数 $f(x) = (\sqrt{3} \sin x + \cos x)(\sqrt{3} \cos x - \sin x)$ 的最小正周期是_____.

28. 已知函数 $f(x) = 4 \sin 2x + 3 \cos 2x + 2a \sin x + 4a \cos x$ 的最小值为 -6 , 则实数 a 的值为_____.
29. 已知 $\angle A$ 为锐角, 则 $\sqrt{\sin^4 A + 1} + \sqrt{\cos^4 A + 4}$ 的最小值为_____.
30. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha}{4 \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha}$ 的值是_____.
31. 设 x 为锐角, 则函数 $y = \sin x \sin 2x$ 的最大值是_____.
32. 计算 $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$ 的值为_____.
33. 锐角三角形的内角 A, B 满足 $\tan A - \frac{1}{\sin 2A} = \tan B$ 且 $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $\sin 2A =$ _____.
34. 函数 $f(x) = 2(2 \cos x + 1) \sin^2 x + \cos 3x$, $x \in \mathbb{R}$. 求函数 $f(x)$ 的最大值.
35. 函数 $f(x) = 4 \sin^3 x - \sin x + 2(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2$ 的最小正周期为_____.
36. 已知 $f(\cos x) = \frac{\cos 3x}{\cos^2 x}$, 则函数 $y = f(\cos x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值为_____.
37. 设 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$. 则 $\sin 3\alpha + \cos 3\alpha =$ _____.
38. 已知 $\theta \in \mathbb{R}$, 且 $\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} =$ _____.
39. 计算 $\cos 2016^\circ =$ _____.
40. 已知顶角为 20° 的等腰三角形的底边长为 a , 腰长为 b , 则 $\frac{a^3 + b^3}{ab^2}$ 的值为_____.
41. 若 $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$, 则 $\cos 4x =$ _____.
42. 若 $\tan 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\frac{\sin 4x}{\cos 8x \cos 4x} + \frac{\sin 2x}{\cos 4x \cos 2x} + \frac{\sin x}{\cos 2x \cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} =$ _____.
43. 若 $\alpha \in (0, \pi)$ 且满足 $\frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\alpha =$ _____.
44. 设 $x = \sin^2 \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $\alpha = \frac{67\pi}{2014}$ 时, x 的小数点后第一位数字是_____.
45. 函数 $f(x) = |\sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)|$ 的最小正周期 =_____.
46. 函数 $y = \tan(2013x) - \tan(2014x) + \tan(2015x)$ 在 $[0, \pi]$ 中的零点个数为_____.
47. 求值: $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} =$ _____.
48. 若 $\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{9} = \frac{1}{2} \tan \frac{4\pi}{9}$, 则正整数 n 的最小值为_____.
49. 设 m, n 均为正整数, 则 $\sum_{k=0}^{m-1} \cos \frac{2k\pi}{m} + \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} =$ _____.
50. 已知 α, β, γ 是一个三角形的三个内角, 如果 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$ 取得最大值, 则 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma =$ _____.
51. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y}{\sin(x+y)} = 1$, 则 $x - y =$ _____.

52. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足: $A = 3B = 9C$, 则 $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A =$ _____.
53. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 满足 $A < B < C$, 且 $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$, 则 $\angle B =$ _____.
54. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{1}{4}$, 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$ 的最小值为 _____.
55. 设 $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{22}{7}$ 且 $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{m}{n}$, 其中 $\frac{m}{n}$ 为最简分数, 则 $m + n =$ _____.
56. 设 $0 \leq x \leq \pi$, $3 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$. 则 $\tan x =$ _____.
57. $\tan 15^\circ + 2\sqrt{2} \sin 15^\circ =$ _____.
58. 已知函数 $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x) - \sqrt{3} \cos 2x$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;
 - (2) 若 $f(x) < m + 2$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.
59. 已知函数 $f(x) = 4 \cos x \cdot \sin(x + \frac{7\pi}{6}) + a$ 的最大值为 2.
- (1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;
 - (2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.
60. 已知函数 $f(x) = 2 \cos x (\cos x + \sqrt{3} \sin x) - 1, x \in \mathbb{R}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;
 - (2) 设点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ 都在函数的图像上, 且满足 $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{2}$. 求 $y_1 + y_2 + \dots + y_{2018}$ 的值.
61. 已知函数 $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} + x) - \sqrt{3} \cos 2x - 1, x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
 - (2) 若不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.
62. 已知将函数 $g(x) = \cos x$ 图像上所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度的到函数 $y = f(x)$ 的图像, 且关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β .
- (1) 求满足题意的实数 m 的取值范围;
 - (2) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ (用含 m 的式子表示) .
63. 已知函数 $f(x) = \sin^4 x$.
- (1) 记 $g(x) = f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x)$, 求 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{8}]$ 上的最大值与最小值;
 - (2) 求 $f(\frac{\pi}{180}) + f(\frac{2\pi}{180}) + f(\frac{3\pi}{180}) + \dots + f(\frac{88\pi}{180}) + f(\frac{89\pi}{180})$ 的值.
64. 求证: $\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} > \frac{3}{n} \cos \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

65. 已知 $f(\sin x) = \frac{\sin 3x}{\sin^2 x}$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及定义域;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个不等实根, 求 m 的取值范围.

66. 设 x_1, x_2, x_3 是方程 $x^3 - 17x - 18 = 0$ 的三个根, $-4 < x_1 < -3$, 且 $4 < x_3 < 5$.

(1) 求 x_2 的整数部分;

(2) 求 $\arctan x_1 + \arctan x_2 + \arctan x_3$ 的值.

第四章 平面向量与复数

Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen.

——David Hilbert

这一讲介绍平面向量和复数. 向量是数学中的一个非常重要的概念, 能够引申出无限的意义. 例如物理中的位移, 速度和力等物理量既有大小, 又有方向, 它们都是向量; 有一定长度和方向的直线段也可以看成是向量. 通过研究向量具有的某些特征, 就可以利用向量解决很多问题, 例如在高中阶段, 我们可以利用向量来进一步认识很多几何问题, 还可以把向量作为工具来研究很多几何问题. 相信大家在学习的过程中, 能够体会到向量的威力.

我们在研究解多项式方程问题时, 通过引入复数的概念, 并且定义了复数的运算法则之后, 就可以完美地解决二次方程的求解问题. 此外, 通过在复数集与复平面之间建立一一映射, 我们可以自然引入复数的三角表示, 复数的三角表示能够使得复数的乘法运算大大简化且易于理解. 总之, 通过学习, 我们将深刻地体会到引入复数的想法是多么强大和令人舒服.

4.1

平面向量

4.1.1 向量的加减与数乘向量

空间中既有大小 (一定长度) 又有方向的量称为**向量**, 大小和方向是确定一个向量的两个要素.

我们可以用有一定长度和方向的直线段 (有向线段) 来表示向量, 并记起点为 A , 终点为 B 的向量为向量 $\overrightarrow{AB}$, 如图4.1所示.

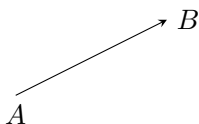


图 4.1:

我们说两个向量**相等**, 等价于两个向量长度相等, 方向相同. 可见, 向量相等并不依赖于向量的起点, 即同向且等长的有向线段表示的都是同一向量, 向量本身只有大小和方向, 与起点的位置无

关 (称为自由向量), 如图4.2 所示, 这些有向线段表示的都是同一向量. 所以用有向线段表示向量时, 起点可以任意选取.

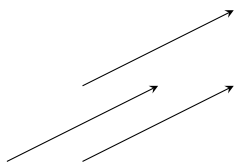


图 4.2:

向量也可以用黑体小写字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 等表示, 书写用 $\vec{a}, \vec{b}$.

我们称向量的长度为向量的**模**或**模长**, 记为 $|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$, 等等. 任何一个向量 $\vec{a}$ 的模是一个非负实数, 即 $|\vec{a}| \geq 0$. 特别地, 如果 $|\vec{a}| = 1$, 则称 $\vec{a}$ 为**单位向量**; 如果 $|\vec{a}| = 0$, 则称 $\vec{a}$ 为**零向量**, 记为 $\vec{a} = \vec{0}$, 规定 $\vec{0}$ 的方向是任意的.

如果表示两个向量的有向线段所在直线平行或重合, 则称这两个向量**平行**或**共线**. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行或共线记为 $\vec{a} // \vec{b}$. 规定 $\vec{0}$ 与任意向量都平行. 之所以也可以把平行向量称为共线向量, 是因为向量的概念不依赖于起点位置, 这样, 所有平行的向量都可以平移到同一条直线上.

根据向量共线的定义, 我们立刻得到以下几条结论:

- 1° 两非零共线向量的方向相等或相反;
- 2° 相等向量一定是共线向量;
- 3° 向量平行不具有传递性, 若 $\vec{a} // \vec{b}, \vec{b} // \vec{c}$, 未必有 $\vec{a} // \vec{c}$. 因为当 $\vec{b} = \vec{0}$ 时, $\vec{a}$ 和 $\vec{c}$ 可以是任意向量. 但是, 若 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 则 $\vec{a} // \vec{b}, \vec{b} // \vec{c} \Rightarrow \vec{a} // \vec{c}$.

下面我们讨论向量的加法和数乘运算.

我们定义求两个向量之和的运算为**向量的加法运算**, 向量对加法运算封闭, 即两个向量的和仍然是向量.

向量的加法运算法则: 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 如图4.3, 作 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 为以 AB, AD 为邻边的平行四边形的对角线所对应的有向线段代表的向量, 即向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\vec{a} + \vec{b}$. 这种求两个向量和的作图方法称为**平行四边形法则**.

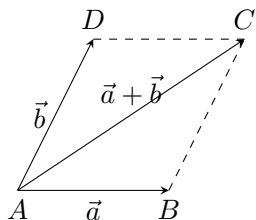


图 4.3:

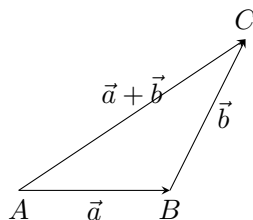


图 4.4:

向量求和也遵循**三角形法则**, 如图4.4所示, 取起点 A 并作向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 再以 B 为起点, 作向量 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. 三角形法则还可以推广到 n 个向量求和的情况, 即将 n 个向量

经过平移使其顺次首尾相接, 前一个向量的终点作为后一个向量的起点, 从而组成一向量折线, 则 n 个向量的和等于折线起点到折线终点的向量, 即

$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_0A_n},$$

如图4.5所示.

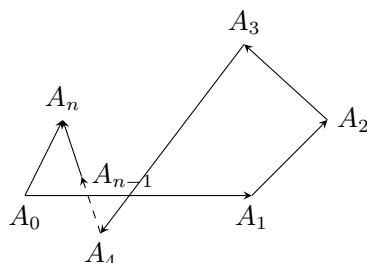


图 4.5:

对于任意的向量 $\vec{a}$ 和零向量 $\vec{0}$, 我们规定 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

为了定义减法运算, 我们需要先给出**相反向量**的概念: 我们把与 $\vec{a}$ 长度相等, 方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的相反向量, 记作 $-\vec{a}$, $\vec{a}$ 和 $-\vec{a}$ 互为相反向量. 并且规定零向量的相反向量仍然是零向量.

特别地, 根据相反向量的定义, 我们有:

1° $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, 相反向量相加等于零向量;

2° 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互为相反向量, 那么 $\vec{a} = -\vec{b}$, $\vec{b} = -\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3° 如果 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, 那么 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, 即交换起点和终点, 表示的向量变为原来的相反向量.

我们用 $-\vec{b}$ 替换 $\vec{a} + \vec{b}$ 中的 $\vec{b}$ 得到 $\vec{a} + (-\vec{b})$, 将这种运算定义为向量的减法, 即 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, 向量的减法实质上也是向量的加法.

类似地考虑向量减法的几何意义: 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如图4.6所示, 作 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, 那么 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, 这可以描述为向量减法的三角形法则, 即把两个向量的起点放在一起, 则两向量之差是连接这两个向量的终点的有向线段, 且箭头指向被减向量的终点, 例如 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

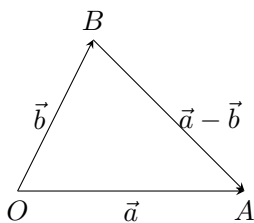


图 4.6:



图 4.7:

根据定义, 向量的加法具有交换律和结合律. 即 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

向量还可以作**数乘运算**. 向量对于数乘运算是封闭的, 即实数 λ 和向量 $\vec{a}$ 的积仍然是一个向量, 并记为 $\lambda\vec{a}$, 它的长度和方向规定如下:

- (1) 长度: $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;
- (2) 方向: $\begin{cases} \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时, 与 } \vec{a} \text{ 方向相同,} \\ \text{当 } \lambda < 0 \text{ 时, 与 } \vec{a} \text{ 方向相反,} \\ \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时, } \lambda \vec{a} = \vec{0}, \text{ 方向任意.} \end{cases}$

数乘向量的几何意义如图4.7所示, $\lambda \vec{a}$ 将表示 $\vec{a}$ 的有向线段伸长或压缩一定倍数.

向量的数乘运算满足结合律, 且数乘与向量的加减之间满足第一和第二分配律:

$$1^\circ (\lambda \mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a});$$

$$2^\circ (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a};$$

$$3^\circ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$

我们将向量的加减和数乘运算的综合运算统称为**线性运算或线性组合**, 如果 $\vec{c}$ 可以由另一些向量线性运算得到, 那么就称 $\vec{c}$ 可以被另一些向量线性表出. 例如 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 即 $\vec{c}$ 可以被 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 线性表出. 我们将实数 λ 和 μ 等称为**线性组合系数**.

根据前面的讨论, 向量对加减法和数乘运算都是封闭的, 因此向量对线性运算当然也是封闭的, 即若干向量的线性组合一定仍是向量. 另外, 我们综合向量的加减运算和数乘运算法则, 可以得到向量的线性运算法则:

$$\lambda(\mu_1 \vec{a} \pm \mu_2 \vec{b}) = \lambda \mu_1 \vec{a} \pm \lambda \mu_2 \vec{b}.$$

4.1.2 平面向量基本定理与向量的坐标表示

定理 4.1.1 (一维向量基本定理). $\vec{a} \neq \vec{0}$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 等价于 $\exists$ 唯一的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

这个命题被称为**向量共线定理**或**一维向量基本定理**.

证明. 首先证明其必要性. 如果 $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{b} = \lambda \vec{a}$, 根据数乘向量的定义立刻知道 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线. 这个结论也常称为**向量共线的判定定理**, 它为我们判断向量 $\vec{b}$ 与已知向量 $\vec{a}$ 是否共线提供了一种方法. 在这里特别指出, 该命题反之不成立, 因为若 $\vec{a} = \vec{0}$ 而 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 又因为我们规定了零向量被任何数数乘仍得零向量, 所以不存在这样的实数 λ 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. 也正因如此, 我们在向量共线定理中要特别规定 $\vec{a}$ 是非零向量以保证它的充分性.

下面证明其充分性, 因为 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 假设存在这样的实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 对该式两边同时取模长, 再根据数乘向量的定义可得, $|\vec{b}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$, 所以 $|\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

分情况讨论: 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 根据数乘向量的定义可知 $\lambda > 0$, 所以 $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 根据数乘向量的定义可知 $\lambda < 0$, 所以 $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; 特别地, 如果 $\vec{b} = \vec{0}$, 那么 $|\lambda| = 0$, 即 $\lambda = 0$. 这个事实也常称为**向量共线的性质定理**.

综上所述, 对于确定的共线向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 总是存在满足条件的 λ , 且对于确定的 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, λ 可以被唯一确定下来. $\square$

在一维向量基本定理的基础上, 可以得到下面几个非常有用的推论:

推论 4.1.1.1. 对于任意的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 若存在不全为 0 的实数 λ 和 μ 使得 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

证明. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 中至少有一个零向量, 命题显然成立;

如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均为非零向量, 不妨设 $\mu \neq 0$, 那么 $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{a}$, 根据定理 4.1.1 的必要性可知 $\vec{a} // \vec{b}$. $\square$

这个推论的逆否命题也成立: 若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 不共线, 那么这样的实数 λ 和 μ 不存在¹ 或 $\lambda = \mu = 0$.

推论 4.1.1.2. 已知平面内互不相同的三点 A, B, C , O 是与 A, B, C 均不相同的任意一点, 那么 A, B, C 三点共线, 当且仅当存在实数 λ, μ 使得 $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$, 且满足 $\lambda + \mu = 1$.

证明. 首先证明必要性 (判定定理), 由 $\lambda + \mu = 1$ 可知 $\lambda = 1 - \mu$, 代入得: $\vec{OC} = (1 - \mu)\vec{OA} + \mu\vec{OB}$, 即 $\vec{OC} - \vec{OA} = \mu(\vec{OB} - \vec{OA})$, 也即 $\vec{AC} = \mu\vec{AB}$, 从而 A, B, C 三点共线.

再证明其充分性 (性质定理). 事实上, 如果 A, B, C 三点共线, 那么一定存在实数 m , 使得 $\vec{AC} = m\vec{AB}$, 即 $\vec{OC} - \vec{OA} = \mu(\vec{OB} - \vec{OA})$, 从而 $\vec{OC} = (1 - m)\vec{OA} + m\vec{OB}$, 我们令 $\lambda = 1 - m$, $\mu = m$, 则此时 $\lambda + \mu = (1 - m) + m = 1$.

综上所述, 我们证明了上述结论. $\square$

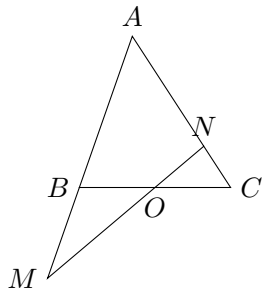
定理 4.1.2 (定比分点公式). 已知线段 AB , C 是直线 AB 上一点. 设 $\vec{AC} = \lambda\vec{CB}$, 则称 λ 为 C 分线段 AB 的比, 这个比是一个“有向比”, 其符号取决于 C 是线段 AB 的内分点还是外分点. 若 C 分线段 AB 的比 $\lambda \neq -1$, 则对于任意的与 A, B, C 均不相同的点 O , 有

$$\vec{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OB}.$$

这个公式通常称为**定比分点公式**.

证明. 因为 $\vec{AC} = \lambda\vec{CB}$, 所以 $\vec{OC} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OC} - \vec{OB})$, 则 $(1 + \lambda)\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, 即 $\vec{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OB}$. $\square$

例 4.1. (1) 如下图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB 、 AC 于不同的两点 M 、 N , 若 $\vec{AB} = m\vec{AM}$, $\vec{AC} = n\vec{AN}$, 则 $m + n$ 的值为_____.



(2) 在三角形 ABC 中, 向量 $\vec{a} = \vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{b} = 3\vec{AB} + 8\vec{AC} + \vec{BC}$, $\vec{c} = 4\vec{CB} + \vec{BA}$, 则下列结论一定正确的是 ().

¹在讨论了平面向量基本定理之后, 我们可以得到: 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是共面的, 那么一定存在这样的 λ 和 μ .

(A) $\vec{a} + \vec{c} // \vec{b}$ (B) $\vec{b} + \vec{c} // \vec{a}$ (C) $\vec{a} + \vec{b} // \vec{c}$ (D) $\vec{a} - \vec{b} // \vec{c}$

(3) 设点 O 在三角形 ABC 内部, 点 D, E 分别为边 AC, BC 的中点, 且 $|\vec{OD} + 2\vec{OE}| = 1$, 那么 $|\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}| =$ _____.

解. (1) 因为 O 是 BC 的中点, 由定比分点坐标公式可知 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$. 代入得 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(m\vec{AM} + n\vec{AN}) = \frac{1}{2}m\vec{AM} + \frac{1}{2}n\vec{AN}$, 又因为 O, M, N 三点共线, 从而 $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = 1$, 所以 $m + n = 2$.

评注 4.1.1. 本题实际上用到了中点的向量公式: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 是 BC 的中点, 那么 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$. 这是一个很常用的公式.

(2) 我们统一地用 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 线性表出 $\vec{a}, \vec{b}$ 和 $\vec{c}$:

$$\vec{b} = 3\vec{AB} + 8\vec{AC} + (\vec{BA} + \vec{AC}) = 2\vec{AB} + 9\vec{AC}; \vec{c} = -\vec{AB} - 4(\vec{BA} + \vec{AC}) = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \text{ 则}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{AB} + 10\vec{AC}; \vec{a} - \vec{b} = -\vec{AB} - 8\vec{AC}; \vec{a} + \vec{c} = 4\vec{AB} - 3\vec{AC}; \vec{b} + \vec{c} = 5\vec{AB} + 5\vec{AC}.$$

显然, $\vec{b} + \vec{c} = 5\vec{a}$, 由向量共线定理知: B 项正确, 其他三个选项都不正确.

(3) 如图4.8所示:

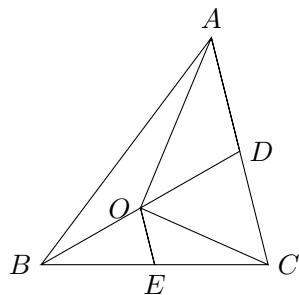


图 4.8:

利用中点的向量公式: $|\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC}| = |\vec{OA} + \vec{OC} + 2(\vec{OB} + \vec{OC})| = |2\vec{OD} + 4\vec{OE}| = 2|\vec{OD} + \vec{OE}| = 2$. ♡

观察: 如果我们在一条直线上取定一维坐标系 (数轴), 并且取这条直线上的单位向量 $\vec{e}$, 方向沿数轴的正方向. 现在我们将与这条直线共线的全体向量移动到以坐标原点为起点的位置, 那么这些向量将由其终点的位置唯一确定. 特别地, 对于其中任意一个向量 $\vec{OP}$, 根据一维向量基本定理, 存在唯一确定的实数 p 使得 $\vec{OP} = p\vec{e}$, 所以向量 $\vec{OP}$ 也可以由实数 p 唯一确定. 事实上, 根据第二章的讨论, 我们又知道直线上的点与实数一一对应, 因此, 就像同一个人的三重身份一样, 我们可以认为一维坐标系上的点, 实数和一维向量三者可以等同. 例如在这里, 向量 $\vec{OP}$, 点 P 和实数 p 可以等同看待, 我们不妨将实数 p 称为向量 $\vec{OP}$ 的坐标.

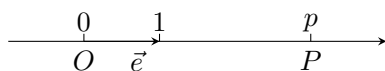


图 4.9: 一维坐标系上的点, 实数和一维向量三者可以等同

对于二维空间中的向量而言,我们能否同样用二元有序数组来表示任何一个二维向量呢?为了回答这个问题,我们要先介绍平面向量基本定理:

定理 4.1.3 (平面向量基本定理). 如果两个非零向量 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 是同一平面内的不共线向量,那么对于这个平面内的任意一个向量 $\vec{\beta}$, 存在唯一的二元有序实数组 (λ, μ) , 使得 $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}_1 + \mu\vec{\alpha}_2$, 即 $\vec{\beta}$ 能够被 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 唯一地线性表出. 反过来, 能够被不共线向量 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 线性表出的向量一定在 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 所张成的平面内.

我们称这一平面内的不共线向量 $\vec{\alpha}_1$ 和 $\vec{\alpha}_2$ 为平面内全体向量的一组基或基底. 显然基底的选取并不唯一, 只要是平面内的两个不共线向量都可以作为基底, 一旦选定了基底, 那么平面内的全体向量都可以表示成基底的线性组合, 基底的全体线性组合构成的集合就是平面内的全体向量构成的集合.

现在我们建立二维直角坐标系, 这样, 二维坐标系上的点与二元有序实数组一一对应. 我们取定两个坐标轴上的单位向量 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$, 方向分别沿坐标轴的正方向. 选定原点为平面内所有向量的起点, 那么这些向量将由其终点的位置唯一确定. 特别地, 对于其中任意一个向量 $\vec{OP}$, 根据一维向量基本定理, 存在唯一确定的二元有序实数组 (x, y) 使得 $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$. 与此同时, (x, y) 也是点 P 的坐标. 所以, 二维坐标系上的点、二元有序实数组和二维向量是一一对应的, 我们可以用二元有序实数组 (x, y) 来表示向量 $\vec{OP}$, (x, y) 称为向量的坐标, 记为 $\vec{OP} = (x, y)$, 我们将这种表示向量的方法叫做向量的坐标表示. 一般情况下, 我们讨论的坐标表示都指的是直角坐标系下的表示.

我们将式 $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 称为向量的正交分解, 即将向量 $\vec{OP}$ 分解为 $x\vec{i}$ 和 $y\vec{j}$ 两个向量的和.

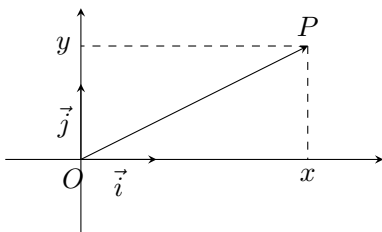


图 4.10: 二维坐标系上的点, 二元有序实数组和平面向量三者可以等同

根据正交分解 $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$, 我们立刻得到向量的加减和数乘运算的坐标表示. 设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 那么:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2), k\mathbf{a} = (kx_1, ky_1).$$

根据平面向量基本定理的唯一性, 向量的坐标与向量一一对应, 所以向量相等等价于各分量都相等, 即

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

向量共线的坐标表示: 若 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 那么存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, 即 $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = \lambda x_2\vec{i} + \lambda y_2\vec{j}$. 根据平面向量基本定理可知 $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, 消去 λ 得 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

因此, 向量共线的坐标表示为:

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

最后, 向量的坐标表示可以推广到 n 维空间的情况. n 维坐标系中的点、 n 元有序实数组和 n 维向量三者一一对应, 所以 n 维向量 α 可以表示成 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 这就是 n 维向量的坐标. 其中 x_i 叫做 n 为向量在第 i 个方向上的分量, 容易看出, 第 i 个方向上的分量同时也是向量分解对应的线性组合系数.

平面向量基本定理可以用来解决很多平面几何问题, 为此, 我们讨论几个非常重要的结论.

观察: 回顾定比分点公式 (定理4.1.2), 我们可以看到, 不管 C 分线段 AB 的比如何, $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 的线性组合系数之和 $m+n$ 总是定值 1, 可见, 满足线性组合系数 $m+n=1$ 的点 C 的集合是直线 AB .

考虑一般情况, 对于 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 如果线性组合系数 $m+n = \frac{1}{\mu} = \text{定值}$, $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, 那么当 m 和 n 变化时, 点 P 的运动轨迹如何?

定理 4.1.4 (等和线定理). 设点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 且线性组合系数之和 $m+n = \frac{1}{\mu}$, 那么当 m, n 变化时, 点 P 的运动轨迹为与 AB 平行的直线 l , 且点 O 到 AB 和 l 的有向距离之比为 μ . 我们称这样的直线 l 为等和线, 特别地, 当 $\mu=1$ 时, 等和线就是 AB 所在直线, 这与三点共线定理 (推论4.1.1.2) 一致, 三点共线定理可以看作是等和线定理的特殊情况.

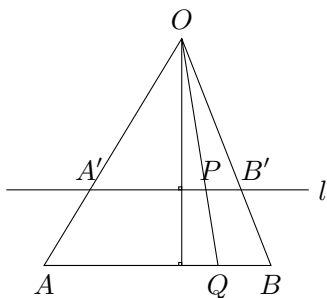


图 4.11: 等和线定理与等比线定理

证明. 如图4.11所示, $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + (\frac{1}{\mu} - m)\overrightarrow{OB} = m\mu(\frac{\overrightarrow{OA}}{\mu}) + (1 - m\mu)(\frac{\overrightarrow{OB}}{\mu}) = m\mu\overrightarrow{OA'} + (1 - m\mu)\overrightarrow{OB'}$
其中 $\overrightarrow{OA} = \mu\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OB'}$.

根据三点共线定理, P, A', B' 三点共线, 即 P 在 $A'B'$ 所在直线上. 由相似三角形可知 $A'B' \parallel AB$, 且相似比为 $\frac{1}{\mu}$, 所以点 O 到 AB 和 $A'B'$ 的距离之比为 μ . $\square$

$A'B'$ 与 AB 在点 O 两侧的情况可以类似证明 (留给读者).

定理 4.1.5 (等比线定理). 设点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, 且线性组合系数之比 $\frac{m}{n}$ 为定值, 那么当 m, n 变化时, 点 P 的运动轨迹为与 OQ 所在的直线 (不包含点 O), 其中 Q 分线段 AB 的比为 $\frac{n}{m}$.

证明. 如图4.11所示, 设 $\frac{n}{m} = \lambda$, λ 为定值, 那么 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA} + \lambda m\overrightarrow{OB}$, 因为 Q 分线段 AB 的比为 $\frac{n}{m}$, 根据定比分点公式, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}$, 所以 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 共线, 即 P 在 OQ 所在直线上 (不包含点 O). $\square$

定理 4.1.6 (奔驰定理). 设点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 则满足

$$S_{\triangle PBC} \overrightarrow{PA} + S_{\triangle PAC} \overrightarrow{PB} + S_{\triangle PAB} \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

这个定理俗称**奔驰定理**.

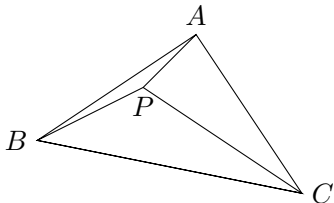


图 4.12:



图 4.13:

证明. 延长 AP 交 BC 于点 D , 记 $S_{\triangle PBC}, S_{\triangle PAC}, S_{\triangle PAB}$ 分别为 S_A, S_B, S_C ,

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \frac{S_B}{S_{\triangle ADC}} \overrightarrow{AD} = \frac{S_C}{S_{\triangle ADB}} \overrightarrow{AD} = \frac{S_B + S_C}{S_{\triangle ADC}} + S_{\triangle ADB} \overrightarrow{AD} = \frac{S_B + S_C}{S_{\triangle ABC}} \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{因为 } \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{S_B}{S_{\triangle ADC}} = \frac{S_C}{S_{\triangle ADB}}, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ADB}} = \frac{S_B}{S_C} = \frac{|CD|}{|BD|}.$$

$$\text{根据定比分点公式, } \overrightarrow{AD} = \frac{|CD|}{|BC|} \overrightarrow{AB} + \frac{|BD|}{|BC|} \overrightarrow{AC} = \frac{S_B}{S_B + S_C} \overrightarrow{AB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \overrightarrow{AC}.$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{S_B + S_C}{S_{\triangle ABC}} \overrightarrow{AD} = \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C} \overrightarrow{AB} + \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C} \overrightarrow{AC} = \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C} (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) + \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C} (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}).$$

上式整理得

$$S_A \overrightarrow{PA} + S_B \overrightarrow{PB} + S_C \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

□

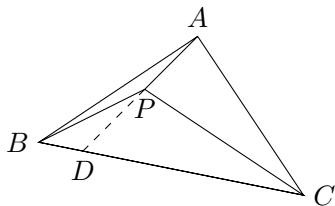
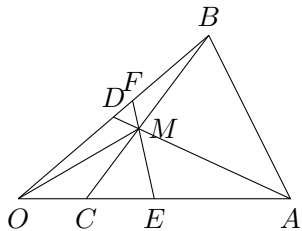


图 4.14:

例 4.2. (1) 设点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且满足 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 求 $S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCA} : S_{\triangle PAB}$.

(2) 在直角三角形 ABC 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3, BC = 4$, P 是线段 AB 上的点 (不包括点 A 和点 B), 且 $\overrightarrow{CP} = \lambda \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + \mu \cdot \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$, 求 $\lambda\mu$ 的最大值.

(3) 如下图所示, 在 $\triangle ABO$ 中, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, AD 与 BC 相交于点 M . 在线段 AC 上取点 E , 在线段 BD 上取点 F , 使 EF 过点 M , 设 $\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF} = \mu\overrightarrow{OB}$, 求 $\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\mu}$.



解. (1) 不妨参考图4.14. 因为 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 系数和为 $\frac{5}{6}$, 系数比为 $\frac{2}{3}$. 根据等和线定理, 点 P 与点 A 到 BC 的距离之比等于 $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$, 所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$, 根据等比线定理, $\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{2}{5}$, 所以 $S_{\triangle DAC} = \frac{2}{5}S_{\triangle ABC}$, 所以 $S_{\triangle PCA} = \frac{5}{6}S_{\triangle DAC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, 所以 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle PCA} - S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 即所求比例为 $1:2:3$.

事实上根据奔驰定理, 立刻得到所求比例为 $1:2:3$.

(2) $\overrightarrow{CP} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{\mu}{4}\overrightarrow{CB}$, 因为 P 在线段 AB 上, 根据等和线定理可知 $\frac{\lambda}{3} + \frac{\mu}{4} = 1$, 且 $\lambda \in (0, 3)$, 因为 $\mu = 4 - \frac{4}{3}\lambda$, 所以 $\lambda\mu = \lambda(4 - \frac{4}{3}\lambda) = -\frac{4}{3}(\lambda - \frac{3}{2})^2 + 3$, 当 $\lambda = \frac{3}{2}$ 时, $(\lambda\mu)_{\max} = 3$, 所以 $\lambda\mu$ 的最大值是 3.

(3) 我们选取 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 作为平面向量的基底, 并记 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 根据平面向量基本定理, 存在实数 m, n 使得 $\overrightarrow{OM} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} = \frac{1}{4}m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}n\overrightarrow{OD}$. 因为 A, M, O 共线, B, M, C 共线, 根据三点共线定理可知 $\begin{cases} \frac{1}{4}m + n = 1, \\ m + \frac{1}{2}n = 1, \end{cases}$ 解得 $m = \frac{1}{7}, n = \frac{3}{7}$, 所以 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}$.

又因为 $\overrightarrow{OE} = \lambda\mathbf{a}, \overrightarrow{OF} = \mu\mathbf{b}, \overrightarrow{OM} = \frac{1}{7\lambda}\overrightarrow{OE} + \frac{3}{7\mu}\overrightarrow{OF}$,

因为 E, M, F 三点共线, 由三点共线定理可知 $\frac{1}{7\lambda} + \frac{3}{7\mu} = 1$, 所以 $\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\mu} = 7$. $\heartsuit$

评注 4.2.1. 我们在解决平面向量问题时, 要有基底的概念, 根据平面向量基本定理, 我们可以用两个不共线向量的线性组合表示出全体平面向量, 因此在解决问题时, 要学会合理地选择基底.

例 4.3. 已知向量 $\vec{a} = (\lambda + 2, \lambda^2 - \cos^2 \alpha)$, $\vec{b} = (m, \frac{m}{2} + \sin \alpha)$, 其中 λ, m, α 为实数, 若 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 则 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是_____.

解. 由题意可知 $\vec{b} = (2m, m + 2\sin \alpha)$, 所以 $2m = \lambda + 2$, 且 $2\lambda^2 - 2\cos^2 \alpha = \lambda + 2 + 4\sin \alpha$, 即 $2\lambda^2 - \lambda = -2\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha + 4 = -2(\sin \alpha - 1)^2 + 6$, 因为 $\sin \alpha \in [-1, 1]$, 所以 $2\lambda^2 - \lambda \in [-2, 6]$, 解得 $\lambda \in [-\frac{3}{2}, 2]$, 则 $\frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2} + 1} = 2 - \frac{4}{\lambda + 2} \in [-6, 1]$. $\heartsuit$

例 4.4. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, 则角 $C =$ _____.

解. 由奔驰定理, $S_{\triangle IBC}\overrightarrow{IA} + S_{\triangle ICA}\overrightarrow{IB} + S_{\triangle IAB}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, 所以 $S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} = 3 : 4 : 5$. 又因为 I 是三角形 ABC 的内心, I 到三条边的距离相等且都是内切圆的半径 r , 所以 $S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} = |BC| : |CA| : |AB| = 3 : 4 : 5$, 所以三角形 ABC 是直角三角形, C 为直角顶点, 所以角 $C = \frac{\pi}{2}$. $\heartsuit$

评注 4.4.1. 设三角形 ABC 中角 A 所对的边为 a , 角 B 所对的边为 b , 角 C 所对的边为 c , I 为三角形 ABC 的内心, 则根据奔驰定理, 我们有: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. 由此, 如果设二维直角坐标系的原点为 O , 则有 $a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + b(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) + c(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$, 整理得 $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.

将上式用向量的坐标表示, 我们得到点 I 的坐标为 $I(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c})$, 这就是**内心坐标公式**.

例 4.5. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 试证明 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

证明. 延长 AG 交 BC 于点 D , 由平面几何知识可知 G 为线段 AD 上靠近 D 的三等分点, 结合中线的向量公式可知 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$, 整理得 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. $\square$

评注 4.5.1. 设二维直角坐标系的原点为 O , 根据 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, 得到 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 用坐标表示, 可得 G 点的坐标为 $(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$, 即重心坐标的各分量为三个顶点的各分量的算术平均, 这就是**重心坐标公式**.

例 4.6. (1) A, B, C 为圆 O 上不同的三点, 且 $\angle AOB = 120^\circ$, 点 C 在劣弧 $\widehat{AB}$ 内 (点 C 与 A, B 不重合), 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的取值范围为_____.

(2) 直角梯形 $ABCD$ 中, $CB \perp CD$, $AD \parallel BC$, $\triangle ABD$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面上的动点, 且满足 $|\overrightarrow{CP}| = 1$. 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{AB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为_____.

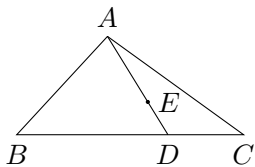
(3) 如右图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $BD = \frac{3}{4}BC$, 当 E 点在线段 AD 上移动时, 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $(\lambda - 1)^2 + \mu^2$ 的最小值为 ().

(A) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(B) $\frac{\sqrt{82}}{4}$

(C) $\frac{9}{10}$

(D) $\frac{41}{8}$



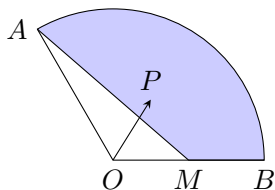
(4) 如下图所示, 在扇形 OAB 中, $\angle AOB = 120^\circ$, $OA = OB = 2$, 点 M 是 OB 的中点, 点 P 是阴影区域内的任意一点 (包含边界), 若 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OM}$, 则 $m + n$ 的最大值为 ().

(A) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

(B) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

(C) $\sqrt{7}$

(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



解. (1) 如图4.15所示, $\lambda + \mu$ 的值取决于等和线的位置, 根据等和线定理立刻得到 $1 < \lambda + \mu \leq 2$.

另解: 以 O 为原点, AB 的中垂线所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 因为 C 在劣弧 $\widehat{AB}$ 内 (点 C 与 A, B 不重合), 所以可设 $\overrightarrow{OC} = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$. 因为 $\overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 1)$, $\overrightarrow{OB} =$

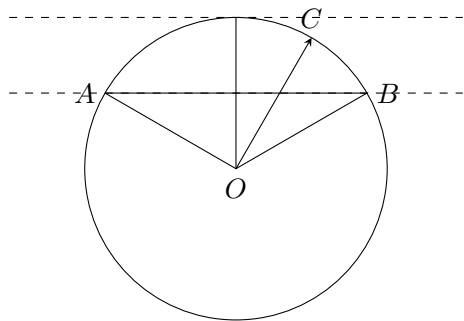


图 4.15:

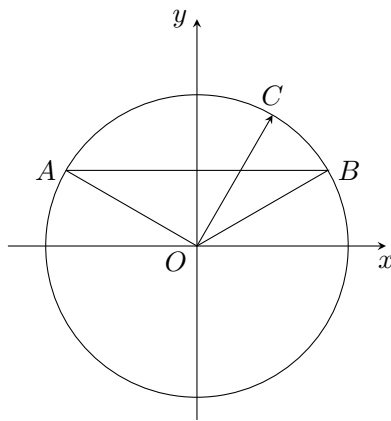


图 4.16:

$(-\sqrt{3}, 1)$, 所以 $\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} = (\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}\mu, \lambda + \mu)$, 所以 $\lambda + \mu = 2 \sin \alpha$. 又因为 $\sin \alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $\lambda + \mu \in (1, 2]$.

(2) 如图4.17所示, BD 所在直线是 $\lambda + \mu = 1$ 对应的等和线. 由题意可知 P 点的运动轨迹是以 C 为圆心的半径为 1 的圆, 如果过圆上各点作 BD 的平行线, 则与 A 点有向距离最远的直线与圆相切, 记为直线 l . 过点 A 作 BD 的垂线, 分别与 BD 和直线 l 交于点 E 和 F . 根据等和线定理, $\lambda + \mu$ 的最大值就是 $\frac{|AF|}{|AE|}$. 过点 C 作直线 AF 的垂线于 H , 则根据平面几何知识可知, $|AE| = \sqrt{3}$, $|EH| = 1 \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|HF|$ 与圆半径相等即 $|HF| = 1$. 所以 $|AF| = |AE| + |EH| + |HF| = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\lambda + \mu$ 的最大值为 $\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{6}$.

另解 如图4.18, 以 C 为原点, $\overrightarrow{CB}$ 所在直线为 x 轴, $\overrightarrow{CD}$ 所在直线为 y 轴, 建立直角坐标系, 所以

$C(0, 0), D(0, -\sqrt{3}), B(1, 0), A(2, -\sqrt{3})$.

因为 $|\overrightarrow{CP}| = 1$, 所以可设 $\overrightarrow{CP} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in [0, 2\pi)$. 因为 $\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}), \overrightarrow{AD} = (-2, 0), \overrightarrow{AC} = (-2, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AP} = (\cos \alpha - 2, \sin \alpha + \sqrt{3})$.

因为 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AB}$, 所以 $\begin{cases} -2\lambda - \mu = \cos \alpha - 2, \\ \sqrt{3}\mu = \sin \alpha + \sqrt{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin \alpha + \frac{1}{2}, \\ \mu = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \alpha + 1, \end{cases}$
 $\lambda + \mu = \frac{\sqrt{3}}{6}\sin \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\alpha - \varphi) + \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} = \frac{9 + 2\sqrt{3}}{6}$, 所以 $\lambda + \mu$ 的最大值为 $\frac{9 + 2\sqrt{3}}{6}$.

(3) 根据等比线定理可知 $\frac{\lambda}{\mu} = 3$. 当 E 与点 D 重合时, 根据三点共线定理可知 $\lambda + \mu = 1$, 所以 $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$, 所以 $t = (\lambda - 1)^2 + (3\mu)^2 = 10\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 10(\lambda - \frac{1}{10})^2 + \frac{9}{10}$, 所以当 $\lambda = \frac{1}{10}$ 时, t 取得最小值 $\frac{9}{10}$.

(4) 如图4.19, 过扇形上一点作与 AM 平行的切线, 与 OB 的延长线交于点 C , 根据等和线定理, 这条切线是 $m + n$ 最大的等和线, 即当 P 为切点时, $m + n$ 最大. 设 OP 与 AM 交于 N , 根据余弦定理可知 $AM = \sqrt{7}$, 因为 $S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}|AM| \times |ON| = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin 120^\circ$, 所以 $|ON| = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

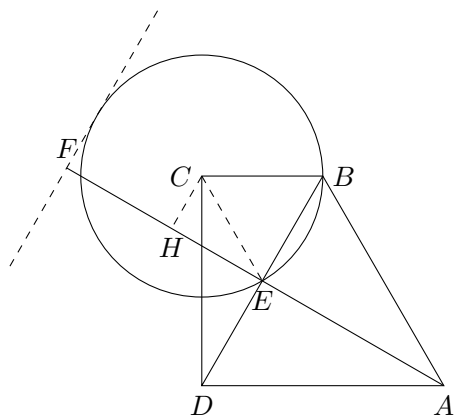


图 4.17:

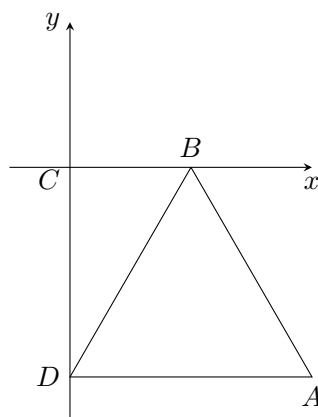


图 4.18:

所以 $|OP|/|ON| = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, 这就是 $m+n$ 的最大值, 选 B 项.

♡

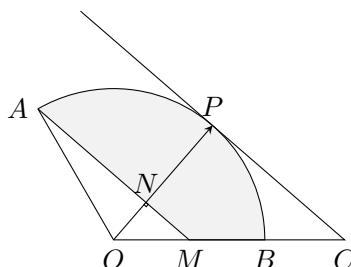


图 4.19:

评注 4.6.1. 这几道例题都可以通过灵活使用等和线定理和等比线定理来解答, 将线性组合系数之和或线性组合系数之比理解为几何上的量, 从而将向量问题转化为了几何问题.

4.1.3 向量的数量积, 模与夹角, 平面向量数量积的应用

设 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是两个非零向量, 如图4.20所示, 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 我们约定 $\angle AOB = \theta \in [0, \pi]$ 为向量 $\mathbf{a}$ 和向量 $\mathbf{b}$ 的夹角, 记作 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 或 $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$, 特别地, 当 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向; 若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时, 我们称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直或正交, 记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 我们规定零向量可以与任何一个向量都垂直或正交; 当 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \pi$ 时, $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 反向.



图 4.20:

我们定义一种新的运算叫做向量的数量积或内积或点积是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

特别地, 当 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中至少有一个零向量时, 我们约定 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的数量积是 0, 两个向量的数量积是一个数.

如图4.21所示, 过点 B 作 $BP \perp OA$ 于点 P , 则有向线段 OP 的长度为 $|\mathbf{b}| \cos \theta$ (以 OA 方向为正方向), 我们将 $|\mathbf{b}| \cos \theta$ 叫做 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影长度, 简称为投影. 这里的投影是有正负的, 当 θ 为锐角时, P 和 A 在 O 点的同侧, 投影是正值; 当 θ 为钝角时, P 和 A 在 O 点两侧, 投影是负值; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, P 和 O 重合, 投影长度为 0; 当 $\theta = 0$ 时, 投影等于 $|\mathbf{b}|$; 当 $\theta = \pi$ 时, 投影等于 $-|\mathbf{b}|$.

一般地, 向量 $\mathbf{b}$ 在向量 $\mathbf{a}$ 上的投影等于 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

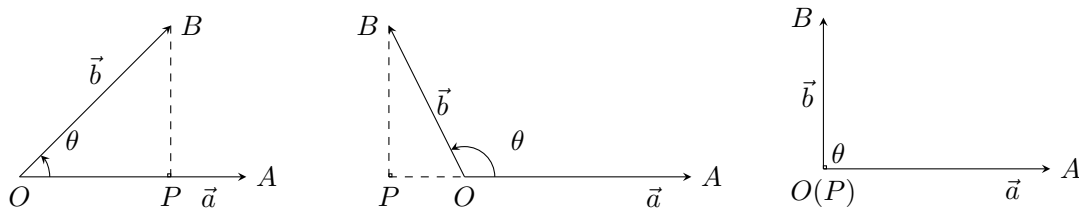


图 4.21:

由此, 我们可知两个向量的数量积的几何意义为: $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积等于 $\mathbf{a}$ 的模长与 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的有向投影长度之乘积, 或 $\mathbf{b}$ 的模长与 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的有向投影长度之乘积. 在物理中, 恒力 $\mathbf{F}$ 沿着位移 $\mathbf{s}$ 所做的功就是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.

向量数量积的引入为描述两个向量间的垂直关系带来了方便, 即:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 垂直}$$

因为我们约定了零向量与任何向量都垂直, 所以不论 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是不是零向量, 上面的结论总是成立的.

与此类似, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 等价于 $\cos \theta > 0$, 即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是零角或锐角; 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 等价于 $\cos \theta < 0$, 即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是平角或钝角.

我们定义任意一个向量 $\vec{v}$ 的模或模长为 $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, 这个式子称为向量的模长公式, 特别地, 若 $|\vec{v}| = 1$, 则称这样的 $\vec{v}$ 为单位向量. 一个非零向量所确定的单位向量 $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, 这里的 $\vec{e}$ 是沿 $\vec{a}$ 方向的单位向量.

根据数量积的定义可知, 两非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 θ 满足 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$. 我们将这个式子称为向量的夹角公式. 这里 $\cos \theta$ 在 $[0, \pi]$ 上是单调函数, 即对于两个确定的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 它们的夹角可以被唯一地确定下来.

根据数量积的定义, 我们还可得到数量积具有如下的运算律:

1° 交换律: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2° 数乘结合律: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$;

3° 分配律: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4° 综合数乘结合律和分配律, 可以得到向量数量积的线性运算法则: $\vec{u} \cdot (c\vec{v} + d\vec{w}) = c\vec{u} \cdot \vec{v} + d\vec{u} \cdot \vec{w}$.

5° $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, 当且仅当 $\vec{a} = \vec{0}$ 时等号成立.

这里特别指出, 连续的向量数量积并没有结合律, 即 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 一般是不成立的!

例 4.7. 证明: 平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和.

证明. 如图所示, 这等价于证明对于任意两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$.

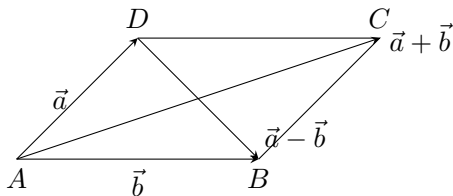


图 4.22:

根据向量数量积的运算法则, $L.H.S. = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$. $\square$

事实上, 因为向量的数量积满足结合律和分配律, 所以代数恒等式 $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ 加上向量箭头之后依然是成立的.

接下来我们介绍向量数量积的坐标表示. 设直角坐标系中的 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴方向上的单位向量. 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 将两个向量写成正交分解式并作点乘, 得到 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2\vec{i}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\vec{i} \cdot \vec{j} + y_1y_2\vec{j}^2$. 因为 $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, 所以交叉项消失, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

由模长公式可以得到向量模的坐标表示, 设 $\vec{v} = (x, y)$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

设向量 $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$, 这就是 $\vec{v}$ 所确定的单位向量.

由模长公式的坐标表示可推出平面内两点间的距离公式: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, A, B 之间的距离 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

另外, 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, 而 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, 即

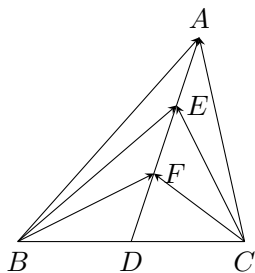
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

这个式子称为向量垂直的坐标表示.

例 4.8. (1) 设 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是平面单位向量, 且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$. $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, 求 $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

(2) 在三角形 ABC 中, 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 均有 $|\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{AC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

(3) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 和 F 是 AD 上的两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值为_____.



(4) 设平面向量 α, β 满足 $|\alpha + 2\beta| = 3$, $|2\alpha + 3\beta| = 4$, 则 $\alpha \cdot \beta$ 的范围是_____.

解. (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = \frac{53}{2}$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{19}$, $|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{37}$, 所以 $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\frac{53}{2}}{\sqrt{19} \times \sqrt{37}} = \frac{53\sqrt{703}}{1406}$.

(2) 选择 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 作为基底, 此时 $|\vec{AB} - t\vec{AC}| \geq |\vec{BC}|$, 等价于 $|\vec{AB} - t\vec{AC}|^2 \geq |\vec{AC} - \vec{AB}|^2$, 即 $|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 t^2 - 2t\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, 即 $(|\vec{AC}|^2)t^2 - (2\vec{AB} \cdot \vec{AC})t + \geq + (2\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AC}^2) \geq 0$ 对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立,

这等价于判别式 $\Delta \leq 0$, 为了简洁, 不妨记 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = E$, $\vec{AC}^2 = F$, 则 $\Delta = (4E)^2 - 4F^2(2E - F) = 4(E - F)^2 \leq 0$, 所以 $E - F = 0$, 即 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AC}$, 所以 $\vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = \vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$, 所以 $\vec{AC} \perp \vec{CB}$, 所以三角形 ABC 是直角三角形.

事实上, 我们也可以从几何意义上来考虑. 如图4.23所示, 设 $t\vec{AC} = \vec{AC}'$, 因为 t 是任意的实数, 所以 C' 是 AC 边所在直线上的任意一点. $|\vec{AB} - t\vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}'| = |\vec{C'B}|$, 即对于直线 AC 上的任意一点 C' , 都有 $|\vec{BC'}| \geq |\vec{BC}|$. 又因为直线外一点到直线上任意一点的距离中, 垂线段最短, 所以 $BC \perp AC$, 三角形 ABC 是直角三角形.

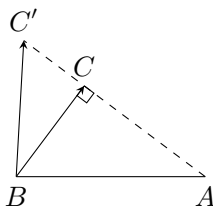


图 4.23:

(3) 选择 $\vec{BD}$ 和 $\vec{DF}$ 为平面的一组基底, 并记 $\vec{BD} = \vec{a}$, $\vec{DF} = \vec{b}$, 则 $\vec{BA} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{CA} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{BE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{CE} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BF} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{CF} = -\vec{a} + \vec{b}$.

所以 $\vec{BA} \cdot \vec{CA} = (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 3\vec{b}) = 9|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{BF} \cdot \vec{CF} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = -1$, 解得 $|\vec{a}|^2 = \frac{13}{8}$, $|\vec{b}|^2 = \frac{5}{8}$.

则 $\vec{BE} \cdot \vec{CE} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) = 4|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = \frac{7}{8}$.

(4) 记 $\alpha + 2\beta = \vec{a}$, $2\alpha + 3\beta = \vec{b}$, 并选取 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为平面的一组基底, 那么 $\alpha = 2\vec{b} - 3\vec{a}$, $\beta = 2\vec{a} - \vec{b}$, 所以 $\alpha \cdot \beta = (2\vec{b} - 3\vec{a}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 7\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 = 7|\vec{a}||\vec{b}| \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - 6|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 = 84 \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - 86$. 因为 $\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [-1, 1]$, 所以 $\alpha \cdot \beta \in [-170, -2]$. $\heartsuit$

平面向量的数量积以及模、夹角的概念也可以用来解决平面几何的问题, 下面我们介绍几个重要的定理.

定理 4.1.7 (极化恒等式). 已知线段 AB , M 是线段 AB 的中点, 那么对于线段 AB 外一点 P , 有:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}.$$

证明. 根据中点的向量公式, $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, 两边平方可得 $|\overrightarrow{PM}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})^2 = \frac{1}{4}[(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA})^2 + 4\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}] = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, 整理得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{4}$. $\square$

极化恒等式在某些情况下能够为数量积的计算提供一个较为直接的方案.

例 4.9. 已知矩形 $ABCD$ 中 $AB = 2$, $AD = 1$, P 在矩形 $ABCD$ 的边界上运动, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

解. 由极化恒等式 (定理4.1.7), $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - 1$, 其中 M 是 AB 的中点. 显然 $|\overrightarrow{PM}| \in [0, \sqrt{2}]$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-1, 1]$. $\heartsuit$

我们知道一个三角形中含有各种各样的几何量, 例如三边长、三个角的度数以及面积等, 它们之间存在确定的关系. 对于一般三角形, 我们在初中阶段已经定性地研究过了三角形的边角关系, 得到了判定三角形全等的方法: SSS, SAS, ASA, AAS. 这些判定方法表明, 给定三角形的三个角、三个边这六个元素中的某一些元素, 就可以唯一地确定一个三角形. 下面我们用向量方法研究这些元素的定量关系.

根据判定三角形全等的方法 SAS 可知, 给定两边和其夹角的三角形是唯一确定的, 那么用这两个边及其夹角来表示三角形的其他边和角的公式是什么?

观察: 设三角形 ABC 中, 三个角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 怎样用 a, b, C 来表示 c ?

定理 4.1.8 (余弦定理). 在三角形 ABC 中, 一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦值的积的两倍, 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

有了余弦定理, 我们可以从三角形的已知两边及其夹角直接按照上面的公式计算出第三边.

证明. 设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, 那么 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, 如图4.24所示.

所以 $|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

完全类似地, 可以证明 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$. $\square$

推论 4.1.8.1. 在三角形 ABC 中, 若已知三角形的三条边, 则有

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

根据三角形全等的判定 SSS 可知三边都确定的三角形能够被唯一地确定, 上面的公式可以在已知三角形三条边的情况下计算出三个角的大小.

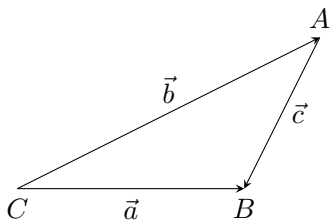


图 4.24:

已知三角形的六个元素 (三个角 A, B, C , 三个角所对的三条边 a, b, c) 中的一些元素求另一些元素的过程叫做**解三角形**, 在下一章中我们会进一步讨论解三角形的技巧和方法.

余弦定理及其推论为我们提供了已知两边及其夹角、已知三边直接解三角形的公式. 如果已知两角和一边 (AAS 和 ASA), 也能唯一地确定三角形, 那么这种情况下解三角形的公式是什么?

定理 4.1.9 (正弦定理). 在三角形 ABC 中, 各边和它所对角的正弦值的比相等, 即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

事实上, 这个比例恰等于三角形外接圆的直径. 说明如下: 作图 4.25, 根据同弧所对的圆周角大小相等, $A = \angle BPC$, 而在直角三角形 BPC 中 $a = |BC| = 2R \sin \angle PBC = 2R \sin A$, 其中 R 是外接圆半径, 即:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

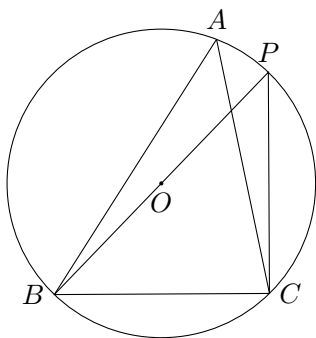


图 4.25:

正弦定理的详细证明从略.

正弦定理不仅可以解决已知两角一边解三角形的问题, 还可以解决已知两边及其对角解三角形的问题. 我们将在下一章具体地讨论这些问题.

定理 4.1.10 (中线长公式). 在 $\triangle ABC$ 中, 设 AM 是 BC 边上的中线. 如果 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 那么中线长 AM 可以按下式计算:

$$|AM|^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

这个公式被称为**中线长公式**. 对于另外两条边上的中线, 公式的形式完全类似.

证明. 根据极化恒等式 (定理4.1.7), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |AM|^2 - \frac{|BC|^2}{4}$, 所以 $|AM|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{|BC|^2}{4} = |AB| \cdot |AC| \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \frac{|BC|^2}{4} = bc \cos A + \frac{a^2}{4}$.

根据余弦定理的推论 (角化边, 推论4.1.8.1), $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 所以 $|AM|^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. $\square$

例 4.10. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 且 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle BAC$ 的值是_____.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 3, CA = 4$. O, G 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和重心, 求 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AG}$.

解. (1) 在三角形 ABC 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{4+1-7}{2 \times 2 \times 1} = -\frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) = -1$.

如图4.26所示, 因为 O 是外心, 所以 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影长度分别为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ 和 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, 根据数量积的几何意义可知

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 2, \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2}.$$

因为 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 等式两边分别与 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 点乘, 得:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda |\overrightarrow{AB}|^2 + \mu \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\lambda - \mu = 2, \\ \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \mu |\overrightarrow{AC}|^2 = -\lambda + \mu = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

解得 $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{8}{6}$, 所以 $\lambda + \mu = \frac{13}{6}$.

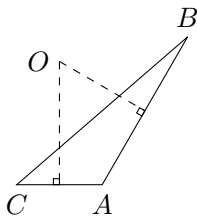


图 4.26:

(2) 不妨设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1, 由已知得 $2\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$, 两边平方得 $4 = 9 + 16 + 24\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, 解得 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{7}{8}$.

同理可得, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{11}{16}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}$.

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 = -\frac{7}{8} + \frac{11}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{16}$.

$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 + \frac{11}{8} = \frac{27}{8}$.

$$\text{所以 } \cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\frac{9}{16}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{27}{8}}} = \frac{1}{4}.$$

(3) 因为 O 是外心, 所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} |AC|^2$, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} |AB|^2$. 而因为 G 是重心, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}(|AB|^2 + |AC|^2) = \frac{10}{3}$.
♡

例 4.11. (1) 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = 1 : k : 3 (k \in \mathbb{Z}^+)$, 且 $\vec{b} - \vec{a} = 2(\vec{c} - \vec{b})$, 若 α 为 $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$ 的夹角, 则 $\cos \alpha =$ _____.

(2) 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 两个互相垂直的单位向量, 且 $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 1$, 则对任意的正实数 t , $|\vec{c} + t\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|$ 的最小值是_____.

(3) 已知 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{t}$, $|\overrightarrow{AC}| = t$, 如果点 P 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 那么 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值为 ().

(A) 13

(B) 15

(C) 19

(D) 21

解. (1) 选择 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$ 作为基底, 那么 $\mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$, 平方得 $|\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{9}|\mathbf{a}|^2 + \frac{4}{9}|\mathbf{c}|^2 + \frac{4}{9}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{9}|\mathbf{a}|^2 + \frac{4}{9}|\mathbf{c}|^2 + \frac{8}{9}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos \alpha$. 因为 $|\mathbf{a}| : |\mathbf{b}| : |\mathbf{c}| = 1 : k : 3$, 所以 $k^2 = \frac{1}{9} + 4 + \frac{4}{3}\cos \alpha$. 因为 $\cos \alpha \in [-1, 1]$, 所以 $k^2 \in [\frac{25}{9}, \frac{49}{9}]$, 又因为 $k \in \mathbb{Z}^+$, 所以满足条件的只有 $k = 2$, 此时 $\cos \alpha = -\frac{1}{12}$.

(2) 由题设, $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向上的投影长度均为 1, 数形结合可知 $|\vec{c}| = \sqrt{2}$, 从而 $|\vec{c} + t\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 + t^2|\vec{a}|^2 + \frac{1}{t^2}|\vec{b}|^2 + 2t\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{2}{t}\vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + t^2 + \frac{1}{t^2} + 2t + \frac{2}{t} = (t + \frac{1}{t})^2 + 2(t + \frac{1}{t})$. 根据对勾函数的性质, $t + \frac{1}{t}$ 的最小值为 2, 所以 $|\vec{c} + t\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|^2$ 的最小值为 8, 所以 $|\vec{c} + t\vec{a} + \frac{1}{t}\vec{b}|$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$.

(3) 以 A 为原点, 分别沿 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 方向为 x 轴和 y 轴的正方向建立平面直角坐标系, 则 $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{t}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, t)$, $\overrightarrow{AP} = (1, 4)$, 所以 $\overrightarrow{PB} = (\frac{1}{t} - 1, -4)$, $\overrightarrow{PC} = (-1, t - 4)$, 所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 1 - \frac{1}{t} + 16 - 4t = 17 - (4t + \frac{1}{t})$. 根据对勾函数的性质, $4t + \frac{1}{t}$ 的最小值为 4, 当且仅当 $t = 2$ 时取得最小值, 所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最大值为 13, 选择 A 项. ♡

4.1.4 三角不等式和柯西不等式

我们以向量为背景介绍两个重要的不等式: 三角不等式和柯西不等式.

回顾和向量的定义, 如图 4.4 所示, 根据三角形中两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边的事实, 不难验证下面的命题对于任意的两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都成立:

定理 4.1.11 (三角不等式). 对于任意的两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 都有:

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|;$$

用 $-\mathbf{b}$ 替换上式中的 $\mathbf{b}$, 可得:

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

或者写成

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

上述等号均在 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线时取得, 以不等式 $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ 为例, 当两者同向时取得右边的等号, 两者反向时取得左边的等号.

例 4.12. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 求函数 $z(x, y) = (x - y)^2 + (\frac{9}{x} - \sqrt{2 - y^2})^2$ 的最小值.

解. 不妨构造向量 $\mathbf{v} = (x, \frac{9}{x})$, $\mathbf{w} = (y, \sqrt{2 - y^2})$, 那么 $z(x, y) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2$. 根据三角不等式, $z(x, y) \geq ||\mathbf{v}| - |\mathbf{w}||^2 = (\sqrt{x^2 + (\frac{9}{x})^2} - \sqrt{2})^2$, 根据对勾函数的性质, $x^2 + (\frac{9}{x})^2 \geq 18$, 当且仅当 $x^2 = 9$ 时取得等号. 所以 $z(x, y) \geq (3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 8$.

下面考虑等号成立条件, 因为 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 是同向的, 不妨设 $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$, 其中 $\lambda > 0$, 此时

$$\begin{cases} x = my, \\ \frac{9}{x} = m\sqrt{2 - y^2}, \end{cases} \quad \text{注意到 } x > 0, \text{ 所以 } x = 3, \text{ 代入消去 } m \text{ 得 } \frac{y}{\sqrt{2 - y^2}} = 1, \text{ 解得 } y = 1, \text{ 因此}$$

当 $(x, y) = (3, 1)$ 时, z 取得最小值 8. ♡

设任意两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 两者的夹角为 $\theta \in [0, \pi]$, 根据向量的夹角公式, 我们有 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$, 再根据 $\cos \theta$ 的有界性可知, $-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \leq 1$, 即 $-|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$. 这是一个非常重要的不等式.

定理 4.1.12 (柯西不等式). 对于任意的两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 都有:

$$-|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

两个等号分别当 $\cos \theta = -1$ 和 $\cos \theta = 1$ 时取到, 即两个等号均在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 共线时取得, 其中左边的等号在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 反向时取得, 右边的等号在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 同向时取得.

考虑 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是平面向量的情况, 不妨设其坐标分别为 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 其中 x_1, x_2, y_1, y_2 是任意实数, 由此可得, 对于 $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$-\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

两个等号均在 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 时取到, 其中右边的等号在 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} > 0$ 时取得, 左边的等号在 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} < 0$ 时取得, 两种情况分别对应着向量同向和反向的情况. 这个不等式称为柯西不等式.

通过对柯西不等式取平方, 可得到下面的命题: 对于 $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2.$$

当且仅当 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 时, 等号成立. 这个命题也是柯西不等式的一个常用形式.

柯西不等式可以推广到 n 元情况, 考虑 n 维空间中的向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 可知对于 $\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 有

$$-\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

或

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \geq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立.

例 4.13. (1) 函数 $y = \sqrt{7-x} + \sqrt{9+x}$ 的最大值为_____.

(2) 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 20$, 则 $xy + 8x + y$ 的最大值为_____.

解. (1) 由柯西不等式, $\sqrt{7-x} + \sqrt{9+x} = 1 \times \sqrt{7-x} + 1 \times \sqrt{9+x} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{7-x})^2 + (\sqrt{9+x})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$.

当且仅当 $7-x = 9+x$ 即 $x = -1$ 时取得等号, 所以最大值为 $4\sqrt{2}$.

本题也可以三角换元求解, 过程留给读者.

(2) 考虑三维向量 $(x, 8, y)$ 和 $(y, x, 1)$, 根据柯西不等式:

$$xy + 8x + y = x \times y + 8 \times x + y \times 1 \leq \sqrt{x^2 + 8^2 + y^2} \sqrt{y^2 + x^2 + 1} = 42$$

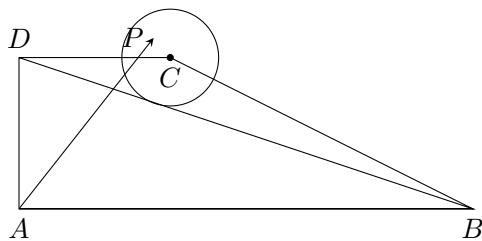
等号成立条件 $\frac{x}{y} = \frac{8}{x} = y$, 解出 $x = 4, y = 2$, 因此所求最大值是 42.

本题不宜做三角换元, 因为最终得到的三角函数处理起来相当复杂.

♡

习题 4.1

1. 设向量 $\vec{a}_1 = (1, 5), \vec{a}_2 = (4, -1), \vec{a}_3 = (2, 1), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是非负实数, $\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} = 1$, 则 $|\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3|$ 的最小值为_____.
2. 已知向量 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 垂直, 且 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 24$. 若 $t \in [0, 1]$, 则 $|t\vec{AB} - \vec{AO}| + |\frac{5}{12}\vec{BO} - (1-t)\vec{BA}|$ 的最小值为_____.
3. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 且 $\tan A = 2$, 若 $\vec{AO} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x + y$ 的最大值为_____.
4. 已知点 $A(1, -1), B(4, 0), C(2, 2)$. 平面区 D 由所有满足 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$ ($1 < \lambda \leq a, 1 < \mu \leq b$) 的点 $P(x, y)$ 组成的区域. 若区域 D 的面积为 8, 则 $a + b$ 的最小值为_____.
5. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \perp AD, AD = DC = 1, AB = 3$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与直线 BD 相切的圆内运动. $\vec{AP} = \alpha\vec{AD} + \beta\vec{AB} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, 则 $\alpha + \beta$ 的取值范围是_____.

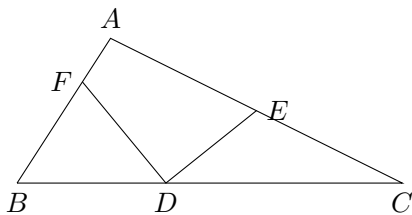


6. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一定点, 动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|})$, 其中 $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 点的轨迹为_____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边的中点, 动点 E 在线段 AD 上移动时, 若 $\vec{BE} = \lambda\vec{BA} + \mu\vec{BC}$, 则 $s = \lambda^2 + \mu$ 的最小值是_____.
8. 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\vec{PA} + \vec{PB} + \lambda\vec{PC} = \vec{0}, C = 120^\circ$, 则 $\lambda =$ _____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D , 且有 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB}$, 若 $AB = 8$, 则 $AD =$ _____.

10. 在正方形 $ABCD$ 中, M 是 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{BD}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别为 BC 、 CA 、 AB 上的点, 且 $CD = \frac{3}{5}BC$, $EC = \frac{1}{2}AC$, $AF = \frac{1}{3}AB$. 设 P 为四边形 $AEDF$ 内一点 (P 不在边界上), 若 $\overrightarrow{DP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + x\overrightarrow{DE}$, 则实数 x 的取值范围为_____.



12. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, PQ 过重心 G 且满足 $\overrightarrow{CP} = m\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CQ} = n\overrightarrow{CB}$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ _____.

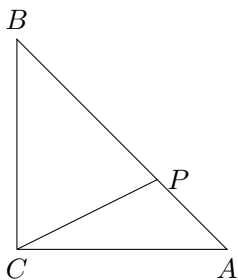
13. 设平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值为_____.

14. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $0 < \lambda < 1$, 若 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, 则 $|\vec{a} - \lambda\vec{b} - (1 - \lambda)\vec{c}|$ 所有取不到的值的集合为_____.

15. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} =$ _____.

16. 设 $|\overrightarrow{AB}| = 10$. 若平面上点 P 满足, 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 有 $|\overrightarrow{AP} - t\overrightarrow{AB}| \geq 3$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为_____, 此时 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| =$ _____.

17. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AC = BC = 2$, 点 P 是斜边 AB 上一点, 且 $BP = 2AP$, 则 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} =$ _____.



18. 在边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中, M 是 BC 的中点, N 是 AD 边上的一点, 且 $DN = 3NA$, 若对于常数 m , 在正方形 $ABCD$ 的边上恰有 6 个不同的点 P , 使 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = m$, 则实数 m 的取值范围_____.

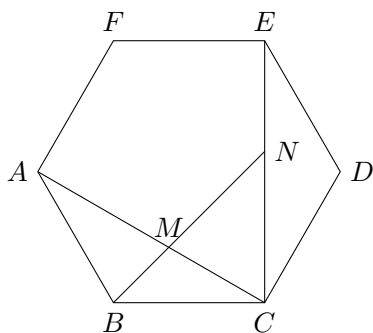
19. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是同一平面内的三个单位向量, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$ 的最大值是_____.

20. 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, 则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}) =$ _____.

21. 设平面向量 $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 满足 $|\vec{\alpha}|$ 、 $|\vec{\beta}|$ 、 $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \in [1, 3]$, 则 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ 的取值范围是_____.
22. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{13}$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.
23. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 4$, 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12$, 设 P 是平面 ABC 上的一点, 则 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$ 的最小值为_____.
24. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$, $\angle BAC = 30^\circ$, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点, 则 $\mu = \vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ 的最小值是_____.
25. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 3\vec{CA} \cdot \vec{AB}$, 则 $\frac{|\vec{AC}| + |\vec{AB}|}{|\vec{BC}|}$ 的最大值是_____.
26. 已知 MN 是边长为 $2\sqrt{6}$ 的等边 $\triangle ABC$ 的外接圆的一条动弦, $MN = 4$, P 为 $\triangle ABC$ 的边上动点, 则 $\vec{MP} \cdot \vec{PN}$ 的最大值为_____.
27. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 为边 BC 上的一点 (包括端点). 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$ 的取值范围是_____.
28. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 5$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1$, 则 $BC =$ _____.
29. 已知点 $P(-2, 5)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + F = 0$ 上, 直线 $l: 3x + 4y + 8 = 0$ 与圆 C 相交于 A 、 B 两点, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$ _____.
30. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 4$, P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上一点, 满足 $PA = 2$, $PC = \sqrt{21}$, 则 $\vec{PB} \cdot \vec{PD} =$ _____.
31. 设 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\vec{A_1A_3} = \lambda \vec{A_1A_2} (\lambda \in \mathbb{R})$, $\vec{A_1A_4} = \mu \vec{A_1A_2} (\mu \in \mathbb{R})$, 且 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 2$, 则称 A_3 、 A_4 调和分割 A_1 、 A_2 , 已知平面上的点 C 、 D 调和分割点 A 、 B , 则下面说法正确的是 ().
- (A) C 可能是线段 AB 的中点 (B) D 可能是线段 AB 的中点
- (C) C 、 D 可能同时在线段 AB 上 (D) C 、 D 不可能同时在线段 AB 的延长线上
32. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$, 向量 $\vec{c} - \vec{a}$ 、 $\vec{c} - \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 的最大值是_____.
33. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $|\vec{AB}| = \sqrt{3}$, $|\vec{BC}| = 1$, $|\vec{AC}| \cos B = |\vec{BC}| \cos A$. 则 $\vec{AC} \cdot \vec{AB} =$ _____.
34. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3\vec{BC}^2$, 则 $\triangle ABC$ 的最大角的余弦值为_____.
35. 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AB = 4$, $AD = DC = 2$, 设点 N 是 DC 边的中点, 点 M 是梯形 $ABCD$ 内或边界上的一个动点, 则 $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ 的最大值是_____.
36. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2\vec{AB} \cdot \vec{CB}$, 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, 则 $\tan B =$ _____.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.
38. 正 2017 边形 $A_1 A_2 \cdots A_{2017}$ 内接于单位圆 O , 任取它的两个不同的顶点 A_i, A_j , 则 $\overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} > \frac{1}{2}$ 的概率是_____.
39. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 4, AC = 3$, P 是边 BC 的垂直平分线上一点, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AP} =$ _____.
40. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, D 为 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$, $BC = 2\sqrt{6}$, 则 $AD =$ _____.
41. 已知 A, B, C 为 $\odot O$ 上三点, 且 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则数量积 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.
42. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 已知 $b^2 - 2b + c^2 = 0$, 那么 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的取值范围是_____.
43. 设 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, 则实数 λ 的取值范围是_____.
44. 设向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. 向量 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_7$ 中有 3 个为 $\vec{a}$, 其余为 $\vec{b}$; 向量 $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_7$ 中有 2 个为 $\vec{a}$, 其余为 $\vec{b}$. 则 $\sum_{i=1}^7 \vec{x}_i \cdot \vec{y}_i$ 的可能取值中最小的为_____.
45. 给定平面向量 $\vec{a} = (1, 1)$, 那么, 平面向量 $\vec{b} = (\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$ 是向量 $\vec{a}$ 经过_____时针旋转_____所得.
46. 设点 Q 在 $\triangle ABC$ 所在平面 α 内, 点 P 在平面 α 外. 若对任意的实数 x 和 y , $|\overrightarrow{AP} - x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC}| \geq |\overrightarrow{PQ}|$, 则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 所成的角 $\theta =$ _____.
47. 已知向量 $\overrightarrow{AP} = (1, \sqrt{3}), \overrightarrow{PB} = (-\sqrt{3}, 1)$, 则向量 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角等于_____.
48. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = 2 : k : 3 (k \in \mathbb{N}^*)$, 且 $\vec{b} - \vec{a} = 2(\vec{c} - \vec{b})$, 若 α 为 $\vec{a}, \vec{c}$ 的夹角, 则 $\cos \alpha$ 的值为_____.
49. 已知向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量, 且 $(3\vec{\alpha} - \vec{\gamma}) \cdot (4\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0$, 则 $|\vec{\gamma}|$ 的最大值是_____.
50. 正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$, 其所在平面内的两个动点 P, M 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MB}$, 则 $|\overrightarrow{CM}|$ 的最小值为_____.
51. 设 P_1, P_2 是平面上的两点, P_{2k+1} 是 P_{2k} 关于 P_1 的对称点, P_{2k+2} 是 P_{2k+1} 关于 P_2 的对称点, $k \in \mathbb{N}^*$, 若 $|P_1 P_2| = 1$, 则 $P_{2013} P_{2014} =$ _____.
52. 设点 O 为三角形 ABC 内一点, 且满足关系式 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, 则 $\frac{S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} + 3S_{\triangle COA}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____.
53. 设 H 是 $\triangle ABC$ 垂心, 且 $3\overrightarrow{HA} + 4\overrightarrow{HB} + 5\overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$, 则 $\cos \angle AHB =$ _____.

54. 设 O 点在 $\triangle ABC$ 内部, 且有 $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积与的 $\triangle AOC$ 面积的比为_____.
55. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 且满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 设 $\triangle PBC$, $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ 的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 则 $S_1 : S_2 : S_3 =$ _____.
56. 已知点 P, Q 在 $\triangle ABC$ 内, 且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 5\overrightarrow{QC} = \mathbf{0}$, 则 $\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}$ 等于_____.
57. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \mathbf{0}$, 则角 $C =$ _____.
58. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PC}$, $\tan C = \frac{12}{5}$, 则实数 λ 的值为_____.
59. 给定平面上四点 O, A, B, C , 满足 $OA = 4, OB = 3, OC = 2, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$, 则 $\triangle ABC$ 面积最大值为_____.
60. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 且 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 则 $\cos \angle BAC$ 的值是_____.
61. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 若 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, 则 $\triangle APQ$ 的面积是_____.
62. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \mathbf{0}$, 则角 C 的大小为_____.
63. 已知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $5\overrightarrow{IA} = 4(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$. 记 R, r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆半径, 若 $r = 15$, 则 $R =$ _____.
64. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$. 则 $\frac{(\tan A + \tan B) \tan C}{\tan A \cdot \tan B} =$ _____.
65. 如图, M, N 分别为正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC, CE 的内分点, 且 $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda$, 若 B, M, N 三点共线, 则 $\lambda =$ _____.



66. 已知点 P 在 $Rt\triangle ABC$ 所在平面内, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAP$ 为锐角, $|\overrightarrow{AP}| = 2$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$. 当 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}|$ 取得最小值时, $\tan \angle CAP =$ _____.
67. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 且满足 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, 则 $\angle ACB =$ _____.
68. 若平面上四点 A, B, C, D , 满足任意三点不共线, 且 $4\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$, 则 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____.

4.2

复数

4.2.1 数系的扩充, 复数的模与共轭

考虑求解实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ 的问题, 根据求根公式:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

当 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 时, x_1 和 x_2 不一定是实数, 因为 $b^2 - 4ac$ 可能是负的实数, 这时方程在实数集内是无解的. 从方程的角度看, 负实数能不能开平方, 就是方程 $x^2 + a = 0, a > 0$ 有没有解, 进而归结为方程 $x^2 + 1 = 0$ 有没有解.

回顾已有的数集扩充过程, 为了解决 $x^2 = 2$ 这样的方程在有理数集中无解的问题, 人们将有理数集扩充到了实数集, 数集扩充后, 在实数集中规定了加法、乘法的运算 (在实数集中只有加法和乘法是本质的运算), 与原来在有理数集中规定的运算协调一致, 并且加法、乘法都满足交换律和结合律, 乘法对加法满足分配律.

依照这样的思想, 为了解决方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数系中无解的问题, 我们设想引入一个新的数 i , 使得 $x = i$ 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解. 即使得 $i = \sqrt{-1}$ 或 $i^2 = -1$.

回到二次方程问题上来, 在固定 a, b 的情况下, $b^2 - 4ac$ 总是可以取到任何实数, 依照根式的运算法则, $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ 可以取到任意的形如 iq 的数, 其中 $q \in \mathbb{R}$, 进一步地, $x_{1,2}$ 可以取到所有形如 $p + iq$ 的数.

我们考虑 $p + iq$ 的产生过程, 它可以看成是实数 q 与 i 相乘 (结果记作 qi 或 iq), 再把实数 p 与 qi 相加, 结果记作 $p + qi$, 注意到所有的实数和 i 本身都可以写成 $p + qi (p, q \in \mathbb{R})$ 的形式, 从而这些数都在扩充的新数集中.

我们把形如 $a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 的数称为**复数**, 其中 i 称为虚数单位. 全体复数所构成的集合 $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ 叫做复数集. 由于任意一个实系数二次方程的根 $x_{1,2}$ 可以取到所有形如 $p + iq$ 的数, 所以任意一个二次方程在复数集内都有解. 在本书中如无特殊说明, 以后 $z = a + bi$ 默认有 $a, b \in \mathbb{R}$.

复数常用字母 z 表示, 即 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. 其中实数 a 和 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**, 分别记作 $\operatorname{Re} z$ 和 $\operatorname{Im} z$, 即 $\operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b$. 特别地, 当且仅当 $b = 0$ 时, 复数 z 是实数, 当且仅当 $a = b = 0$ 时, 复数 z 是实数 0 , 当 $b \neq 0$ 时, 它叫做**虚数**, 当 $b \neq 0$ 且 $a = 0$ 时, 它叫做**纯虚数**. 因此, 复数集 $\mathbb{C}$ 包括了所有的实数, 即 $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$. 对于数系的扩充可以总结如下:

$$\text{复数} \begin{cases} \text{实数: } b = 0 \\ \text{虚数: } b \neq 0 \end{cases} \begin{cases} \text{纯虚数: } a = 0 \\ \text{虚数: } a \neq 0 \end{cases}$$

回顾关于实数的讨论, 为了描述实数的“数量”属性, 我们定义出了实数 x 的绝对值 $|x|$, 之所以这样的定义能够代表实数的数量属性, 是因为我们在直观上认为: 数量应该由非负数确定, 而且只有零代表零数量; 将一个数乘一个倍数, 它的数量也应该乘这个倍数; 由于数的方向属性, 两个

数的和的数量, 不应该超过它们的数量的和. 即对于 $x, y, k \in \mathbb{R}$, 有如下结论:

$$|x| \geq 0 \text{ 且 } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; |kx| = |k||x|; |x+y| \leq |x| + |y|.$$

我们希望复数也具有类似的属性, 为此, 对复数 $z = a + bi$, 定义:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$|z|$ 称为复数 z 的**模**, 直观地说, 就是将全体复数看成全体平面向量, 则复数的模就是对于平面向量的模. 因为任何一个复数 $z = a + bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一地确定下来, 并且任给一个复数也能够唯一确定一个有序实数对. 又因为有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点也是一一对应的, 所以复数集可以和平面直角坐标系中的点集之间建立一一对应. 由此可知复数 $z_1 = a_1 + b_1i$ 和 $z_2 = a_2 + b_2i$ 相等等价于它们所对应的有序实数对相同, 这进一步等价于 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$, 即**复数相等的充要条件是实部和虚部分别相等**.

如图4.27所示, 点 $Z(a, b)$, 则点 Z 可以代表复数 $z = a + bi$, 我们将用来表示复数的这样的平面叫做**复平面**, 其 x 轴称为**实轴**, y 轴称为**虚轴**. 显然实轴上的点与实数一一对应, 虚轴上的点 (除原点外) 与纯虚数一一对应.

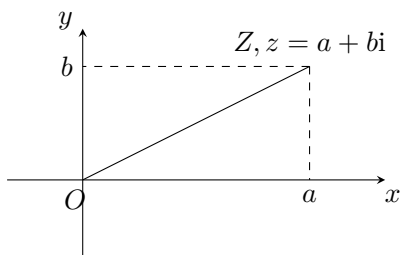


图 4.27: 复平面

又因为平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 与点 Z 是一一对应的, 所以复数 $z = a + bi$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间也可建立一一对应. 根据平面向量的知识可以很直观地看到复数模也具有如下性质, 对于 $z, w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$:

$$|z| \geq 0 \text{ 且 } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; |kz| = |k||z|; |z+w| \leq |z| + |w|.$$

特别地, 如果 $b = 0$, 那么 $z = a + bi$ 是一个实数 a , 它的模就是 a 的绝对值 $|a|$.

这里的第二条性质是可以推广的, 即 $|zw| = |z||w|$, 复数的模长之积等于积之模长. 我们将在介绍复数的运算之后进一步地讨论这一结论.

一般地, 当两个复数是实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为**共轭复数**. 虚部不等于 0 的两个共轭复数, 也叫做共轭虚数. 复数 z 的共轭用 $\bar{z}$ 表示, 即: 如果 $z = a + bi$, 那么 $\bar{z} = a - bi$.

例 4.14. (1) 已知复数 z 满足 $z + |z| = 3 + i$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设三个复数 $1, i, z$ 在复平面上对应的三点共线, 且 $|z| = 5$, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. (1) 设 $z = a + bi$, 则 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 由复数相等的充要条件得
$$\begin{cases} b = 1, \\ a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$a = \frac{4}{3}$, 所以 $z = \frac{4}{3} + i$.

(2) 设 $z = x + yi$, 则 $\overrightarrow{OZ} = (x, y)$. 而 1 和 i 所对应的平面向量分别为 $\vec{v} = (1, 0)$ 和 $\vec{w} = (0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{OZ} = x\vec{v} + y\vec{w}$. 由三点共线定理可知 $x + y = 1$, 又因为 $|z| = 5$, 所以 $x^2 + y^2 = 5$, 由以上两式解得 $x = 4, y = -3$ 或 $x = -3, y = 4$, 所以 $z = 4 - 3i$ 或 $z = -3 + 4i$. $\heartsuit$

4.2.2 复数的运算

上一小节中, 我们将实数集扩充到了复数集, 引入新的数集后就要研究其中数的运算. 下面讨论复数集中的运算问题.

我们规定复数的加法法则如下: 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ 是任意的两个复数, 那么它们的和为

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

两个复数相加类似于多项式相加合并同类项, 也类似于向量的线性运算.

容易看出复数的加法具有交换律和结合律.

在引入了复平面之后, 我们还可以考虑复数加法的几何意义, 设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别和 z_1 和 z_2 对应, 即 $\overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d)$, 由向量加法的坐标表示, 得

$$\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = (a + c, b + d).$$

$\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的和向量就是 $z_1 + z_2$ 所对应的向量, 这就是复数加法的几何意义, 如图4.28所示.

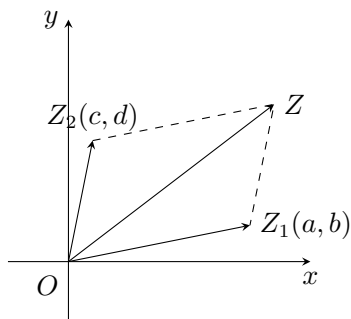


图 4.28: 复数加法的几何意义

我们用 $-z_2$ 替换 z_2 , 可得到复数减法的运算法则:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

复数减法是复数加法的逆运算. 类比复数加法的几何意义, 读者可以自己得出复数减法的几何意义.

我们规定复数的乘法法则如下:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

可以看出, 两个复数相乘类似于两个多项式相乘, 只要在所得的结果中把 i^2 换成 -1 , 并将实部和虚部分别合并即可.

容易得到复数的乘法具有交换律和结合律, 复数乘法对加法具有分配律:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3, z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

由复数乘法的运算法则, 容易验证复数的整数幂运算具备以往熟知的运算律:

$$z_1^{m+n} = z_1^m z_1^n, (z_1^m)^n = z_1^{mn}, (z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m.$$

当初引入复数的一种动机是研究二次方程, 某些实系数二次方程的解不是实数, 此时的解是两个具有相等实部和相反虚部的复数. 事实上, 在很多场合会要求沟通实数与复数. 共轭复数似乎就是为了解决这个问题而生的, 设 $z = a + bi$, 那么 $z + \bar{z} = 2a$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$. 可见, 任何一个复数 z 和其共轭 $\bar{z}$ 的和与积都是实数. 这也直观地解释了实系数二次方程根与系数的关系, 毕竟二次方程的解伴随着因式分解 $x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2 = (x - z_1)(x - z_2)$, 其中 z_1 和 z_2 是二次方程的两个根, 它们互为共轭复数, $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是实数.

将共轭复数的概念结合复数的模, 还可得到,

$$|z| = |\bar{z}|.$$

结合复数乘积的模等于复数模之乘积, 有

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

这两个结论是可以互相印证的.

另外, 根据复数乘积的模等于复数模之乘积, 设 $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$, 则有

$$|z^n| = |z|^n.$$

这是一个并不很直观, 却非常优美的性质.

最后讨论复数的除法运算 $\frac{z_1}{z_2}$ (除数 z_2 不为 0), 为此实际上只需构造出复数 z_2 的倒数 $z_2^{-1} = \frac{1}{c + di}$, 我们将分子分母同时乘以 z_2 的共轭复数 $c - di$, 得;

$$z_2^{-1} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}.$$

这里相当于分子分母都乘了分母的“实数化因式”, 从而使分母“实数化”, 这完全类似于我们在处理含二次根式的分式时, 常常使分子和分母同时乘以有理化因式, 从而使得分子或分母有理化.

$$\text{所以 } \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

即复数的除法法则是:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

在进行复数除法运算中, 通过同时乘以共轭复数使得分母实数化是一个常用的技巧.

我们可以发现一个现象, 随机的一个一元多项式, 在复数集内最终都可以分解成 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 个 (包括重复的因式) 一次因式的乘积, 且 n 就是这个多项式的次数. 事实上, 在数学中有如下定理:

定理 4.2.1 (代数基本定理). 任何一个 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次复系数多项式方程 $p_n(x) = 0$ 至少有一个复数根.

证明代数基本定理的方法有很多,但每种证明方法都涉及高等数学知识,有兴趣的同学可以查阅相关资料².

由代数基本定理立刻得到:

推论 4.2.1.1. 任何一个 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次复系数多项式 $p_n(x) = 0$ 在复数集内可以分解为 n 个一次因式的乘积. 进而,一元 n 次多项式方程由 n 个复数根(重根按重数计).

证明留给读者.

尽管一元 n 次多项式方程有 n 个复数根,但是人们业已证明一元五次及以上的方程不存在一般的求根公式.

我们从代数基本定理出发,看一看实系数一元多项式方程根与系数的关系,对于二次方程我们已经非常熟悉,所以这里以三次方程为例.

设实系数一元三次方程

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 (a_3 \neq 0)$$

在复数集内的根为 x_1, x_2, x_3 , 根据推论4.2.1.1, 方程可以变形为

$$a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

展开得

$$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - a_3x_1x_2x_3 = 0.$$

比较系数, 可得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

这个结论有时称为**三次方程韦达定理**, 常见的情况是讨论实系数三次方程, 对于系数是复数的情况, 根与系数的上述关系当然也是成立的.

例 4.15. (1) 设复数 z 满足 $|z - i| = 2$, 则 $|z - \bar{z}|$ 的最大值为_____. (i 为虚数单位, $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数)

(2) 满足 $(a + bi)^6 = a - bi$ (其中 $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$) 的有序数组 (a, b) 的组数是_____.

(3) 设复数 z 满足 $\frac{2017z - 25}{z - 2017} = 3 + 4i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模长 $|z| =$ _____.

解. (1) 设 $z = a + bi$, 则它所对应的平面上的点为 (a, b) , 根据向量的加减运算的几何意义, $|z - i| = 2$ 等价于 $|\vec{OZ} - \vec{OA}| = |\vec{AZ}| = 2$, 其中 $A(0, 1)$, 即 Z 在以 $(0, 1)$ 为圆心 2 为半径的圆上. 因为 $|z - \bar{z}| = |a + bi - a + bi| = |2bi| = 2b$, 数形结合可知当 Z 在 $(0, 3)$ 时 b 取得最大值 3, 此时 $2b$ 取得最大值 6. ♡

²知乎专栏 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/33784895> 提供了很多种证明方法, 笔者也看不太懂, 有兴趣的同学可以去看看.

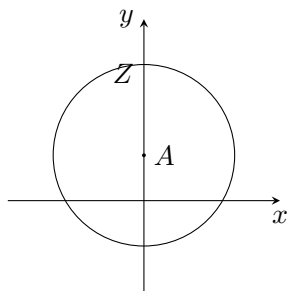


图 4.29:

评注 4.15.1. 结合平面向量, 许多复数的加减运算都具有几何意义, 例如: $|z - z_0| = r$, 表示 Z 的轨迹为 Z_0 为圆心, r 为半径的圆, $|z - z_1| = |z - z_2|$, 表示 Z 的轨迹是线段 Z_1Z_2 的垂直平分线, 等等.

(2) 令 $a + bi = z$, 则 $z^6 = \bar{z}$, 两边同时取模长, 根据模长之积等于积之模长, 以及复数与其共轭模相等可知, $|z|^6 = |\bar{z}| = |z|$, 所以 $|z| = 0$ 或 $|z| = 1$. 如果 $|z| = 0$, 则 $z = 0$ 即 $a = b = 0$, 显然 $(0, 0)$ 符合条件.

如果 $|z| = 1$, 由 $z^6 = \bar{z}$ 可知 $z^7 = z\bar{z}$, 又因为 $z\bar{z} = |z|^2$, 所以 $z^7 = |z|^2 = 1$.

这是一个关于 z 的七次方程, 注意到它有 7 个不同的复数解 (即七次单位根, 见下一小节), 所以有 7 对不同的 (a, b) 符号条件.

所以, 一共有 8 对有序实数对满足条件.

(3) 设 $w = 3 + 4i$, 那么 $z = \frac{2017w - 25}{w - 2017} = \frac{2017w - w\bar{w}}{w - 2017} = -\frac{2017 - w}{2017 - \bar{w}}w$, 注意到 $-\frac{2017 - w}{2017 - \bar{w}} = 1$, 所以 $z = w$, 所以 $|z| = |w| = 5$.

4.2.3 复数的三角表示

前面讨论复数的运算时主要围绕着实部和虚部, 我们设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 并且探讨了复数的加法和乘法问题, 还说明了复数加减法的几何意义, 但是, 在这样的表示下, 计算 z 的正整数次幂 $z^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 将是一个非常麻烦的问题. 目前我们只知道 $|z^n| = |z|^n$, 这或许能够为该问题提供一个思路, 然而依然不能彻底地解决问题, 因为这样只是计算了 z^n 的模, 却对求出 z 具体是什么复数无能为力. 我们知道复数与复平面中的二维向量 $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$ 是一一对应的, 而确定一个向量需要

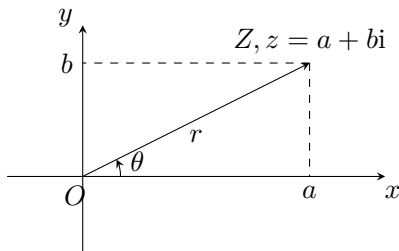


图 4.30:

两个要素: 大小和方向, 那么我们能否借助这两个要素来表示复数呢? 向量的大小可以用模长来刻

画, 那么向量的方向如何刻画呢? 由图4.30, 容易想到我们可以借助以 x 轴的非负半轴为始边, 以向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线为终边的角 θ 来确定方向. 根据前面的讨论, 对于计算 z^n 的模, 我们已经有了比较好的办法, 由此可见, 要想求出 z^n 具体是什么复数, 关键在于“方向”的确定, θ 角的引入或许能够为问题的解决提供有力的帮助.

利用三角函数, 我们可以用 θ 和 $|z|$ 来表示复数 z . 由三角函数的定义可知, 在图4.30中, 有

$$\begin{cases} a = r \cos \theta, \\ b = r \sin \theta, \end{cases} \quad \text{其中 } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ 当 } Z \text{ 落在了实轴或虚轴上时, } \theta \text{ 是轴线角, 显然结论也成立.}$$

这样, 我们就用刻画长度的模 r 和刻画方向的角 θ 表示出了复数 z .

一般地, 对于任意一个复数 z , 都可以表示成

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

其中 $r = |z| = |\overrightarrow{OZ}|$, θ 是以 x 轴的非负半轴为始边, $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线为终边的角. 我们称 θ 为复数 z 的**辐角**, 将 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 称为复数 z 的**三角表示**, 区别于三角表示, 我们称 $a + bi$ 为复数的**代数表示**. 一个不为零的复数可以有很多辐角, 且这些角之间相差 2π 的整数倍, 例如复数 i 的辐角是 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 其中 k 可以取任何整数. 如果我们规定 $\theta \in [0, 2\pi)$, 那么这时每个方向上的复数只对应一个辐角, 在这种约定下, 每个复数和每个表示是一一对应的. 我们把在 $[0, 2\pi)$ 范围内的 θ 值叫做**辐角的主值**, 通常记作 $\arg z$, 其中 $z \in \mathbb{C}, 0 \leq \arg z < 2\pi$, 例如 $\arg 1 = 0$, $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$.

复数的三角表示和代数表示可以互化, 我们可以根据需要灵活选择表示形式, 复数的代数表示有利于做加法运算, 复数的三角表示有利于做乘法运算, 而且在复数的三角表示下复数的乘除法具有几何意义.

设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, 根据三角恒等变形公式,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

这就是说, 两个复数相乘, 积的模等于各复数的模之积, 积的辐角等于各复数的辐角之和. 简单记忆为“**模长相乘, 辐角相加**”.

把两个复数 z_1 和 z_2 相乘时, 可以设想如图4.31那样, 先分别画出 z_1 和 z_2 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$, 然后, 将向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 逆时针旋转 θ_2 , 再把它的模变为原来的 r_2 倍得到向量 $\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{OZ}$ 表示的就是复数的积 $z_1 z_2$.

复数的除法运算是乘法运算的逆运算, 设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, 且 $z_1 \neq z_2$, 根据复数乘法的三角表示“模长相乘, 辐角相加”可知:

$$r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdot \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

所以 $z_1 z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$, 由此我们得到复数的除法法则:

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

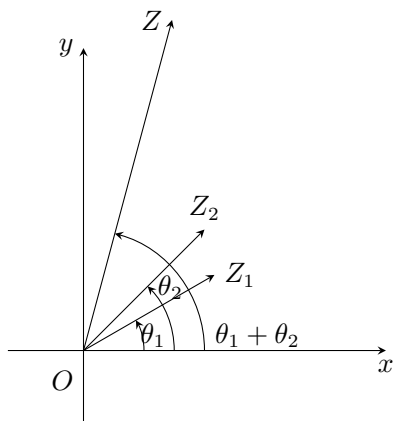


图 4.31: 复数乘法的几何意义

这就是说, 两个复数相除, 商的模等于被除数的模除以除数的模, 商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角, 简单记忆为“**模长相除, 辐角相减**”.

类比复数乘法的几何意义, 可以得出复数除法的几何意义, 它对应顺时针旋转.

有了复数的三角表示, 便可以对本节开头提出的问题作出回答, 复数的三角表示的确能够大大简化复数的幂运算. 针对 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($\theta \in [0, 2\pi)$) 的正整数幂 z^n , 归纳可得

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

这是说一个复数的 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 次幂的模等于这个复数模的 n 次幂, 它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍. 可见, 这种进行复数幂运算的方案确实相当简洁.

作为乘方运算的逆运算, 我们还可以定义开方运算. 例如我们对复数 $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi)$) 开 n 次方根 ($n \in \mathbb{N}^*$), 设结果为 $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, 那么我们有:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

因为相等的复数辐角可以相差 2π 的整数倍, 比较可知,
$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
 . 又根据三角函数的周期性, 满足 $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ 的只有 n 个 φ 角, 由此, 我们指出存在 n 个不同的复数:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \text{ 其中 } k = 0, 1, \dots, n-1$$

这 n 个不同的复数都是 w 的 n 次方根.

通常情况下, $\sqrt[n]{w}$ 或 $w^{\frac{1}{n}}$ 指的是 z_0 , 我们将 z_0 称为 n 次**算术方根**. 进一步地, 可以定义复数的有理数幂 $w^{\frac{m}{n}} = w^m w^{\frac{1}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$), 而无理数可以用一串有理数列来逼近, 所以也可以据此定义出复数的实数幂. 按照以上规定, 正数的 n 次算术方根都是正数, 而负数的 n 次算术方根则一定不是实数.

我们将 1 的 n 次方根称为 n 次**单位根**, 换言之, 方程 $x^n - 1 = 0 (n \in \mathbb{Z})$ 有 n 个不同的复数根, 它们分别是 $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. 从几何意义上来看, n 次单位根 ε_k 所对应的点 Z_k 恰好将单位圆的圆周 n 等分, 且 Z_0 恰为单位圆与实轴正半轴的交点, 如图 4.32 所示.

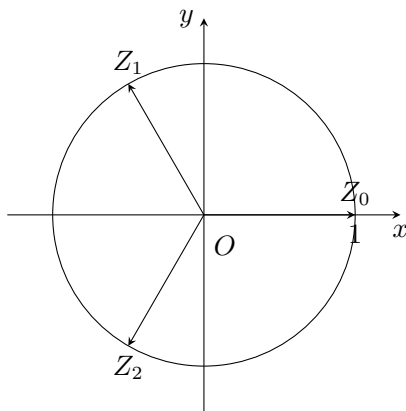


图 4.32: 三次单位根

容易验证, n 次单位根具有以下性质:

- 1° $(z_k)^n = 1, |z_k| = 1$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;
 2° $z_k = \overline{z_{n-k}}$;
 3° $1 + z_k + z_k^2 + \dots + z_k^{n-1} = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

例 4.16. 已知 $\omega = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, 则 ().

- (A) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$
 (B) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$
 (C) $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$
 (D) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$

解. 观察选项的结构, 注意 $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^9$ 是 $x^{10} - 1 = 0$ 的单位根, 由代数基本定理

$$x^{10} - 1 = (x - 1)(x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3) \cdots (x - \omega^9).$$

另外, 又注意到 $1, \omega^2, \omega^4, \omega^6, \omega^8$ 是 $x^5 - 1 = 0$ 的单位根, 同理得到

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \omega^2)(x - \omega^4)(x - \omega^6)(x - \omega^8).$$

结合 $\omega^5 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, 将上面两个式子相比得

$$x^5 + 1 = (x - \omega)(x - \omega^3)(x + 1)(x - \omega^7)(x - \omega^9)$$

所以 $(x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^7)(x - \omega^9) = \frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, 所以选择 B 项. ♡

最后, 我们将复数的幂推广至复数次, 为此, 需要先了解复指数幂该如何计算. 对于 $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

上面的公式称为**欧拉公式**. 特别地, 当 $\theta = \pi$ 时, 我们有恒等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$. 这是一个非常神秘, 却美妙得令人称绝的公式. 欧拉 (Leonhard Euler) 最初通过幂级数观察出了欧拉公式, 关于欧拉公式, 目前有非常多的直观解释和验证推导的方法, 在这里我们不作介绍, 有兴趣的同学可以参考脚注里的这篇文章³.

这样, 向量的三角表示也可以写成**指数形式**: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$.

从指数表示可以看出, 如果 $z_1 = z_1(r_1, \theta_1)$, $z_2 = z_2(r_2, \theta_2)$, 根据指数的运算可知 $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$.

欧拉公式向我们解释了如何计算复指数幂, 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

由此确定了一个**复指数函数** $z \mapsto e^z$, 如果规定 $x \in \mathbb{R}, y \in [0, 2\pi)$, 根据之前的讨论它是一一对应, 因此存在反函数. 我们定义其反函数为**复对数函数** $z \mapsto \ln z$. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 自然有 $z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$, 这与实的指数函数和对数函数的性质是一致的.

习题 4.2

1. 满足使 $I = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i)^n$ 为纯虚数的最小正整数 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知复数 $z = \frac{4 + \sqrt{2}i}{1 - i}$, i 为虚数单位, 则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 复数 $z = (1 + i)^2(2 + i)$ 的虚部是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 a, b 均为实数, 复数 $z_1 = \sqrt{3}a - 1 + (\sqrt{3} - b)i$ 与 $z_2 = 2 - \sqrt{3}a + bi$ 的模长相等, 且 $z_1 \bar{z}_2$ 为纯虚数, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设 a, b, c 和 d 为复数, 若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质 “对任意 $x, y \in S$ 必有 $xy \in S$ ”, 则当 $a = 1, b^2 = 1, c^2 = b$ 时, $b + c + d$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设复数 $z = 3 \cos \theta + (2 \sin \theta)i$, 则函数 $y = \theta - \arg z (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 复数 z 满足 $|z| = 5$, 且 $(3 + 4i)z$ 是纯虚数, 则 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 已知互异的复数 m, n 满足 $mn \neq 0$, 集合 $\{m^2, n^2\} = \{m, n\}$, 则 $m + n = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 已知复数 $z = a + i (a \in \mathbb{R})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 且 $|z \cdot (1 + i)| > 2$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 已知虚数 z 满足 $z^3 + 1 = 0$, 则 $(\frac{z}{z-1})^{2018} + (\frac{1}{z-1})^{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 已知 $(a + bi)^2 = 3 + 4i$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, i 是虚数单位, 则 $a^2 + b^2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 设 i 为虚数单位, a 和 b 为正整数, 且 $|(a + i)(2 + i)| = |\frac{b - i}{2 - i}|$, 则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

³<https://www.zhihu.com/question/41134540/answer/112430787>, 第一个高赞回答.

13. 设复数 z 满足 $|z| = 1$, i 是虚数单位, 则 $|(z+i) + i(7-z)|$ 的取值范围是_____.
14. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z^3 - 3z - 2|$ 的最大值为_____.
15. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = 20$, $|z_1^2 + z_2^2| = 16$, 则 $|z_1^3 + z_2^3|$ 的最小值是_____.
16. 已知复数 $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, 其中 i 是虚数单位, 则 $z^3 + z^2 =$ _____.
17. 设 i 是虚数单位, 化简 $(i+1)^{2016} + (i-1)^{2016} =$ _____.
18. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z^3 + 3z + 2i|$ 的最大值为_____.
19. 若 i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, 则 z^{2016} 的值是_____.
20. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$. 求 $u = |z^3 - 3z + 2|$ 的最大值.
21. 若复数 z 满足 $|z| < 1$ 且 $|\bar{z} + \frac{1}{z}| = \frac{5}{2}$, 则 $|z| =$ _____.
22. 设复数 $z = \cos \frac{4}{7}\pi + i \sin \frac{4}{7}\pi$. 则 $|\frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z^6}|$ 的值为_____ (用数字作答).
23. 若 $a = 1+i$, $b = 2+i$, $c = 3+i$, $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, 则 $|a + bx + cx^2|$ 的值是_____.
24. 若复数 z 满足 $|z - \bar{z}| = 2\sqrt{3}$, 且 $\frac{z}{(\bar{z})^2}$ 是实数, 则 $|z| =$ _____.
25. 若非零复数 x 满足 $x + \frac{1}{x} = 1$, 则 $x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}} =$ _____.
26. 已知 $z_n = (1+i)(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}) \cdots (1 + \frac{i}{\sqrt{n}})$, ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $|z_{2014} - z_{2015}|$ 的值为_____.
27. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 复数 $z = a + 4i$, 且 $\frac{z}{z+b} = 4i$, 则 $b =$ _____.
28. 若 $z \in \mathbb{C}$ 且 $|z + 2 - 2i| = 1$, 则 $|z - 2 - 2i|$ 的最小值是_____.
29. 若复数 z 满足 $|z - 1| + |z - 3 - 2i| = 2\sqrt{2}$, 则 $|z|$ 的最小值为_____.
30. 已知复数 z 满足 $w = z + \frac{1}{z}$ 为实数, 且 $-1 < w < 2$, $u = \frac{1-z}{1+z}$, 那么 $|w - u^2|$ 的最小值是_____.
31. 设 z_1, z_2 为复数, 且满足 $|z_1| = 5$, $\frac{z_1}{z_2} = 2 + i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z_1 - z_2|$ 取值为_____.
32. 已知复数 z_1, z_2, z_3 使得 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$, 则 $|z_3|$ 的最小值是_____.
33. 在复平面内, 复数 z_1, z_2, z_3 的对应点分别为 Z_1, Z_2, Z_3 . 若 $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 0$, $|z_1 + z_2 - z_3| = 1$, 则 $|z_3|$ 的取值范围是_____.
34. 复数 z 满足 $|z + \frac{1}{z}| \leq 2$, 则 $|z|$ 的取值范围是_____.
35. 已知复数 z_1, z_2 , 且 $|z_1| = 2|z_2| = 2$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{7}$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的值为_____.

第五章 解三角形

凡三斜术，皆以最长者为大斜，其次为中斜，其次为小斜。

——秦九韶、郁松年《数书九章》

上一讲介绍了两个重要定理：余弦定理和正弦定理. 在这两个定理的基础上来求解三角形中六个元素 (三个角 A, B, C , 三个角所对的边 a, b, c) 以及三角形的度量值 (周长, 面积) 等的过程叫做解三角形.

我们约定用符号 p 来表示三角形 ABC 的半周长, 即 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 三角形的周长 $2p = a+b+c$.

在初中课程中, 读者已经学过了三角形中边的关系和角的关系, 在此回顾如下:

边的关系: $a+b > c$, $a-b < c$, 即三角形中任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 这等价于三角形的两个较短边之和大于最长边, 而最长边与任意一边作差都小于第三边.

角的关系: 在三角形 ABC 中, $A+B+C = \pi$.

而正弦定理和余弦定理则刻画了三角形中的边角关系.

这一讲的内容主要是技巧性和方法性的, 涉及到的新概念、新理论较少. 对读者而言, 更重要的是通过多做练习, 来掌握解三角形的基本方法.

5.1

正弦定理和余弦定理的应用

例 5.1 (证明“大边对大角”和“大角对大边”). 证明: 在 $\triangle ABC$ 中: $a > b \Leftrightarrow A > B$.

解. (1) 先证明充分性: 因为 $a > b$, 根据正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 因为 $A \in (0, \pi), B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A > 0, \sin B > 0$, 所以 $\sin A > \sin B$. 因为在三角形 ABC 中 $A+B+C = \pi$, 所以三角形中至多有一个直角或钝角.

如果 A 和 B 都是锐角, 因为 $\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 递增, 所以 $A > B$, 结论成立;

如果 A 是直角或钝角, 则 B 只能是锐角, 此时 $A > B$ 仍然成立;

如果 A 是锐角, 而 B 是直角或钝角, 假设此时有 $\sin A > \sin B$, 那么 $\sin A > \sin B = \sin(\pi - B)$. 因为 B 是直角或钝角, 所以 $\pi - B \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 又因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 递增, 所以 $A > \pi - B$, 此时 $A+B > \pi$, 这不可能, 因此如果 $\sin A > \sin B$, 那么 A 是锐角, 而 B 是直角或钝角不可能成立. 综上所述, $a > b \Rightarrow A > B$.

(2) 再证明必要性, 因为 $A > B$ 且 $A + B + C = \pi$, 所以 $0 < B < A < \pi - B < \pi$.

当 $A < \frac{\pi}{2}$ 时, 因为 $\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 递增, 所以 $0 < B < A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin A > \sin B$;

当 $A \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 因为 $\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ 递减, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq A < \pi - B < \pi \Rightarrow \sin A > \sin(\pi - B) = \sin B$, 综上所述 $A > B \Rightarrow \sin A > \sin B$. 根据正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $a > b$. 综上所述, $A > B \Rightarrow a > b$. $\heartsuit$

评注 5.1.1. 大角对大边, 小角对小边, 等角对等边说明的是如下事实: 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\sin A > \sin B \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow a > b, \sin A = \sin B \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow a = b.$$

这个是一个非常重要的结论, 该结论今后可以直接使用.

例 5.2. (1) 已知 A, B, C 是三角形 ABC 的三个内角, 条件 $P: A = B$; 条件 $Q: \sin A = \sin B$, 那么 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的 _____ 条件.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A < B < C$ ” 是 “ $\cos 2A > \cos 2B > \cos 2C$ ” 的 _____ 条件.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 满足 $\sin A - \cos B + A + B < \frac{\pi}{2}$, 则下面结论一定正确的是 (). (提示: $y = x + \sin x$ 是增函数)

(A) $\sin A < \cos C$ (B) $\sin A > \cos B$ (C) $\sin B < \cos A$ (D) $\sin C < \sin B$

解. (1) 根据例5.1的结论可知, P 是 Q 的充要条件, 根据原命题与逆否命题真值相同可知 $\neg P$ 是 $\neg Q$ 的充要条件.

(2) 因为 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$, $\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B$, $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C$, 且 $\sin A, \sin B, \sin C > 0$, 所以 $\cos 2A > \cos 2B > \cos 2C$ 等价于 $\sin A < \sin B < \sin C$, 根据例5.1的结论, $\sin A < \sin B < \sin C$ 等价于 $A < B < C$, 所以 $A < B < C \Leftrightarrow \cos 2A > \cos 2B > \cos 2C$.

(3) 原不等式整理得 $\sin A + A < \cos B + \frac{\pi}{2} - B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \frac{\pi}{2} - B$, 因为 $y = x + \sin x$ 是增函数, 所以 $A < \frac{\pi}{2} - B$, 所以 $B < \frac{\pi}{2} - A$, 又因为 $0 < B < \pi$, 所以 $0 < B < \frac{\pi}{2} - A < \frac{\pi}{2}$, 注意到 $y = \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递增, 所以 $\sin B < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$, 所以 C 项正确. 根据题目中的条件无法推出其他三个选项, 所以选 C 项. $\heartsuit$

例 5.3 (已知两边及一边的对角, 能唯一确定一个三角形吗). (1) 在三角形 ABC 中, 已知 a, b 和 A , 求 B .

(2) 在三角形 ABC 中, 已知 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{4}$, 求 C .

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 如果 $a = \sqrt{2}, b = 2, \sin B + \cos B = \sqrt{2}$, 求角 A .

解. 我们在初中课程中就学过, “SSA” 型的条件不能判定三角形全等, 原因是 “SSA” 型的条件不总是能唯一地确定一个三角形. 在学习了正弦定理之后, 就可以从本质上解释这个问题.

由正弦定理可知, $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$, 而 B 的范围是 $(0, \pi - A)$, 在这个区间上 $\sin x$ 不一定是单调的, 所以 $\sin B$ 可能对应不止一个 B 的值.

当 $A \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin B$ 在区间 $(0, \pi - A)$ 是单调的, 所以我们可以唯一地确定角 B , 即三角形 ABC 有唯一解. 这时因为 $A \geq \frac{\pi}{2} > B$, 所以 $a > b$.

当 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 时, 如图5.1所示, 数形结合可知:

当 $\sin B = 1$ 或 $\sin B \leq \sin A$ 时, 关于 B 的方程 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ 有唯一解 (函数值 $\sin B$ 对应唯一的角 B), 即三角形 ABC 有唯一解, 此时 $a = b \sin A$ 或 $a \geq b$.

当 $\sin A < \sin B < 1$ 时, 关于 B 的方程 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ 有两解 (函数值 $\sin B$ 对应两个不同的角 B), 即三角形 ABC 有两解, 此时 $b \sin A < a < b$.

综上所述, 当 $a = b \sin A$ 时, 三角形 ABC 有唯一解; 当 $b \sin A < a < b$ 时, 三角形 ABC 有两解; 当 $a \geq b$ 时, 三角形 ABC 有唯一解. 这个结论可以从图5.2上直观地看到. ♡

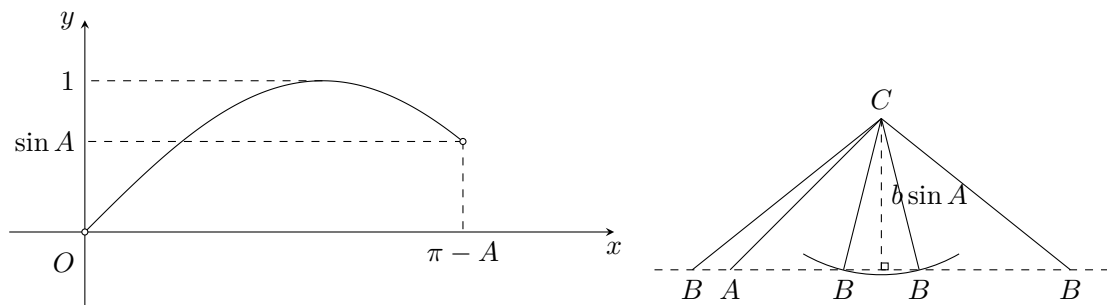


图 5.2:

图 5.1:

$$(2) \text{ 由正弦定理, } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $a < b$, 所以 $A < B$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $B = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $C = \frac{5\pi}{12}$ 或 $C = \frac{\pi}{12}$.

评注 5.3.1. 第二小问所给的条件正是“SSA”型, 事实上, 在本题中 $b \sin A = \frac{\sqrt{6}}{2} < a < b$, 所以这里 B 有两解. 在具体问题中, 遇到“SSA”型条件一定要根据“大边对大角”来确定角的关系, 从而避免造成多解或漏解.

(3) $\sin B + \cos B = \sqrt{2} \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 即 $\sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, 所以 $B + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$. 所给的条件是“SSA”型, 由正弦定理, $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{1}{2}$, 因为 $a < b$, 所以 $A < B$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

评注 5.3.2. 初学者在解答本题时, 容易忽略大边对大角的隐含条件而造成多解 $A = \frac{\pi}{6}$ 或 $A = \frac{5\pi}{6}$.

例 5.4 (如何利用正弦定理进行边角互化). (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $c \cos B = 12$, $b \sin C = 5$, 求 c .

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 且 $2R(\sin^2 A - \sin^2 C) = (\sqrt{2}a - b) \sin B$, 其中 a 和 b 分别是 A 和 B 的对边, 求角 C 的大小.

(3) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且满足 $a \cos B - b \cos A = \frac{4}{5}c$, 求 $\frac{\tan A}{\tan B}$.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a+c}$, 求角 B 的大小.

解. (1) 题给的两个条件看似无法直接建立联系, 考虑利用正弦定理进行转化. 由正弦定理可知 $b \sin C = c \sin B$, 所以 $c \sin B = 5$, 又因为 $c \cos B = 12$, 所以 $\tan B = \frac{5}{12}$. 又因为 $B \in (0, \pi)$, 所

以 $\sin B = \frac{5}{13}, \cos B = \frac{12}{13}$, 所以 $c = \frac{12}{\cos B} = 13$.

(2) 由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, 所以 $2R \sin C = c, 2R \sin A = a$, 所以条件等价于 $a \sin A - c \sin C = (\sqrt{2}a - b) \sin B$, 利用正弦定理角化边, 得 $a^2 - c^2 = (\sqrt{2}a - b)b$, 整理得 $c^2 = b^2 + a^2 - \sqrt{2}ab$, 由余弦定理可知 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$.

评注 5.4.1. 本题希望提醒读者正弦定理可以用于边角互化, 即 $a = 2R \sin A$, 其中 R 是外接圆的半径.

另外, 如果等式两边关于边或角的正弦值是齐次式, 根据正弦定理, 我们可以直接将边变成相应的正弦值, 或将正弦值变成相应的边, 而等式依然成立; 同理, 如果分式的分子分母关于边或角的正弦值是齐次式, 我们也可以将分子和分母中的边变成相应的正弦值, 或将正弦值变成相应的边, 而分式的值不变. 例如在本题中, 我们将 $a \sin A - c \sin C = (\sqrt{2}a - b) \sin B$ 直接改成了 $a^2 - c^2 = (\sqrt{2}a - b)b$. 这个技巧可以实现边角互化, 在解答解三角形问题中会常常用到.

(3) 由正弦定理, $\sin A \cos B - \cos B \sin A = \frac{4}{5} \sin C$, 而 $\sin C = \sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, 所以 $\sin A \cos B - \cos B \sin A = \frac{4}{5} \sin A \cos B + \frac{4}{5} \sin B \cos A$, 所以 $\sin A \cos B = 9 \sin B \cos A$, 所以 $\tan A = 9 \tan B$, 所以 $\frac{\tan A}{\tan B} = 9$.

评注 5.4.2. 在三角形 ABC 中, $\sin C = \sin(A + B), \cos C = -\cos(A + B), \tan C = -\tan(A + B) (C \neq \frac{\pi}{2})$.

如果三角形 ABC 不是直角三角形, 那么我们有 $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$.

(4) $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a + c} = \frac{-\sin B}{2 \sin A + \sin C}$, 所以 $2 \sin A \cos B + \sin C \cos B = -\sin B \cos C$, 所以 $2 \sin A \cos B + \sin C \cos B + \sin B \cos C = 2 \sin A \cos B + \sin A = 0$, 因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $2 \cos B + 1 = 0$, 所以 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$. $\heartsuit$

例 5.5 (与正切相关的一组问题). (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{2 \cos B} = \frac{c}{3 \cos C}$, 则 $\angle A$ 的大小为_____.

(2) $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的所对边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 = 2019c^2$, 则 $\frac{\cot C}{\cot A + \cot B} =$ _____.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A + \sin^2 C = 2018 \sin^2 B$, 则 $\frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A + \tan B + \tan C} =$ _____.

(4) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c . 已知 $5 \cos B = \frac{5b \cos A + 4c}{a}$, 求 $\frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}) \tan B}$ 的值.

解. (1) 因为 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{2 \cos B} = \frac{c}{3 \cos C}$, 所以 $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{2 \cos B} = \frac{\sin C}{3 \cos C}$, 即 $\tan A = \frac{1}{2} \tan B = \frac{1}{3} \tan C$, 不妨设 $\tan A = \frac{1}{2} \tan B = \frac{1}{3} \tan C = \lambda$, 则 $\tan A = \lambda, \tan B = 2\lambda, \tan C = 3\lambda$. 因为在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$, 所以 $6\lambda^3 = 6\lambda$, 因为 $\lambda > 0$, 所以 $\lambda = 1$, 又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$.

(2) 切化弦, 并由正弦定理和余弦定理进行边角互化:

$$\begin{aligned}
& \frac{\cot C}{\cot A + \cot B} = \frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}} = \frac{\cos C \sin A \sin B}{\sin C(\sin B \cos A + \cos B \sin A)} = \frac{\cos C \sin A \sin B}{\sin^2 C} \\
& = \frac{ab}{c^2} \cos C = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c^2} = \frac{2019c^2 - c^2}{2c^2} = 1009. \\
& (3) \text{ 因为 } \sin^2 A + \sin^2 C = 2018 \sin^2 B, \text{ 由正弦定理得 } a^2 + c^2 = 2018b^2. \\
& \frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A + \tan B + \tan C} = \frac{(\tan A + \tan C) \tan^2 B}{\tan A \tan B + \tan B \tan C} \\
& = \frac{\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A}{\sin A \sin B \tan C} = \frac{\sin B(\sin C \cos A + \cos C \sin A)}{\sin A \sin C} = \frac{\sin^2 B}{\cos B \sin A \sin C} \\
& = \frac{b^2}{ac \cos B} = \frac{b^2}{ac} \cdot \frac{\sin A \sin C \cos B}{2ac} = \frac{2b^2}{2b^2} = \frac{2018b^2 - b^2}{2018b^2 - b^2} = \frac{2}{2017}.
\end{aligned}$$

评注 5.5.1. 第 (3) 问中, 分式的分子是正切的三次齐次式, 而分母是正切的一次式, 因此考虑利用三角形中正切值的关系将分母改写成三次式, 从而将分式变形为齐次分式, 然后切化弦与正弦定理和余弦定理建立联系.

(4) 由正弦定理边化角, 得 $5 \cos B = \frac{5 \sin B \cos A + 4 \sin C}{\sin A}$, 即 $5 \sin A \cos B = 5 \sin B \cos A + 4 \sin C$, 即 $\sin A \cos B = 9 \sin B \cos A$, 所以 $\tan A = 9 \tan B$.

通过三角恒等变形, 以 $\tan A$ 和 $\tan B$ 为主元来表示待求的式子. $\frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}) \tan B} = \frac{\frac{1+\cos A}{2} \tan \frac{A}{2}}{\cos A \tan B} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} \cdot \frac{1 + \cos A}{2 \cos A \tan B} = \frac{\tan A}{2 \tan B} = \frac{9}{2}$. $\heartsuit$

例 5.6 (如何利用余弦定理进行边角互化). (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 设内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c . 条件 $p: B + C = 2A$, 且 $b + c = 2a$; 条件 $q: \triangle ABC$ 是正三角形, 则 p 是 q 的_____条件.
(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 且 $a^\pi + b^\pi = c^\pi$ (π 是圆周率), 则 $\triangle ABC$ 为 () 三角形.

(A) 锐角 (B) 直角 (C) 钝角 (D) 以上都有可能

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AC = \sqrt{2}$, $AB = 2$, 且 $\frac{\sqrt{3} \sin A + \cos A}{\sqrt{3} \cos A - \sin A} = \tan \frac{5\pi}{12}$, 则 $BC =$ _____.

解. (1) 如果条件 q 成立, 那么条件 p 显然成立.

如果条件 p 成立, 因为 $B + C = \pi - A = 2A$, 所以 $\cos(\pi - A) = \cos 2A$, 即 $-\cos A = 2 \cos^2 A - 1$, 解得 $\cos A = -1$ 舍去 或 $\cos A = \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. 由余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$, 又因为 $a^2 = [\frac{1}{2}(b+c)]^2 = \frac{1}{4}(b+c)^2 = b^2 + c^2 - bc$, 整理得 $(b-c)^2 = 0$, 所以 $b = c$, 所以 $\triangle ABC$ 是正三角形, 条件 q 成立.

所以, 条件 p 是条件 q 的充分必要条件.

(2) 因为 $a^\pi + b^\pi = c^\pi$, 所以 $a < c, b < c$, 根据大边对大角可知 $\triangle ABC$ 中角 C 是最大的, 因此只需判断出 $\cos C$ 的符号即可.

由余弦定理, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. 因为 $c^{\pi-2}a^2 + c^{\pi-2}b^2 > a^{\pi-2}a^2 + b^{\pi-2}b^2 = a^\pi + b^\pi = c^\pi = c^{\pi-2}c^2$, 所以 $a^2 + b^2 > c^2$, 所以 $\cos C > 0$, $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

(3) 由辅助角公式, $\frac{\sqrt{3} \sin A + \cos A}{\sqrt{3} \cos A - \sin A} = \frac{2 \sin(A + \frac{\pi}{6})}{2 \cos(A + \frac{\pi}{6})} = \tan(A + \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{5\pi}{12})$, 所以 $A + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{5}{12}, k \in \mathbb{Z}$. 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, 所以 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$.

由余弦定理, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{2 + 4 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$. $\heartsuit$

例 5.7 (求最值或范围). (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 设内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , 且 $2a \cos A = b \cos C + c \cos B$, $b + c = 4$, 求 a 的最小值.

(2) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \sin A}{3 \sin C}$, $\sqrt{3} \sin B + \cos B = 2$, 则 $a + c$ 的取值范围是_____.

(3) 已知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\cos A = \frac{7}{8}$, 若 $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 求 $x + y$ 的最大值.

(4) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(a^2 + b^2 - c^2) \cdot (a \cos B + b \cos A) = abc$, 若 $a + b = 2$, 求 c 的范围.

解. (1) 由正弦定理, $2 \sin A \cos A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A$, 因为 $\sin A > 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$. 由余弦定理, $a^2 = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A) = 16 - 3bc \geq 16 - 3 \times \frac{(b + c)^2}{4} = 4$, 当且仅当 $b = c = 2$ 时等号成立, 所以 a 的最小值是 2.

评注 5.7.1. 事实上, 在三角形 ABC 中, $b \cos A + a \cos B = c$, $c \sin A + a \sin C = b$, $b \cos C + c \cos B = a$.

另外, 由余弦定理可知 $(b + c)^2 = a^2 + 2bc(1 + \cos A)$, 这个结论建立了 $b + c$ 和 bc 之间的关系, 有时可以用来计算两边之和或两边之积.

(2) 因为 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \sin A}{3 \sin C}$, 由正弦定理和余弦定理得 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2abc} = \frac{2\sqrt{3}a}{3c}$, 所以 $\frac{2a^2}{2abc} = \frac{a}{bc} = \frac{2\sqrt{3}a}{3c}$, 解得 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\sqrt{3} \sin B + \cos B = 2 \sin(B + \frac{\pi}{6}) = 2$, 且 $B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, 所以 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$.

有正弦定理可知, $a = \frac{b}{\sin B} \sin A = \sin A$, $c = \frac{b}{\sin B} \sin C = \sin C$, 所以 $a + c = \sin A + \sin C = \sin A + \sin(\pi - \frac{\pi}{3} - C) = \sin C + \sin(\frac{2\pi}{3} - A) = \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A = \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \sqrt{3} \sin(A + \frac{\pi}{6})$.

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 所以相位的范围 $A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, 所以 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, 所以 $a + b$ 的范围是 $(\frac{3}{2}, \sqrt{3}]$.

(3) 因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 所以对于平面内任意一点 P , 有 $\overrightarrow{PI} = \frac{a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}}{a + b + c}$, 把点 P 取成点 A , 则 $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{AC}$, 由平面向量基本定理可知, $x = \frac{b}{a + b + c}$, $y = \frac{c}{a + b + c}$, 所以 $x + y = \frac{b + c}{a + b + c} = \frac{1}{\frac{a}{b + c} + 1}$.

由余弦定理, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{7}{4}bc}$, 所以 $\frac{a}{b + c} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{7}{4}bc}}{b + c}$, 这是一个齐次分式, 考虑以商变量 $\frac{b}{c}$ 为主元, 分离常数得 $\frac{a}{b + c} = \sqrt{1 - \frac{15}{4(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 2)}}$, 因为 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, 当且仅当 $b = c$ 时等号成立, 所以 $\frac{a}{b + c} \geq \frac{1}{4}$, 所以 $x + y \leq \frac{4}{5}$, 当且仅当 $b = c$ 时等号成立. 即 $x + y$ 的最大值是 $\frac{4}{5}$.

(4) 由余弦定理得, $2ab \cos C(a \cos B + b \cos A) = abc$, 因为 $a \cos B + b \cos A = c$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$, 因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

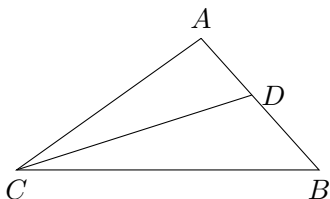
由正弦定理得 $c = \frac{a + b}{\sin A + \sin B} \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sin A + \sin(\frac{2\pi}{3} - A)} = \frac{1}{\sin(A + \frac{\pi}{6})}$.

因为 $A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 所以相位 $A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 所以 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $c \in [1, 2)$. $\heartsuit$

评注 5.7.2. 在解答解三角形中的求最值问题时, 可以或者说更应该使用不等式来求解; 解答求范围问题时, 则不适合使用不等式, 而应当通过边角互化构造三角函数, 并依照求函数值域的流程来求解范围.

例 5.8. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 且 $b^2 - c^2 = ac$, 则 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$ 的取值范围是_____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 2B$, $AB = \frac{7}{3}$, $BC = 4$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , 求 AD 的长.



解. (1) 由余弦定理得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$, 又因为 $b^2 = c^2 + ac$, 所以 $c^2 - 2ac \cos B = ac$, 即 $a = c - 2a \cos B$, 由正弦定理得 $\sin A = \sin C - 2 \sin A \cos B = \sin A \cos B + \cos A \sin B - 2 \sin A \cos B = \cos A \sin B - \sin A \cos B$, 所以 $\tan A = \sin B - \tan A \cos B$, 即 $\tan A = \frac{\sin B}{1 + \cos B} = \tan \frac{B}{2}$, 又因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $A = \frac{B}{2}$, 即 $B = 2A$.

以 $\tan A$ 为主元, 因为 $\pi - 3A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$, 所以 $\tan A \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$. $\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan 2A} = \frac{1}{\tan A} - \frac{1 - \tan^2 A}{2 \tan A} = \frac{1}{2}(\tan A + \frac{1}{\tan A})$. 由对勾函数的性质可知 $\tan A + \frac{1}{\tan A} \in (2, \frac{4\sqrt{3}}{3})$, 所以 $\frac{1}{\tan A} - \frac{1}{\tan B} \in (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

评注 5.8.1. 事实上, 在三角形 ABC 中 $b^2 = c(a + c)$ 等价于 $B = 2A$, 其充分性的证明在第 (1) 小问中已经给出, 其必要性的证明如下:

因为 $B = 2A$, 所以 $\sin B = \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \sin A \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 由正弦定理得 $b = a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$, 整理得 $b^2 c = ab^2 + ac^2 - a^3$, 进一步得到 $b^2(c - a) = a(a + c)(c - a)$.

若 $c = a$, 那么 $A = C$, 又因为 $B = 2A$, $A + B + C = \pi$, 所以 $A = C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{2}$, 此时 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $b^2 = c(a + c)$ 显然成立;

若 $c \neq a$, 那么 $b^2 = a(a + c)$ 成立.

综上所述, $b^2 = c(a + c)$ 等价于 $B = 2A$.

(2) 由 $A = 2B$ 可得 $a^2 - b^2 = bc$, 因为 $c = \frac{7}{3}$, $a = 4$, 所以 $b = 3$.

事实上这是一个解母子三角形的问题, 在三角形 ACD 和 BCD 中分别使用正弦定理, 可得

$$\frac{\sin \angle ACD}{AD} = \frac{\sin \angle ADC}{b}, \frac{\sin \angle BCD}{BD} = \frac{\sin \angle BDC}{a}$$

因为 $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC + \angle BDC = \pi$, 所以 $\sin \angle ACD = \sin \angle BCD$, $\sin \angle ADC = \sin \angle BDC$, 所以 $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 又因为 $AD + BD = c = \frac{7}{3}$, 所以 $AD = 1$. $\heartsuit$

习题 5.1

1. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{3 \cos B}{b} = \frac{4 \cos C}{c}$, 则 $\tan A =$ _____.
2. 若 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $b^2 = ac$, 则 $\frac{\sin A \cot C + \cos A}{\sin B \cot C + \cos B}$ 的取值范围是_____.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A = 120^\circ$, $AB = 5$, $BC = 7$. 则 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值为_____.
4. 设直角三角形的三边依次为 a, b, c (c 为斜边), 周长为 6. 则 c 的最小值为_____.
5. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $A - C = \frac{\pi}{2}$, a, b, c 满足 $a + c = 2b$, 则 $\cos B =$ _____.
6. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $ac = b^2$, 边 a, b, c 所对的角依次为 A, B, C , 且 $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \cos 2B = 1$, 则角 B 为_____.
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $1 + \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{2c}{b}$, 则角 A 的大小为_____.
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $a = 2, b = 3, C = 2A$, 则 $\cos C =$ _____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1, BC = 2$. 则 $\angle C$ 的取值范围是_____.
10. 已知一个角大于 120° 的三角形的三边长分别为 $m, m + 1, m + 2$, 则实数 m 的取值范围是_____.
11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\angle C = \frac{5\pi}{12}$, $AC = 2\sqrt{6}$, AC 的中点为 D . 若长度为 3 的线段 PQ (P 在 Q 的左侧) 在直线 BC 上滑动, 则 $AP + DQ$ 的最小值为 =_____.
12. 已知三边为连续自然数的三角形的最大角是最小角的两倍, 则该三角形的周长为_____.
13. 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $BG \perp CG, BC = \sqrt{2}$ 则 $AB + AC$ 的最大值为_____.
14. 设正实数 a, b, c 满足
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3, \\ a^2 + c^2 + ac = 4, \\ b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc = 7, \end{cases}$$
 , 求 a, b, c 的值.
15. 已知是 x, y, z 正数, 且满足
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3, \\ y^2 + z^2 + yz = 4, \\ z^2 + x^2 + zx = 7, \end{cases}$$
 , 求 $x + y + z$.

5.2

解三角形的综合应用

在这一节中主要讨论三角形中的一些几何度量值的计算, 并举例说明综合应用解三角形的技巧解决较复杂的问题的方法, 以及解三角形在实际问题中的应用.

5.2.1 求三角形的面积

除了我们熟知的三角形面积公式

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \text{ 其中 } h_a \text{ 表示边 } a \text{ 上的高}$$

以外, 计算三角形的面积还有更灵活更多样的方法.

如果我们已知三角形的两边 b, c 即其夹角 A , 那么

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

在很多情况下我们都会选择按这个公式计算三角形的面积.

如果我们已知三角形的内切圆半径 r , 那么 $S = pr$, 其中 p 是 $\triangle ABC$ 的半周长.

如果我们已知三角形的外接圆半径 R , 由正弦定理 $\sin A = \frac{a}{2R}$, 所以 $S = \frac{abc}{4R}$. 另外, 由正弦定理得 $b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$, 所以 $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

如果我们只知道三角形的三条边, 除先根据余弦定理计算出一个角, 再按 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 计算外, 还可以用**海伦-秦九韶公式**直接计算.

我国宋代的数学家秦九韶提出了计算三角形面积的“三斜求积术”, 其叙述如下: “以小斜幂, 并大斜幂, 减中斜幂, 余半之, 自乘于上; 以小斜幂乘大斜幂, 减上, 余四约之, 为实, 一为从隅, 开平方得积.”¹

秦九韶把三角形的三条边分别称为小斜、中斜和大斜, 把这段文字写成公式, 就是

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2]}.$$

这就是**秦九韶公式**. 秦九韶公式的正确性是容易验证的, 只需在式 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 中利用余弦定理将角化成边即可, 过程如下:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2(1 - \cos^2 A)]} = \sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2 - b^2c^2(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2]} \end{aligned}$$

而**海伦公式**的形式如下:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

经过简单的变形可知海伦公式和秦九韶公式是完全等价的:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c-a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

作为补充, 海伦公式有一个推广形式. 设 $ABCD$ 是圆内接四边形, 其内角 A, B, C, D 所对的边分别为 a, b, c, d , 其半周长为 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, 那么其面积可以按以下公式计算:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

¹引自网络.

这个公式相传最初由婆罗摩笈多 (Brahmagupta) 在公元 7 世纪初的一部论及天文的著作中给出. 如果我们认为点 C 和点 D 重合, 那么可认为 $d = 0$, 此时圆内接四边形退化成三角形, 婆罗摩笈多公式的形式也变成了海伦公式.

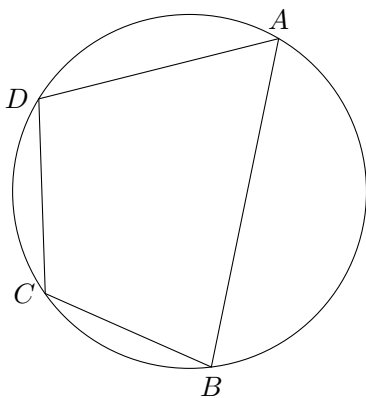


图 5.3: 圆内接四边形

例 5.9. (1) 已知 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{8}$, 内切圆半径 $r = 2\sqrt{3}$, 则这个三角形的面积是_____.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三个内角是 A, B, C . 若 BC 边中点为 M , 证明: $\cot \angle BAM = 2 \cot A + \cot B$.

(3) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2}$, 且三角形 ABC 的面积 S 满足 $1 \leq S \leq 2$, 那么下列各式一定成立的是 ().

(A) $bc(b+c) > 8$

(B) $ab(a+c) > 16\sqrt{2}$

(C) $6 \leq abc \leq 12$

(D) $12 \leq abc \leq 24$

解. (1) 因为 $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{8}$, 所以不妨设 $AB = 5x, AC = 8x (x > 0)$, 由余弦定理得

$$BC = \sqrt{25x^2 + 64x^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}x^2} = 7x$$

由三角形面积公式:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = pr$$

代入得

$$10\sqrt{3}x^2 = 20\sqrt{3}x$$

解得 $x = 2$, 所以 $S = 20\sqrt{3}x = 40\sqrt{3}$.

(2) 注意 $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$, 其中 S 是 $\triangle ABC$ 的面积, 同理可得 $\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, 这样 $R.H.S = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{4S}$.

在 $\triangle BAM$ 中再次利用以上事实得

$$\cot \angle BAM = \frac{BA^2 + AM^2 - BM^2}{4S_{\triangle BAM}} = \frac{c^2 + AM^2 - \frac{a^2}{4}}{2S}$$

由中线长公式 $|AM|^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$,

所以

$$L.H.S = \cot \angle BAM = \frac{c^2 + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}}{2S} = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{4S} = R.H.S$$

证毕.

(3) 因为 $\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2}$, 所以
 $\sin 2A + \sin(A - B + C) - \sin(C - A - B) = \frac{1}{2}$,

差化积, 得

$$\sin 2A + 2 \cos(C - B) \sin A = \frac{1}{2}$$

由二倍角公式

$$2 \sin A \cos A + 2 \sin A \cos(C - B) = 2 \sin A [\cos A + \cos(C - B)] = 2 \sin A [\cos(C - B) - \cos(C + B)] = \frac{1}{2}$$

再次差化积, 得

$$4 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8}$$

由三角形面积公式, $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \in [1, 2]$, 所以 $R \in [2, 2\sqrt{2}]$.

再由三角形面积公式, $S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{4}R^2$, 所以 $abc = R^3 \in [8, 16\sqrt{2}]$, 所以 C, D 均不一定成立.

因为 $b + c > a$, 所以 $bc(b + c) > abc \geq 8$, 所以 A 一定成立.

而 $ab(a + c) = a^2b + abc = (1 + \frac{\sin B}{\sin C})R^3$, 显然 B 不一定成立. 因此选择 A 项. ♡

例 5.10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3 \sin A}$.

(1) 求 $\sin B \sin C$;

(2) 若 $6 \cos B \cos C = 1, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

解. (1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{a^2}{3 \sin A}$, 化简得 $\frac{1}{2}c \sin B = \frac{a}{3 \sin A}$, 由正弦定理 $\frac{1}{2} \sin B \sin C = \frac{\sin A}{3 \sin A} = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin B \sin C = \frac{2}{3}$.

(2) 由题设及 (1) 知 $\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\cos A = -\cos(B + C) = \frac{1}{2}$. 又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

因为 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2}{3 \sin A}$, 所以 $bc = 8$, 由余弦定理,

$$b + c = \sqrt{a^2 + 2bc(1 + \cos A)} = \sqrt{3^2 + 2 \times 8 \times \frac{3}{2}} = \sqrt{33}.$$

所以三角形的周长 $2p = a + b + c = 3 + \sqrt{33}$. ♡

例 5.11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 且 $BC = 1$, 当 $\triangle ABC$ 的三条高的乘积取得最大值时, $\sin A =$ _____

解. 由题设, BC 边上的高 $h_a = \frac{2S}{BC} = 2$, 所以 $\triangle ABC$ 三条高的乘积取得最大值, 当且仅当 $h_b h_c = \frac{4}{bc}$ 取得最大值, 即 bc 取得最小值. 因为 $\frac{1}{2}bc \sin A = 1$, 所以 $bc = \frac{2}{\sin A}$, 所以只需求 $\sin A$ 的最大值.

由余弦定理, $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A = 1 + 2bc + \cos A \geq 2bc$, 当且仅当 $b = c$ 时等号成立, 所以 $2bc(1 - \cos A) \leq 1$, 即 $4 \frac{1 - \cos A}{\sin A} \leq 1$, 由半角公式可知 $\tan \frac{A}{2} \leq \frac{1}{4}$. 因为 $\frac{1}{4} < 1$, 所以 $\frac{A}{2} < \frac{\pi}{4}$, 即 $A < \frac{\pi}{2}$, 所以当 $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$ 时, $\sin A$ 最大, 此时 $\sin A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{8}{17}$.

5.2.2 解母子三角形

如图5.4所示, 在母子三角形中: 母三角形和一个子三角形有一个公共边和一个公共角; 而两个子三角形则有一个公共边和一对邻补角. ♡

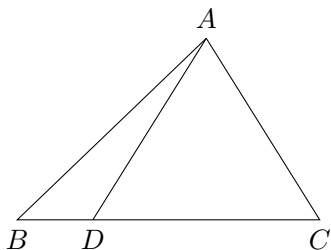
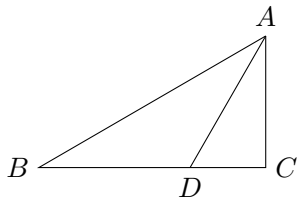


图 5.4: 母子三角形

例 5.12. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D 点. $AD = 2$, $a = 3$, $c \sin A \cos C = (2b - c) \cos A \sin C$, 求角 A 和 $\triangle ABC$ 的面积.

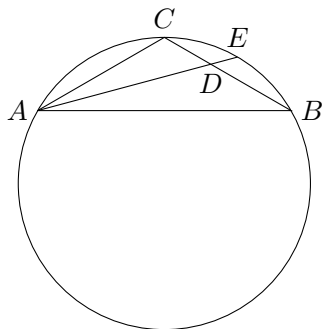


解. 因为 $c \sin A \cos C = (2b - c) \cos A \sin C$, 由正弦定理得 $\sin C \sin A \cos C = (2 \sin B - \sin C) \cos A \sin C$, 因为 $\sin C, \sin B \neq 0$, 所以 $\sin A \cos C = (2 \sin B - \sin C) \cos A \Rightarrow \sin A \cos C + \cos A \sin C = 2 \sin B \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin B \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理, $\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, 所以 $BD = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sin B} = \frac{1}{\sin B}$, 在 $\triangle ACD$ 中同理可得 $CD = \frac{1}{\sin C}$, 所以 $a = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = 3$. 在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理, $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{c}{2\sqrt{3}}$, 所以 $2\sqrt{3}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 3$, 即 $b + c = \frac{\sqrt{3}}{2}bc$.

根据余弦定理, $(b + c)^2 = a^2 + 2bc(1 + \cos A) = 9 + 3bc$, 又因为 $(b + c)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 (bc)^2 = \frac{3}{4}(bc)^2$, 所以 $\frac{3}{4}(bc)^2 - 3bc - 9 = 0$, 解得 $bc = 6$ (另一根为负, 舍去), 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. ♡

例 5.13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin C - \sqrt{3} \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{c}$, $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. 若 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 交于点 D , 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 E (异于点 A), $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 求 λ 的值.



解. 由正弦定理角化边得 $\frac{c - \sqrt{3}b}{a + b} = \frac{a - b}{c}$, 整理得 $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$, 由余弦定理可知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

又因为 $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C = 1 - \cos(A + B) = 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B$, 即 $\cos(A - B) = 1$, 所以 $A - B = 0$, 即 $A = B = \frac{\pi}{6}$.

不妨设 $AC = 1$. 因为 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 所以 $\angle DAC = \frac{\pi}{12}$, $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$, 在 $\triangle ADC$ 中由正弦定理, $AD = \frac{AC \sin C}{\sin \angle ADC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

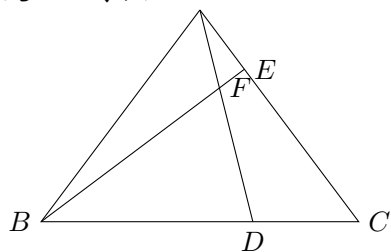
连接 OA, OE , 则 $OE \perp BC$, 因为 $\angle BDE = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\angle OEA = \frac{\pi}{2} - \angle BDE = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\angle OAE = \angle OEA = \frac{\pi}{4}$. 而外接圆半径 $OA = \frac{AC}{2 \sin B} = 1$, 所以 $AE = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}$.

所以 $\lambda = \frac{AE}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. ♡

例 5.14. 如图, 在锐角三角形 ABC 中, $\sin \angle BAC = \frac{24}{25}$, $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$, $BC = 6$, 点 D 在边 BC 上, 且 $BD = 2DC$, 点 E 在边 AC 上, 且 $BE \perp AC$, BE 交 AD 于点 F .

(1) 求 AC 的长;

(2) 求 $\cos \angle DAC$ 及 AF 的长.



解. (1) 由正弦定理, $AC = \frac{BC \sin \angle ABC}{\sin \angle BAC} = \frac{6 \times \frac{4}{5}}{\frac{24}{25}} = 5$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, 所以

$$\begin{aligned} \cos C &= -\cos(\angle ABC + \angle BAC) = -\cos \angle BAC \cos \angle ABC + \sin \angle BAC \sin \angle ABC \\ &= -\frac{7}{25} \times \frac{3}{5} + \frac{24}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

因为 $BE \perp AC$,

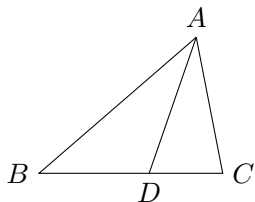
所以 $CE = BC \cos C = \frac{18}{5}$, $AE = AC - CE = \frac{7}{5}$. 在三角形 ACD 中由余弦定理可得

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cos C} = \sqrt{25 + 4 - 12} = \sqrt{17},$$

所以, $\cos \angle DAC = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \cdot AC} = \frac{17 + 25 - 4}{10\sqrt{17}} = \frac{19\sqrt{17}}{85}$. (也可先根据正弦定理算出 $\sin \angle DAC$, 再利用平方关系. 但是用余弦定理直接计算似乎更简洁一些)

由 $BE \perp AC$, 得 $AF = \frac{AE}{\cos \angle DAC} = \frac{7\sqrt{17}}{19}$. ♡

例 5.15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $BC = 2\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则角平分线 AD 长等于_____.



在解答这个问题之前, 我们先介绍一个有关母子三角形的结论:

定理 5.2.1 (张角定理). 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, 那么:

$$\frac{\sin \angle BAC}{AD} = \frac{\sin \angle BAD}{AC} + \frac{\sin \angle CAD}{AB}.$$

张角定理可以简单地记忆为“不沾边”, 即公式中出现的三个角正好是由公式中的三条边所张的三个角, 而 $\sin \angle BAC$ 比上的边是 AD , $\sin \angle BAD$ 比上的边是 AC , $\sin \angle CAD$ 比上的边是 AB , 每个角比上的边都是“不沾”的边.

证明. 如图5.4所示, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin \angle BAC$, $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}|AB||AD|\sin \angle BAD$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}|AC||AD|\sin \angle CAD$.

因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 即

$$\frac{1}{2}|AB||AC|\sin \angle BAC = \frac{1}{2}|AB||AD|\sin \angle BAD + \frac{1}{2}|AC||AD|\sin \angle CAD$$

等式两边同时除以 $\frac{1}{2}|AB||AC||AD|$, 立刻得到

$$\frac{\sin \angle BAC}{AD} = \frac{\sin \angle BAD}{AC} + \frac{\sin \angle CAD}{AB}.$$

□

根据推导过程很容易理解“不沾边”的原因, 因为在面积公式中出现的是两边及其夹角正弦值的乘积, 所以在同时除以 $\frac{1}{2}|AB||AC||AD|$ 之后分母上只剩下“不沾边”.

下面以张角定理为基础来解答例5.15.

解. 由张角定理,

$$\frac{\sin A}{AD} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{b} + \frac{\sin \frac{A}{2}}{c}.$$

化简得

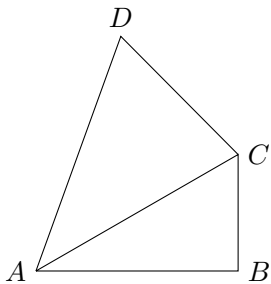
$$AD = \frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$$

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 2\sqrt{3}$, 所以 $bc = 8$.

由余弦定理, $b+c = \sqrt{a^2 + 2bc(1 + \cos A)} = \sqrt{12 + 2 \times 8 \times \frac{3}{2}} = 6$, 所以 $AD = \frac{\sqrt{3} \times 8}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

♡

例 5.16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \cos C + c \cos A = b \sin B$, 且 $\angle CAB = \frac{\pi}{6}$. 若 D 是 $\triangle ABC$ 外一点, $DC = 2$, $DA = 3$, 那么当四边形 $ABCD$ 的面积取得最大值时, $\sin D =$ _____.



解. 因为在 $\triangle ABC$ 中, $a \cos C + c \cos A = b$, 所以 $b = b \sin B$, 即 $\sin B = 1$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$, 又因为 $\angle CAB = \frac{\pi}{6}$, 所以 $BC = AC \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}AC$, $AB = AC \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$.

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理, $AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos D = 13 - 12 \cos D$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}AC \times \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{8}(13 - 12 \cos D)$. 所以四边形的面积为

$$S = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \sin D + \frac{\sqrt{3}}{8}(13 - 12 \cos D) = \sqrt{9 + \frac{27}{4} \sin(D - \varphi)} + \frac{13}{8}\sqrt{3}$$

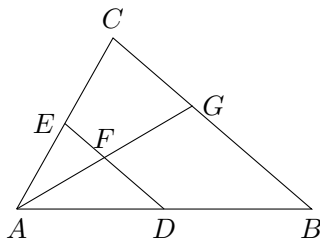
其中 φ 为锐角且 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以当 $D = \varphi + \frac{\pi}{2}$ 时面积最大, 此时 $\tan D = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot \varphi = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以 $\sin D = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. ♡

评注 5.16.1. 本题实际上包含了解两个三角形的过程, 解答本题的关键是能够以角 D 为主元来表示所求面积.

习题 5.2

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 15$, $BC = 20$. 则顶点 B 与斜边各点的连线中 (含边 AB , BC) 长度为整数的线段条数是_____.
2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$, $AB = 3$. 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $\sin C \cos \frac{A}{2} = (2 - \cos C) \sin \frac{A}{2}$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $a = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB + AC = 7$, 且三角形的面积为 4, 则 $\sin A$ 的最小值为_____.
5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 成等差数列, 对应的三边为 a, b, c , 且 $a, c, \frac{4}{\sqrt{3}}b$ 成等比数列, 则 $S_{\triangle ABC} : a^2 =$ _____.
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $\sin C = k \sin A (k \geq 2)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.
7. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的边长分别为 a, b, c , D 是 BC 的中点, 若 $a = 4$, $AD = c - b$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, 且其面积 $S_{\triangle ABC} = 1$, 则 BC 的最小值是_____.

9. 已知等腰直角 $\triangle PQR$ 的三个顶点分别在等腰直角 $\triangle ABC$ 的三条边上, 记 $\triangle PQR$ 、 $\triangle ABC$ 的面积分别为 $S_{\triangle PQR}$ 、 $S_{\triangle ABC}$, 则 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}$ 的最小值为_____.
10. 若过点 $P(1,0)$ 、 $Q(2,0)$ 、 $R(4,0)$ 、 $S(8,0)$ 作四条直线构成一个正方形, 则该正方形的面积不可能等于 ().
- (A) $\frac{16}{17}$ (B) $\frac{36}{5}$ (C) $\frac{26}{5}$ (D) $\frac{196}{53}$
11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 30$, $AC = 20$, $S_{\triangle ABC} = 210$, D 、 E 分别为边 AB 、 AC 的中点, $\angle BAC$ 的平分线分别与 DE 、 BC 交于点 F 、 G , 则四边形 $BGFD$ 的面积为_____.



12. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = DA = 2$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.
13. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$, 则四边形 $ABCD$ 的面积是_____.
14. 设平面四边形 $ABCD$ 的四边长分别为 4 个连续的正整数. 证明: 四边形 $ABCD$ 的面积的最大值不是整数.
15. 已知 P 是正方形 $ABCD$ 内切圆上的一点, 记 $\angle APC = \alpha$, $\angle BPD = \beta$, 则 $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta =$ _____.
16. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 20, 内切圆的半径为 $\sqrt{3}$, $BC = 7$, 则 $\tan A$ 的值为_____.
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 满足: $1007A^2 + 1009B^2 = 2016C^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.
18. 设 $\triangle ABC$ 的周长为 12, 内切圆半径为 1. 则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.
19. $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$, $\sin(B - A) = \cos C$.
- (1) 求 A, C ;
- (2) 若 $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$, 求 a, c .
20. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$, 将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像, 设 $\triangle ABC$ 三个角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .
- (1) 若 $c = \sqrt{7}$, $f(C) = 0$, $\sin B = 3 \sin A$, 求 a, b 的值.
- (2) 若 $g(B) = 0$, $\vec{m} = (\cos A, \cos B)$, $\vec{n} = (1, \sin A - \cos A \tan B)$, 求 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 的取值范围.

21. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的所对边分别为 a, b, c , 有等式

$$\ln \tan A + \ln \tan C = 2 \ln \tan B.$$

(1) 求证: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;

(2) 当 B 最小时, 若 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 求 a, b, c 的值.

22. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 向量 $\vec{m} = (\sin A, b+c)$, $\vec{n} = (\sin C - \sin B, a-b)$, 且存在实数 λ , 使 $\vec{m} = \lambda \vec{n}$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $a+b=kc$, 求实数 k 的取值范围.

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分为 a, b, c , 且

$$a^2 - (b-c)^2 = (2-\sqrt{3})bc, \sin A \sin B = \cos^2 \frac{C}{2}$$

BC 上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$.

(1) 求角 A 和角 B 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

24. 已知数向量 $\vec{m} = (\sin A, \cos A)$, $\vec{n} = (\cos B, \sin B)$, $\vec{m} \cdot \vec{n} = \sin 2C$. 且 $\angle A, \angle B, \angle C$ 分别是三边 a, b, c 所对的角.

(1) 求 $\angle C$ 的大小;

(2) 若 $\sin A, \sin C, \sin B$ 成等比数列, 且 $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 18$, 求 c 的值.

25. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, 且 a, b, c 为角 A, B, C 的对边.

(1) 求 $\sin 2(B+C) + \sin^2 \frac{B+C}{2}$ 的值;

(2) 若 $a=4$, 试求当 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 取得最大值时, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, $b=1$, 且 $\cos C + (2a+c)\cos B = 0$.

(1) 求 B ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

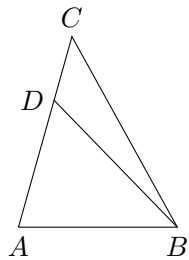
27. 设 x, y 均为非零实数, 且满足 $\frac{x \sin \frac{\pi}{5} + y \cos \frac{\pi}{5}}{x \cos \frac{\pi}{5} - y \sin \frac{\pi}{5}} = \tan \frac{9\pi}{20}$.

(1) 求 $\frac{y}{x}$ 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan C = \frac{y}{x}$, 求 $\sin 2A + 2 \cos B$ 的最大值.

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AB=2$, 点 D 在线段 AC 上, 且 $AD=2DC$, $BD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 求

- (1) BC 长;
 (2) $\triangle DBC$ 面积.

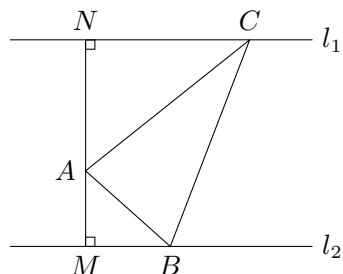


29. 已知向量 $\vec{m} = (\cos \frac{x}{2}, -1)$, $\vec{n} = (\sqrt{3} \sin \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2})$, 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + 1$.
- (1) 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{11}{10}$, 求 $\cos x$ 的值;
 (2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $2b \cos A \leq 2c - \sqrt{3}a$, 求 $f(B)$ 的取值范围.
30. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c , 向量 $\vec{p} = (\sin A + \sin C, \sin B)$, 向量 $\vec{q} = (a - c, b - a)$, 且满足 $\vec{p} \perp \vec{q}$.
- (1) 求 $\triangle ABC$ 的内角 C 的值;
 (2) 若 $c = 2$, $2 \sin 2A + \sin(2B + C) = \sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
31. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c , 已知 $c = 2$, $C = \frac{\pi}{3}$.
- (1) 求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值;
 (2) 若 $2 \sin 2A + \sin(2B + C) = \sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
32. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sin A + \sin B = (\cos A + \cos B) \sin C$.
- (1) 求证: $\triangle ABC$ 为直角三角形;
 (2) 若 $a + b + c = 1 + \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.
33. 已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \sin \omega x, \cos \omega x)$, $\vec{n} = (\cos \omega x, -\cos \omega x)$ ($\omega > 0$), 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.
- (1) 求 ω 的值;
 (2) 设 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足: $b^2 = ac$, 且边 b 所对的角为 x , 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实数解, 求实数 k 的取值范围.
34. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$, $\angle C = 2\angle A$.
- (1) 求 BC 的值;
 (2) 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $PA = AC$, $PB = PC$, 求 $\angle PAB$ 的大小.

35. 如图, A 是两条平行直线 l_1 、 l_2 之间的一个定点, 且点 A 到直线 l_1 、 l_2 的距离分别为 $AM = 1$, $AN = \sqrt{3}$. 设 $\triangle ABC$ 的另两个顶点 C 、 B 分别在 l_1 、 l_2 上运动, 且满足 $AB < AC$, $\frac{AB}{\cos B} = \frac{AC}{\cos C}$.

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并证明结论;

(2) 求 $\frac{1}{AB} + \frac{\sqrt{3}}{AC}$ 的最大值.



36. 已知 $\triangle ABC$ 的角 A 、 B 、 C 的对边依次为 a 、 b 、 c , 若满足 $\sqrt{3}\tan A \cdot \tan B - \tan A - \tan B = \sqrt{3}$,

(1) 求 $\angle C$ 大小;

(2) 若 $c = 2$, 且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $a^2 + b^2$ 取值范围.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $a \cos C = (2b - c) \cos A$.

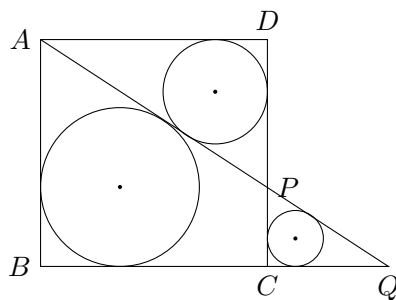
(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, D 为边 BC 的中点, 求 AD 的取值范围.

38. 已知四边形 $ABCD$ 是正方形, P 是边 CD 上一点 (点 P 不与顶点重合), 延长 AP 与 BC 的延长线交于点 Q . 设 $\triangle ABQ$, $\triangle PAD$, $\triangle PCQ$ 的内切圆半径分别是 r_1, r_2, r_3 .

(1) 证明: $r_1^2 \geq 4r_2r_3$, 并指出点 P 在什么位置时等号成立;

(2) 若 $AB = 1$, 试求证: $3 - 2\sqrt{2} < r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < \frac{1}{2}$.



第六章 不等式

心猿钻透玲珑窍，要解玄关一万重。

6.1

不等式的基本性质

不等式就是阐述不等关系的代数式. 和等式类似, 不等式也有一些显然而常用的基本性质.

1. 传递性: 若 $a \leq b, b \leq c$, 则 $a \leq c$.
2. 加法: 若 $a \leq b, c \leq d$, 则 $a + c \leq b + d$.
3. 正乘法: 若 $a \leq b, c > 0$, 则 $ac \leq bc$.
4. 负乘法: 若 $a \leq b, c < 0$, 则 $ac \geq bc$.

2.3. 两条综合, 我们还能得到一个重要的性质.

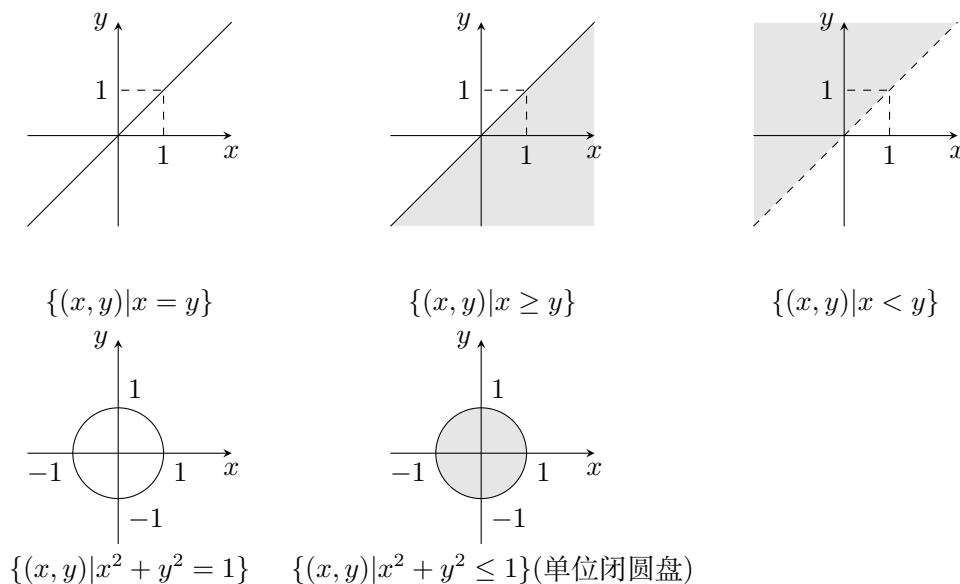
若 $a \leq b, c \leq d, \lambda > 0, \mu > 0$, 则 $\lambda a + \mu b \leq \lambda c + \mu d$. 这条性质被叫做线性组合. 可以看出, 线性组合性质实质上是和 2.3. 两条性质相互等价的. 类似的性质在初中时就已经被大家所掌握, 在此便不做赘述. 需要注意的一点是上面的 $\leq$ 换成不带等号的 $<$ 和 $>$ 也对.

不等式和等式均可用以表达某种限制. 例如, 等式 $a = 3$ 表示限制 a 的取值在数 3 上, 而不等式 $a < 3$ 则是限制 a 的取值比 3 小. 这种一元限制可以被反映在一条数轴上. 记该不等式是 $P(x)$, 则其代表的限制区域就是点集 $A = \{x|P(x)\}$. 如图:



图 6.1:

二元关系也可进行类似的处理, 如 $x \leq y$ 代表区域: $B = \{(x, y)|x \leq y\}$. 从图像上看, 这表示半个平面以及其边界. 记该不等式是 $Q(x, y)$, 则其代表的限制区域就是点集 $B = \{(x, y)|Q(x, y)\}$. 在作图的时候, 如果集合包括了它的边界, 则我们会把它的边界用实线标出. 否则用虚线表示. 单独的包括或者不包括某个点用实心或者空心点表示. 下面是一些例子.



上述区域 B 称为不等式的可行域, 代表着所有符合不等式的数对 (x, y) 对应的点构成的集合. 这些集合间存在包含和被包含的关系, 也可以定义交并补等运算. 例如以下三个集合:

$$A = \{(x, y) | x \leq 1\}, B = \{(x, y) | y \leq 1\}, C = \{(x, y) | x + y \leq 2\}$$

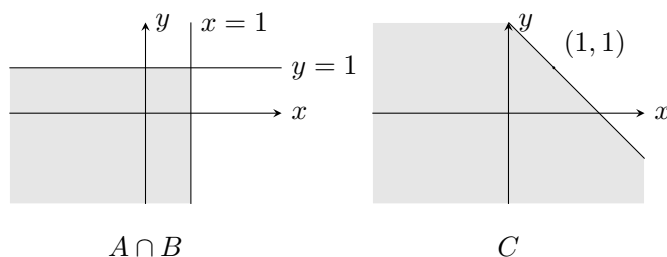


图 6.2:

作出图像可以看到, $A \cap B \subseteq C$. 这表示由不等式组 $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$ 可以推出 $x + y \leq 2$. 这恰恰是不等式的第二条基本性质告诉我们的.

而事实上如果我们再取两个区域 $D = \{(x, y) | x + 2y \leq 3\}$, $E = \{(x, y) | \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \leq 2\}$ 并且作出它们的图像, 自然可以发现 $A \cap B \subseteq D$, $A \cap B \subseteq E$. 这都代表着它们可以通过前述不等式组推出. 该结果与线性组合的结论一致. 作为练习, 读者可以自己尝试画一画.

例 6.1. 证明: 若 $a^2 + b^2 \leq 1$, 则 $a + b \leq \sqrt{2}$.

解. 作出二者的可行域 A 和 B , 由图得知 $A \subseteq B$, 所以若 $a^2 + b^2 \leq 1$, 则 $a + b \leq \sqrt{2}$. ♡

用图像得到的结果总是符合我们的预期的, 但是只用基本性质来解决问题的话会得到一些意料之外的结果. 如:

例 6.2. 已知: $\begin{cases} 4 \leq x + y \leq 6(1) \\ 2 \leq x - y \leq 4(2) \end{cases}$ 求证: $4x + 2y \leq 22$.

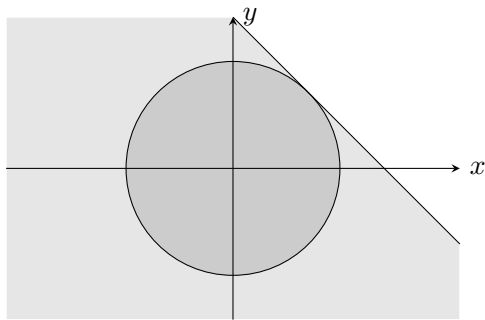


图 6.3:

解. 从图像上容易证明. 但如果用以下办法:

(1) + (2), 可得 $3 \leq x \leq 5$.

(2) 乘以 -1 再和 (1) 相加得到 $0 \leq y \leq 2$.

于是 $4x + 2y \leq 4 \times 5 + 2 \times 2 = 24 > 22$, 不能得到理想的结果. ♡

这个错误的出现源于中间解出 x 和 y 的范围的过程. 如果我们把原不等式组 $\begin{cases} 4 \leq x + y \leq 6 & (1) \\ 2 \leq x - y \leq 4 & (2) \end{cases}$

的可行域记作 A , 新不等式组 $\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 & (1) \\ 0 \leq x - y \leq 2 & (2) \end{cases}$ 的可行域记作 B , 那么可以看出 $A \subseteq B$. 我们将原本的题目条件所表示的可行域扩大成了新的可行域, 这是一种对题目条件的“曲解”, 得到一个“扩大化”的结果. 如何避免这种初学者容易犯的错误呢?

几何角度这是容易解决的, 只要我们随时看一看处理过程中的可行域有没有变大就好了. 我们给出一个代数角度的验证方法: 观察取等条件. 第一步解出 (x, y) 的过程中, 使等号成立的条件是 $(x, y) \in \{(3, 1), (4, 0), (4, 2), (5, 1)\}$. 而第二步的取等条件要求 $(x, y) = (5, 2)$. 两次的取等条件不一致, 所以这种放缩是不合适的, 只能得到 $4x + 2y \leq 24$ 这种扩大化的结论. 良好的不等式放缩处理应当考虑取等条件是否在可行域内 ($(x, y) = (5, 2)$ 并不属于条件的可行域内). 一般来说不等式运用的次数越少, 对取等条件的要求就越少, 也更不容易犯错误.

解. $3 \times (1) + 1 \times (2)$, 可得 $3(x + y) + (x - y) \leq 22$, 即 $4x + 2y \leq 22$. ♡

这种处理手法避免了对可行域的处理, 直接在原可行域内使用线性组合一步放缩, 避免了取等条件的不一致.

这里的系数 **3** 和 **1** 是怎么确定的呢? 这是出自待定系数法. 方法是:

$$\lambda(x + y) + \mu(x - y) \leq 6\lambda + 4\mu$$

比较系数可以得到

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases}$$

于是 $\begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}$, $4y + 2x \leq 16$. 取等条件是 $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$.

在上述可行域中我们实际上可以求更多的目标函数的最值, 如: $3x + 2y$, $3x - 2y$, $y - 4x$, 读者可以自己探索.

我们把这种在限定条件下求最值的问题称为**规划问题**. 当限制条件和目标函数都是线性函数时, 被称为**线性规划问题**. 再看一个例子.

例 6.3. 已知:
$$\begin{cases} 2x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$$
 求 $2x + y$ 的最值.

解. 如果从基本性质的角度, 我们应当选择两条限定条件配以系数 λ, μ 以得到形如 $x + 2y \leq \underline{\hspace{1cm}}$ 的表达式. 但是我们无法保证选择的两个条件可以帮助我们求出最大值. 因此我们应探寻更简便有效的方法.

我们知道, 基本性质不等式的取等条件是原不等式全都变成等式. 所以用基本性质不等式做出来的最值取等条件一定恰好使两个不等号取等. 反映在可行域的图像上也就是说一定在边界点上. 所以当我们三个不等式变为等式两两联立, 就可以判定出所有可能的取等条件.

例如在本题中, 两两联立方程得到的边界点为 $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\}$. 我们分别计算三种情况下的函数值分别为 2, 1, -3, 所以最大值是 2. ♡

评注 6.3.1. 从几何上进行解释是更容易理解的. 三个不等式联立表示的图形是一个三角形, 如下图. 它的顶点为 $\{(1, 0), (0, 1), (-1, -1)\}$. 目标函数 $2x + y$. 设 $a = 2x + y$, 则它可以表示一条直线: $y = -2x + a$. 这条直线经过可行域内的点, 斜率为 -2, 截距为 a , 求 a 的最大值.

平移直线, 可以看到它经过顶点 $(1, 0), (-1, -1)$ 时, 截距取到它的最大值和最小值. 这与代数手法得到的结论是一样的.

例 6.4. 在上题的条件下求 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值.

解. 所求的式子不再是线性的, 因此是一般的规划问题. 但依然可以从几何的角度去考虑. 这种分式的结构我们一般考虑斜率, 即将其理解成可行域内一点 (x, y) 与点 $(-2, 0)$ 连线的斜率. 由图知最大值在 $(0, 1)$ 处取到, 为 $\frac{1}{2}$. ♡

例 6.5. 在上题的条件下求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

解. 所求的式子不是线性的, 也是一般的规划问题. 二次式一般找距离相对应, 比如本题可将表达式与 (x, y) 到原点的距离进行关联. 设圆 $x^2 + y^2 = a^2$, 则 a 最小值一定在与三条直线中的一条相切处取到. 简单计算知道距离的最小值为 $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 $\frac{1}{5}$. ♡

如果目标函数是线性的或者是斜率型的, 那么最值一般在顶点处取到. 如果是距离型的, 那么最小值不一定在顶点处取得, 但依然会在边界线上取到.

最后提醒一个常见的错误.

例 6.6. 已知:
$$\begin{cases} 2x - y + 1 \leq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$$
 求 $2x + y$ 的最大值.

解. 如果仅仅考虑顶点取等的话, 会得到错误的结果 2. 这个结果的取等条件是 $(1, 0)$, 但是该点不在可行域内. 这种做法出现错误的原因是这个题目的可行域不再是三条线围成的三角形. 正确的最大值应该是 -3, 在点 $(-1, -1)$ 处取到. ♡

评注 6.6.1. 这提醒我们在用顶点取等的性质的时候需要确定我们得到的点是不是在可行域内,也就是确定用两条直线解出来的点是否符合第三条直线的限制条件. 例如本题的 $(1, 0)$ 并不符合条件.

6.2

基本不等式

基本不等式是代数中最重要的不等式. 由于基本不等式要求变量都是正数, 所以如无特殊说明本节所有字母都表示正实数.

先介绍**均值**的概念. 均值本质上是任意一个在数 a 和 b 之间的数. 即若设 $a \leq b$, 则每一个满足 $a \leq x \leq b$ 的 x 都是均值. 几个特殊的均值: 代数平均 (算数平均): $A = \frac{a+b}{2}$, 几何平均: $G = \sqrt{ab}$, 平方平均: $Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 调和平均: $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. 平均值在数学和物理中有极为广泛的运用. 如两电阻并联的电阻值与其调和平均相关, 串联电阻值与算数平均相关.

不同的均值之间是可以比较大小的. 最基本的大小关系存在于代数与几何平均值之间. 下面是出于配方法的推导.

由恒成立式:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

知:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

故

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a = b$ 时取等.

该不等式被称作均值不等式, 反映两个平均值 (代数和几何) 之间的大小关系: $A \geq G$. 其他均值也存在于该不等式中. 我们有不等式链: $Q \geq A \geq G \geq H$. 即:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

对于任意次幂函数 $f(x) = x^\alpha$, 我们都可以定义一个 α 次平均值: $x_\alpha = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 例如 $\alpha = 2$ 时, 为 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; $\alpha = 1$ 时, 为 $\frac{a+b}{2}$. 将 x_α 看做是 α 的一个函数, 则该函数在 $\mathbb{R}$ 0 上是个增函数, 且补充定义 $x_0 = \sqrt{ab}$ 的话, x_α 在 $\mathbb{R}$ 上都是增函数. 这个对于一般 α 的均值不等式被称作幂平均不等式.

回到基本的 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. 仿照上一节的思路我们也可以对它进行几何上的解释.

假设 $a + b \leq 2t$. 则它在平面上表示一个三角形区域. 而区域 $ab \leq t^2$ 表示双曲线的一支与其渐近线形成的飞镖形区域. 显然飞镖形区域是包含三角形区域的.

反之, $ab \geq t^2$ 表示飞镖形区域的反面. 该区域内的点都将满足 $a + b \geq 2t$. 以上等号成立条件均为 $a = b$.

如果从平面几何考虑基本不等式的话, 还有另一种几何解释. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 记 BC 的中点为 E , 设 $BD = a, DC = b$, 则: $AD = \sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{ab}$, $AE = \frac{1}{2}BC = \frac{a+b}{2}$

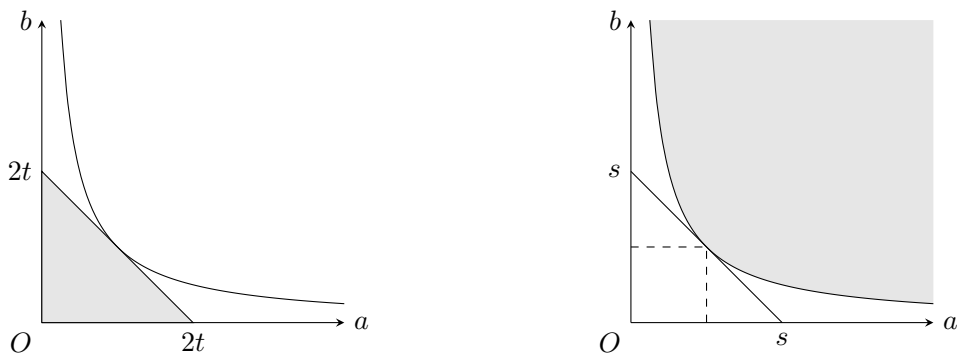


图 6.4: 几何解释 1

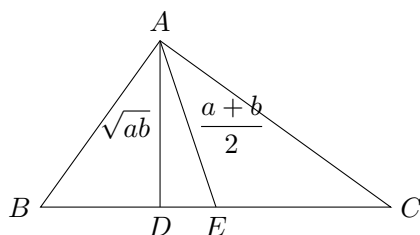


图 6.5: 几何解释 2

基本不等式常用于限定条件下最值的计算, 比如下面的例子:

例 6.7. $a + b = 2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

解. 法一:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + a + \frac{1}{b} + b - 2 \geq 2 + 2 - 2 = 2$$

法二:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2$$

♡

本题两种解法都可以, 但是第二种解法更好, 第一种方法不建议使用. 原因看下面的例题.

例 6.8. $a + b = 2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

解. 法一:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{a} + a + \frac{4}{b} + b - 2 \geq 2 + 4 - 2 = 4$$

法二:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) (a + b) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \right) \geq \frac{9}{2}$$

♡

按道理来讲最小值应该只有一个. 但是这里我们算出了两个不同的值. 回想不等式的解题步骤就发现我们漏掉了最重要的一环: 取等条件. 实际上:

法一取等: $a = 1, b = 2$. 是错误的.

法二取等: $a = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$. 是正确的.

实际上, 第一问中法一的成功属于“侥幸”. 取等条件恰好满足题目条件. 但在如例二中的题目里法一便很难成功. 用基本不等式做题的一个比较重要的原则就是尽量使用少步数的均值. 使用均值的次数越多, 对取等条件的限制就越多, 条件与条件兄弟阋墙而难以成立. 方法二只用一次均值所以成立. 为了避免取等条件不对的情况, 检查取等条件是必须的.

例 6.9. $a + b + c = 1$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}$ 的最小值.

解. 沿用上题思路:

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \right) (a + b + c) \geq 1 + 4 + 9 + 4 + 6 + 12 = 36$$

取等条件为 $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{2}$.

♡

基本不等式另一个常用场景是隐含条件下最值的计算.

例 6.10. 求 $\frac{a^2 + 1}{a}$ 的最小值.

解.

$$\frac{a^2 + 1}{a} = a + \frac{1}{a} \geq 2$$

取等条件为 $a = 1$.

♡

这是最简单的求最值问题. 这里我们注意到了隐含的条件, 然后一步均值得出结果.

我们在求解解析几何中的最值问题时, 常常需要对付这种结构, 如:

例 6.11. 求 $\frac{k^2 + 1}{k^4 + 4k^2 + 1}$ 的最大值. ($k \in \mathbb{R}$)

解.

$$\frac{k^2 + 1}{k^4 + 4k^2 + 1} = \frac{1}{\frac{k^4 + 4k^2 + 1}{k^2 + 1}} = \frac{1}{(k^2 + 1) + \frac{1}{k^2 + 1} + 2} \geq 4$$

在 $k^2 + 1 = 1$ 即 $k = 0$ 时取到.

♡

评注 6.11.1. 实际上本题与上一题并无区别. 做换元则会清晰很多: 我们把 $k^2 + 1$ 当做主元求出原式最大值.

例 6.12. 求 $\frac{\sqrt{1 + 4m^2}}{9 + 4m^2}$ 的最大值.

例 6.13. 求 $\frac{(1 + 4m^2)(4 + m^2)}{1 + m^2}$ 的最小值.

解. 读者自求不难.

♡

基本不等式揭示了两数和与两数积的关系: **和定积最大, 积定和最小**. 在 $a + b$ 固定的时候, ab 有最大值, 且 a 和 b 越接近, ab 越大; 反之在 ab 固定的时候, $a + b$ 有最小值, a 和 b 越接近, $a + b$ 越小. 因此基本不等式不但揭示了最值的取到一面, 还揭示了最值的逼近一面. 在和与积之间建立起桥梁.

6.3

柯西不等式

设向量 $\vec{x} = (a, b)$, $\vec{y} = (c, d)$. 则

$$-|\vec{x}||\vec{y}| \leq \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

即

$$-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \leq ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

只取正数部分, 我们平方处理, 得到

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

这个不等式就是柯西不等式. 取等条件是 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 平行. 如果抛开向量, 只看代数部分是 $ad = bc$. 如果不考虑 0 的话还可以写成分式: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

它也可以用均值不等式进行证明.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2adbc = (ac+bd)^2$$

柯西不等式和均值不等式的本质是相同的, 但是形式上不完全相同. 也可以用来处理上一节的一些问题.

例 6.14. $a+b=2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

解. 由柯西不等式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a+b) \geq 2$$

在 $a^2 = b^2$ 时取等. 即 $a = b = 1$. ♡

例 6.15. $a+b=2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值.

解. 由柯西不等式

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) (a+b) \geq \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$$

在 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ 时取等. ♡

可以看到在处理这种问题的时候柯西不等式更具有优越性, 比起基本不等式需要打开括号进行化简来说更简便.

柯西不等式的另一个作用是改变不等式的次数. 比如下面的例子.

例 6.16. $a+b=2$. 求 a^2+b^2 的最小值.

解. 由柯西不等式:

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2)(1+1) \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

在 $a = b = 1$ 时取等. ♡

例 6.17. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. 求 $x + 2y + 3z$ 的最大值.

解. 这里要求的式子和已知式不齐次, 所以我们可以使用三元柯西不等式将其处理至齐次的情况.

令向量 $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$, 则

$$x + 2y + 3z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{70}$$

取等条件是 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, 即 $x = \frac{\sqrt{70}}{14}, y = \frac{\sqrt{70}}{7}, z = \frac{3\sqrt{70}}{14}$. ♡

在这里我们将二次的条件和一次的结论进行匹配, 用柯西不等式求出了最大值. 反过来用一次的条件也可以求二次的最小值.

例 6.18. $x + 2y + 3z = \sqrt{70}$. 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

解. 和上题类似, 读者可以自己尝试. ♡

6.4

不等式的证明及多元不等式

不等式问题主要有两类: 求最值以及证明新的不等式. 本节我们将用已有不等式证明新的不等式, 并简要介绍一些多元不等式.

先回顾一下基本不等式和柯西不等式的证明方法:

基本不等式:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

柯西不等式:

$$(ac + bd)^2 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$$

可以看到, 基本不等式和柯西不等式都指向了一个重要的简单不等式: $x^2 \geq 0$. 高中阶段几乎一切的不等式都可以用这个方法证明, 比如:

例 6.19. 求证: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}$

证明. 第一个不等号:

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

第三个不等号:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 \geq 0$$

两个不等式都在 $a = b$ 时取到等号. □

有一点需要注意: 虽然不等号成立与否与是否能取到等号没有关系, 如 $1 \leq 2$, 但是还是应该在所有能取到等号的不等式中都写出取等条件———不管它多显然.

例 6.20. 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

证明. 虽然是三元不等式, 但是可以用二元的方法进行证明.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

取等条件是 $a = b = c$. □

既然可以用均值不等式做, 那自然也可以写出配方法的过程.

证明. 因

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

故得证. 取等条件是 $a = b = c$. □

例 6.21. 求证:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

证明. 这就是所谓的三元均值不等式, 揭示了三元情况下几何平均和算数平均的大小关系.

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geq 4\sqrt[6]{a^2b^2c^2} = 4\sqrt[3]{abc}.$$

故

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

取等条件为 $a = b = c$. □

看一个二元三元均值不等式的嵌套使用.

例 6.22. $abc \geq 1$. 求证:

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$$

证明.

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 8(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca})^3 \geq 8 \times 3 = 24$$

取等条件为 $a = b = c$. □

多元的均值不等式也是成立的. 我们有 n 元的通式:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

证明是通过归纳法进行的. 先对 2^k 元的情况进行证明, 再用类似于三元不等式的证明的方法配凑几个几何均值得到证明.

柯西不等式也有 n 元形式. 设向量 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 向量 $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$$

即

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

取等条件是向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 同向.

6.5

绝对值不等式与含绝对值的函数

前述基本不等式与柯西不等式都属于一般意义上的代数不等式, 只涉及到代数运算. 本节我们讨论引入绝对值记号的函数的性质以及与之相关的不等式.

$$\text{绝对值函数: } |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ . 易知不等式 } |x| \geq 0.$$

我们有最基本的绝对值不等式: $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 这个不等式的意义是十分明显的. 它同样有多元形式:

$$|x_1 \pm \cdots \pm x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

可以看出, 这个不等式有一个很重要的性质: 二元情况下两边的不等号至少有一个取到等于号. 即: $|x \pm y| \in \{||x| - |y||, |x| + |y|\}$. 二者必居其一.

这是绝对值不等式最特殊的地方. 它常被用来处理绝对值之和的问题.

例 6.23. $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$. 求最小值.

解.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3, & x \leq -2 \\ 1, & -2 < x < -1 \\ 2x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的最小值是 1. ♡

这是最为常规的分类讨论的做法: 将 $f(x)$ 分段, 然后直接通过增减性判定函数最值. 下面利用绝对值不等式再给出一个解答. 先看过程:

解.

$$f(x) = |x + 1| + |x + 2| = |-x - 1| + |x + 2| \geq |-x - 1 + x + 2| = 1$$

$x = -1$ 时可以取到. ♡

在这里我们只需要点出一个可行的取等条件即可, 无需面面俱到.

例 6.24. $f(x) = |x + 1| + |2x + 3|$. 求最小值.

解. 在这里我们无法直接应用绝对值不等式, 因为无论如何配凑都不可能直接把 x 消掉. 所以我们可以将 $|2x + 3|$ 拆成 $|x + \frac{3}{2}| + |x + \frac{3}{2}|$ 处理.

$$f(x) = |x + 1| + |x + \frac{3}{2}| + |x + \frac{3}{2}| = |-x - 1| + |x + \frac{3}{2}| + |x + \frac{3}{2}| \geq |-x - 1 + x + \frac{3}{2}| + 0 = \frac{1}{2}$$

这里我们实际上用了两个不等式: 绝对值恒正和绝对值不等式. 相应的取等条件也有两条. 可取后者的取等条件为 $x = -\frac{3}{2}$, 这样二者的取等条件就相符合了. ♡

我们发现, 可以通过绝对值恒正的条件放缩来处理掉多余的项. 我们将其表达成如下的方法. 设已知 $f(x) = |n_1x + a_1| + |n_2x + a_2| + \cdots + |n_kx + a_k|$, 其中 . .

- (1) 先将 $|n_i x + a_i|$ 拆成 n_i 个 $|x + \frac{a_i}{n_i}|$. 并按大小 n_i 个 $\frac{a_i}{n_i}$ 将从小到大排序.
- (2) 找到上面序列的中位数, 对中位数左右的绝对值从 $|x + \frac{a_i}{n_i}|$ 调整成 $|-x - \frac{a_i}{n_i}|$. 这是为了便于使用不等式的时候消去所有的自变量 x .
- (3) 若一共偶数项, 直接套用不等式消去所有的 x .
- (4) 若一共奇数项, 对中位数所在那一项放缩为 0, 其余项套用不等式 x .

这么描述过于抽象, 我们用具体的实例进行解释.

例 6.25. $f(x) = |3x + 3| + |x + a|$. 求最小值.

解. $f(x) = |x + 1| + |x + 1| + |-x - 1| + |-x - a| \geq |1 + 1 - 1 - a| = |4 - 2a|$. ♡

可以看到该方法求最小值是很简便的, 尤其是当函数中含有参数的时候, 免去了对参数大小进行讨论的繁琐过程, 直接得到结果.

最后我们通过这类函数的图像的角度解释这种方法的合理性. 我们知道这种函数都可以写成分段函数的形式. 在 x 从 $-\infty$ 走向 ∞ 的时候, 这类函数必定会呈现先减小在增加的趋势. 在每一个分段区间上函数都是一次函数 (或者是常函数). 一次项系数会从负数单调变化为正数. 因此如果我们把 $f(x)$ 看成若干个绝对值号相加的话, 最小值点将出现在函数的最低点 (有奇数个绝对值号) 或者是最低段 (偶数个绝对值号) 处. 此时前一半绝对值号会提供一些 $-x$, 和后半一半绝对值号的 $+x$ 正好相抵. 这要求自变量 x 的值处于中位数.

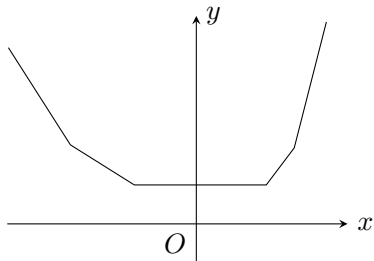


图 6.6: 共偶数个绝对值的情况

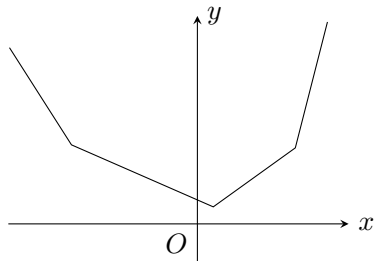


图 6.7: 共奇数个绝对值的情况

考试中这种函数会有两个考点: 画图及求最值. 如果是画出图像的话需分类讨论并且逐段求出函数解析式并作图. 如果仅仅要求出最值可以直接使用不等式方法放缩得到结果.

6.6

第 6 章综合习题

第一部分. 一元二次不等式

1. 设 $a \in \mathbb{R}$. 若 $x > 0$ 时均有 $(x^2 + ax - 5)(ax - 1) \geq 0$ 成立, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 不等式 $|x|^3 - 2x^2 - 4|x| + 3 < 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 不等式 $\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知正实数 x, y 满足 $(2x + \sqrt{4x^2 + 1})(\sqrt{y^2 + 4} - 2) \geq y$, 则 $x + y$ 的最小值是_____.
5. 若不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集是 $(4, b)$, 则实数 $a =$ _____, $b =$ _____.
6. 不等式 $(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$ 的解集是_____.

第二部分. 基本不等式

1. 已知 a, b 为正实数, 记 $P = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a + b}{2}$, $Q = \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}$, $R = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a + b}$, 则 P, Q, R 的大小关系是_____.
2. 设 $a > 0, b > 0$ 则下面不等式中不恒成立的是_____.
A. $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \sqrt{ab}$, B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$, C. $\sqrt{|a - b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$, D. $a^2 + b^2 + 1 > a + b$
3. (1) 证明对于任意的正实数 a, b 都有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;
(2) 已知正数 x, y 满足 $x + y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值.
4. 如果不等式 $x^3 - ax + 1 \geq 0$ 对一切 $x \in [-1, 1]$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
5. 已知正数 a, b, c, d 满足 $a + 2b = 1, c + 2d = 1$. 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{bcd}$ 的最小值为_____.
6. 设 x, y 是实数, 则 $\frac{2x + \sqrt{2}y}{2x^4 + 4y^4 + 9}$ 的最大值是_____.
7. 当 x, y, z 为正数时, $\frac{4xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值为_____.
8. 设正数 x, y 满足 $x^3 + y^3 = x - y$, 求使 $x^2 + \lambda y^2 \leq 1$ 恒成立的实数 λ 的最大值.
9. 已知 $x, y \in [0, +\infty)$ 且满足 $x^3 + y^3 + 3xy = 1$, 则 x^2y 的最大值为_____.
10. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 为 $1, 2, \dots, 9$ 的任意一个排列. 则 $a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9$ 的最小值为_____.
11. 设正实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{27}{4}$, 则 $P = \frac{15}{x} - \frac{3}{4y}$ 的最小值为_____.
12. 已知正数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则 $4a^2 + b^2 + 4\sqrt{ab}$ 的最大值为_____.
13. 已知正实数 a, b 满足 $ab(a + b) = 4$, 则 $2a + b$ 的最小值为_____.
14. 若正实数 x, y 满足 $x^3 + y^3 = (4x - 5y)y$, 则 y 的最大值为_____.
15. 已知 $x + y = 1$, 问: 当实数 x, y 为何值时, $(x^3 + 1)(y^3 + 1)$ 取得最大值?
16. 已知 $x, y \in [0, +\infty)$, 则 $x^3 + y^3 - 5xy$ 的最小值为_____.

第三部分. 柯西不等式

1. 函数 $y = \sqrt{7 - x} + \sqrt{9 + x}$ 的值域是_____.
2. 函数 $y = \sqrt{3x + 6} + \sqrt{8 - x}$ 的值域为_____.
3. 函数 $f(x) = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{6 - 2x}$ 取得最大值时 $x =$ _____.

4. 若对于所有的正数 x, y , 均有 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y}$, 则实数 a 的最小值是_____.
5. 已知正实数 a, b 满足 $9a + b = 36$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 取最小值时, $ab =$ _____.
6. 若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 则 $3x + 4y$ 的最小值是_____.
7. 设 a, b 都为大于零的常数, $0 < 1 < x$, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$ 的最小值为_____.
8. 已知正实数 x, y 满足 $\frac{(x+2)^2}{y} + \frac{(y+2)^2}{x} = 16$, 则 $x + y =$ _____.
9. 已知 $x, y > 0$, 且 $x + 2y = 2$. 则 $\frac{x^2}{2y} + \frac{4y^2}{x}$ 的最小值为_____.
10. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{y+1} = 1$, 则 $x + 2y$ 的最小值为_____.
11. 给定正实数 $0 < a < b$, 设 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$. 试求 $\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$ 的最小值.
12. 若直线 $ax - by + 2 = 0 (a > 0, b > 0)$ 和函数 $y = c^{x+2} + 2 (c > 0, c \neq 1)$ 的图像均恒过同一个定点, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.
13. 已知正数 a, b 满足 $a + 3b = 7$, 则 $\frac{1}{1+a} + \frac{4}{2+b}$ 的最小值为_____.
14. 设 x, y 是正实数, 且 $x + y = 1$, 则 $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{y+1}$ 的最小值是_____.
15. 设 $a, b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 则 $\frac{a}{10b+a} + \frac{b}{10a+b}$ 的最大值为_____.
16. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 20$, 则 $xy + 8x + y$ 的最大值是_____.
17. 设 a, b, c, d 均为实数, 满足 $a + 2b + 3c + 4d = \sqrt{10}$. 则 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a + b + c + d)^2$ 的最小值为_____.
18. 设 $a = \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{3z+1}$, 其中 $x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$, 则 $[a] =$ _____.
19. 已知实数 x, y, z 满足 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$, 则 $x + 2y + 3z$ 的最小值为_____.
20. 若 $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > 0$, 且不等式 $\log_{\frac{x_1}{x_2}} 2014 + \log_{\frac{x_2}{x_3}} 2014 + \log_{\frac{x_3}{x_4}} 2014 \geq k \log_{\frac{x_1}{x_4}} 2014$ 恒成立, 则实数 k 的最大值为_____.
21. 若实数 a, b, c 满足 $a + 2b + 3c = 6, a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 12$, 则 $abc =$ _____.
22. 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 $x - 6\sqrt{y} - 4\sqrt{x-y} + 12 = 0$, 则 x 的取值范围为_____.
23. 已知正数 a, b 满足 $a + b = 1$ 求

$$M = \sqrt{1 + 2a^2} + 2\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + b^2}$$

的最小值.

第四部分. 简单二元线性规划问题

1. 若不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集是 $(4, b)$, 则实数 $a = \underline{\hspace{1cm}}, b = \underline{\hspace{1cm}}$.
2. 不等式 $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
3. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ax - b$. 若对任意 $x \in [-1, 1]$, 有 $0 \leq f(x) \leq 1$, 则 $\frac{3a+b+1}{a+2b-2}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
4. 已知 a, b 为实数, 对任何满足 $0 \leq x \leq 1$ 的实数 x , 都有 $|ax+b| \leq 1$ 成立, 则 $|20a+14b| + |20a-14b|$ 的最大值是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
5. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数, 且是奇函数, 若 m, n 满足不等式组
$$\begin{cases} f(m) + f(n-2) \leq 0, \\ f(m-n-1) \leq 0, \end{cases}$$
 则 $5m-n$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
6. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$, 则 $x - |y|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
7. 若关于 x 的方程 $x^2 + ax + b - 3 = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 在区间 $[1, 2]$ 上有实根, 则 $a^2 + (b-4)^2$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
8. 已知实数 x, y 满足 $1 + \cos^2(x+y-1) = \frac{x^2 + y^2 + 2(x+1)(1-y)}{x-y+1}$, 求 xy 的最小值.
9. 设 a, b 是实数, 并且对任意的 $x \in [0, 1]$, 恒有 $|ax + b - \sqrt{1-x^2}| \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, 求 a, b 的值.
10. 已知圆 $x^2 + y^2 = 8$ 围成的封闭区域上 (含边界) 的整点 (坐标均为整数的点) 数是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 围成的封闭区域上 (含边界) 整点数的 $\frac{1}{5}$, 则正实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 D 是满足 $x \geq 0, y \geq 0, x+y+[x]+[y] \leq 19$ 的点 (x, y) 形成的区域 (其中 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数). 则区域 D 中整点的个数为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
12. 设条件 p : 实数 m, n 满足 $\begin{cases} 2 < m+n < 4, \\ 0 < mn < 3, \end{cases}$ 条件 q : 实数 m, n 满足 $\begin{cases} 0 < m < 1, \\ 2 < n < 3, \end{cases}$, 则 p 是 q 的 $\underline{\hspace{1cm}}$ 条件.
13. 在平面直角坐标系中, 不等式组
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y \leq 0, \\ x - \sqrt{3}y + 2 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$
 表示的平面区域的面积是 $\underline{\hspace{1cm}}$.
14. 设平面点集 $A = \{(x, y) | (y-x)(y-\frac{1}{x}) \geq 0\}, B = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. 则 $A \cap B$ 所表示的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
15. 已知集合 $S_1 = \{(x, y) | \log_2(1+x^2+y^2) \leq 1 + \log_2(x+y)\}$, 并且集合 $S_2 = \{(x, y) | \log_{\frac{1}{2}}(2+x^2+y^2) \geq -2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\}$, 则 S_2 与 S_1 的面积比为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点集 $S = \{(x, y) | (|x| + |y| - 1)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0\}$ 所对应的平面区域的面积为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

17. 在直角坐标平面内, 曲线 $|x-1| + |x+1| + |y| = 3$ 围成的图形的面积是_____.

18. 在平面直角坐标系中, 由 $|x| + |y| + |x+y| \leq 2$ 确定的图形的面积为_____.

19. 设动点 $P(t, 0)$ 、 $Q(1, t)$, 其中参数 $t \in [0, 1]$, 则线段 PQ 扫过的平面区域的面积是_____.

20. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ 2x+y \leq 4 \\ 4x-y \geq -1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 3x + y$ 的取值范围为_____.

21. 设 x, y 满足 $\begin{cases} 2x+y \geq 4 \\ x-y \geq 1 \\ x-2y \leq 2 \end{cases}$, 若 $z = ax + y$ 只在点 $A(2, 0)$ 处取得最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

22. 已知 $a > 0$, x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y \leq 3, \\ y \geq a(x-3), \end{cases}$ 若 $z = 2x + y$ 的最小值为 1, 则 $a =$ _____.

23. 如果实数满足 $\begin{cases} x-4y+3 \leq 0 \\ 3x+5y-25 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 目标函数 $z = kx + y$ 的最大值为 12, 最小值为 3, 那么实数 k 的值为_____.

24. 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq mx, \\ x+y \leq 1, \end{cases}$ 下, 目标函数 $z = x + my$ 的最大值小于 2. 则实数 m 的取值范围是_____.

25. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq y, \\ y \leq 6-2x, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 向量 $\vec{a} = (2x-y, m)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 若 $\vec{a} // \vec{b}$, 则实数 m 的最小值为_____.

26. 非空集合 $A = \{(x, y) | \begin{cases} ax-2y+8 \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ 2x+ay-2 \leq 0 \end{cases}\}$, 当 $(x, y) \in A$ 时, 目标函数 $z = y - x$ 既存在最大值, 又存在最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

27. 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0, \\ 8x - y - 4 \leq 0, \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$
 目标函数 $z = abx + y$ (a, b 均大于 0) 的最大值为 8, 则 $a + b$ 的最小值为_____.

28. 若实数 $x, y, z \geq 0$, 且 $x + y + z = 30$, $3x + y - z = 50$, 则 $T = 5x + 4y + 2z$ 的取值范围是_____.

29. 设平面点集 $A = \{(x, y) | (y - x) \cdot (y - \frac{18}{25x}) \geq 0\}$, $B = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$. 若 $(x, y) \in A \cap B$, 求 $2x - y$ 的最小值.

30. 若 x, y 满足 $|y| \leq 2 - x$, 且 $x \geq -1$, 则 $2x + y$ 的最小值为_____.

31. 已知 a, b 为正实数, 且 $2a + b \leq 15$, $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} \leq 2$, 则 $3a + 4b$ 的取值范围是_____.

32. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 3y^2 \leq 12$, 则 $|x + 2y|$ 的最大值为_____.

33. 设实数 x, y 满足方程 $(x + 2)^2 + y^2 = 1$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.

34. 若正实数 x, y 满足 $y > 2x$, 则 $\frac{y^2 - 2xy + x^2}{xy - 2x^2}$ 的最小值是_____.

35. 若实数 a, b 满足条件
$$\begin{cases} a + b - 2 \geq 0 \\ b - a - 1 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}, \quad \frac{a + 2b}{2a + b}$$
 则的最大值为_____.

36. 已知实数 x, y 满足
$$\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y - 5 \geq 0, \\ y - 3 \leq 0, \end{cases}$$
 若不等式 $a(x^2 + y^2) \leq (x + y)^2$ 恒成立, 则实数 a 的最大值是_____.

37. 实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 3y^2 = 5$, 则 $\frac{1}{x^2 + y^2}$ 的最大值和最小值的和为_____.

38. 设 $x \geq y > 0$, 若存在实数 a, b 满足 $0 \leq a \leq x, 0 \leq b \leq y$, 且

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 + b^2 = y^2 + a^2$$

则 $\frac{x}{y}$ 的最大值为_____.

第七章 数列

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

——《庄子·杂篇·天下》

我们将按照一定次序排列的一列数叫做**数列**. 人们在生活、生产中有时需要用一列数来表达一类事物，或者记录一个过程，如果用正整数来表示这些数的先后顺序(即序号)，并将这些正整数看作是自变量的取值，将对应的数值看成是函数值，那么数列就是定义在正整数集或是正整数集的有限子集上的离散函数. 除了实际应用以外，数列也是数学中的一个重要的研究对象.

7.1

数列的概念及表示法

我们用 $\{a_n\}$ 表示一个数列，它表示的是依次排列起来的一串数：

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

其中数列中的每一个数叫做数列的**项**，例如 a_1 是数列的第一项， a_4 是数列的第四项，等等，其中第一项 a_1 也叫做**首项**. 数列的项数可以是有限的数，也可以是无限的. 我们将项数有限的数列称为**有穷数列**，将项数无限的数列称为**无穷数列**.

设有一个确定的数列 $\{a_n\}$ ，对于任意一个正整数 n ，我们都有一个唯一确定的数 a_n 与之对应，在这种看法下，数列是一个从正整数集 $\mathbb{N}^*$ (或正整数集的有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$) 到实数集 $\mathbb{R}$ 的离散函数 $n \mapsto a_n = f(n)$ ，其自变量为 n ，对应地函数值是数列的第 n 项 a_n .

与其他函数一样，数列也可以用图像来表示. 与我们之前学过的函数不同，数列的定义域是离散的，所以它们的图像是分布在 y 轴右侧的散点图.

与函数类似，我们也可以定义出数列的等式性质和不等式性质. 定义数列的单调性如下：从第 2 项起，每一项都大于前一项的数列称为**递增数列**，即：数列 $\{a_n\}$ 递增等价于对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (对于有穷数列，这里 n 的取值， $a_{n+1} - a_n > 0$ ；从第 2 项起，每一项都小于前一项的数列称为**递减数列**，即数列 $\{a_n\}$ 递减等价于对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_{n+1} - a_n < 0$).

数列也可以具有对称性和周期性.

例 7.1. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$ ，则 $a_{2022} =$ ().

- (A) 1 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, 4a_{n+1} - a_{n+1}a_n + 4a_n = 9$, 则 $a_{2018} =$ _____.

解. (1) 由题意可知 $a_2 = -\frac{1}{a_1+1} = -\frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = -2$, $a_4 = -\frac{1}{-2+1} = 1$, 由此可见 $\{a_n\}$ 是一个周期数列, 其周期为 3. 因为 $2022 = 3 \times 674$, 所以 $a_{2022} = a_3 = -2$, 故选 D.

事实上, 函数 $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ 的 3 次迭代等于作用对象本身, 因此满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)+1}$ 的函数也是一个以 3 为周期的周期函数.

(2) 因为 $4a_{n+1} - a_{n+1}a_n + 4a_n = 9$, 所以 $(4-a_n)(4-a_{n+1}) = 7$, 设 $b_n = 4-a_n$, 则有 $b_nb_{n+1} = 7$, 容易验证这是一个以 2 为周期的周期数列, $b_{2018} = b_2 = \frac{7}{b_1} = \frac{7}{3}$, 所以 $a_{2018} = 4 - b_{2018} = \frac{5}{3}$. ♡

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 的对应关系可以用一个式子 $a_n = f(n)$ 来表示, 则称这个式子为数列 $\{a_n\}$ 的**通项公式**, 公式中的 a_n 称为数列的**通项**. 例如数列 $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n$, 显然数列的通项公式就是数列的函数解析式, 利用通项公式, 可以计算出数列的每一项.

例 7.2. 设 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$), 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*$, 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 求 a 的范围.

解. $\{a_n\}$ 递增, 等价于对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n > 0$ 都成立, 即 $n+1 + \frac{a}{n+1} - (n + \frac{a}{n}) = 1 - \frac{a}{n(n+1)} > 0$ 恒成立, 进一步等价于 $a < \min_{n \in \mathbb{N}^*} \{n(n+1)\} = 2$, 所以 a 的范围为 $(0, 2)$. ♡

评注 7.2.1. 从这个例题中可以看出, 如果数列 $\{a_n\}$ 是增数列且 $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*$, 那么 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 不一定是增函数; 但是反过来, 如果 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 是增函数, 那么数列 $\{a_n\}, a_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*$ 一定是递增数列.

数列 $\{a_n\}$ 单调的充要条件是 $a_{n+1} - a_n$ 的符号确定, 这也是判定数列 $\{a_n\}$ 单调性的方法.

例 7.3. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^n - 15}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的最大项和最小项.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n \cdot p^n$ ($n \in \mathbb{N}^*, 0 < p < 1$), 下面说法正确的是_____.

- ① 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;
- ② 当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 不一定有最大项;
- ③ 当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;
- ④ 当 $\frac{p}{1-p}$ 为正整数时, 数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项.

(3) 已知 $a_n = \frac{n - \sqrt{2022}}{n - \sqrt{2021}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 那么在数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项中最小项和最大项分别为_____.

解. (1) 考虑研究 $\{a_n\}$ 的单调性, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1} - 15} - \frac{1}{2^n - 15} = \frac{2^n}{(15 - 2^n)(2^{n+1} - 15)}$, 当 $n = 1, 2$ 时 $(15 - 2^n)(2^{n+1} - 15) < 0$, 当 $n = 3$ 时 $(15 - 2^n)(2^{n+1} - 15) > 0$, 当 $n \geq 4$ 时 $(15 - 2^n)(2^{n+1} - 15) < 0$, 所以 $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 > a_5 > \dots$, 又因为当 $1 \leq n \leq 3$ 时 $a_n < 0$, 当 $n > 3$ 时 $a_n > 0$, 所以 $a_{n_{\max}} = a_4 = 1$, $a_{n_{\min}} = a_3 = -\frac{1}{7}$.

(2) 因为 $0 < p < 1$, 为了简洁, 不妨设 $q = \frac{1}{p}$, 则 $q > 1$. 此时 $a_n = \frac{n}{q^n}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{q^{n+1}} - \frac{n}{q^n} = \frac{1-(q-1)n}{q^{n+1}}$.

当 $q = 2$ 时, $a_{n+1} - a_n = \frac{1-n}{2^{n+1}}$, 当 $n = 1$ 时 $a_{n+1} - a_n = 0$, 即 $a_{n+1} < a_n$ 不恒成立, 所以 $\{a_n\}$ 不是递减数列. ① 错误.

当 $1 < q < 2$ 时, $0 < q-1 < 1$, 所以当 $n \leq [\frac{1}{q-1}]$ 时, $a_{n+1} - a_n = \frac{1-(q-1)n}{q^{n+1}} \geq 0$, 而当 $n > [\frac{1}{q-1}]$ 时, $a_{n+1} - a_n < 0$, 所以 $\{a_n\}$ 必有最大项, ② 错误. 特别地, 如果 $\frac{1}{q-1}$ 是正整数, 那么此时 $[\frac{1}{q-1}] = \frac{1}{q-1}$, 当 $n < \frac{1}{q-1}$ 时 $a_{n+1} - a_n = \frac{1-(q-1)n}{q^{n+1}} > 0$, 当 $n = \frac{1}{q-1}$ 时 $a_{n+1} - a_n = 0$, 当 $n > \frac{1}{q-1}$ 时 $a_{n+1} - a_n < 0$, 所以 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{\frac{1}{q-1}} = a_{\frac{1}{q-1}+1} > a_{\frac{1}{q-1}+2} > \cdots > a_n > \cdots$, 即 $\{a_n\}$ 有两个相等的最大项, ④ 正确.

当 $q > 2$ 时, 因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $1 - (q-1)n \leq 2 - q < 0$, 即 $a_{n+1} - a_n < 0$ 恒成立, 所以 $\{a_n\}$ 一定是递减数列, ③ 正确.

因此正确的结论是 ③ ④.

(3) 分离常数: $a_n = \frac{n - \sqrt{2022}}{n - \sqrt{2021}} = 1 + \frac{\sqrt{2021} - \sqrt{2022}}{n - \sqrt{2021}}$,

$a_{n+1} - a_n = (\sqrt{2021} - \sqrt{2022})(\frac{1}{n+1 - \sqrt{2021}} - \frac{1}{n - \sqrt{2021}}) = \frac{\sqrt{2022} - \sqrt{2021}}{(n+1 - \sqrt{2021})(n - \sqrt{2021})}$, 所以当 $n \leq 44$ 时 $a_{n+1} - a_n > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 递增, 且 $a_n > 1$; 当 $n \geq 45$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递减, 且 $a_n < 1$, 所以前 100 项中最小项是 a_{45} , 最大项是 a_{44} . ♡

评注 7.3.1. 研究数列单调性的一个重要应用就是数列的最大项、最小项问题.

此外我们要注意, 在高中阶段所说的数列单调性指的是严格单调, 即必须是 $a_{n+1} - a_n > 0$ 或 $a_{n+1} - a_n < 0$, 绝不能是 $a_{n+1} - a_n \geq 0$ 或 $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

例 7.4. $a_n = \log_{n+1}(n+2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 讨论数列 $\{a_n\}$ 的单调性.

解. 由对数换底公式, $a_n = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$, 显然该数列是正项数列, 作商得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} < \left(\frac{\ln(n+1) + \ln(n+3)}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln^2(n+2)} = \frac{\ln(n+3)(n+1)}{\ln(n+2)^2}.$$

因为 $(n+3)(n+1) = n^2 + 4n + 3 < (n+2)^2$, 所以 $\ln(n+3)(n+1) < \ln(n+2)^2$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 所以 $a_{n+1} < a_n$, 数列递减. ♡

求数列的某些项的和是研究数列的重要话题. 我们将数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项止的各项之和称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记作 S_n , 即

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

S_n 也可以看成是一个新的数列, S_n 的通项公式称为原数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式.

根据 S_n 的定义立刻得到 $\{S_n\}$ 的项与 $\{a_n\}$ 的项之间有如下关系:

$$a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2).$$

或

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

这个结论在以后会经常用到. 例如如果已知 $\{S_n\}$ 的通项公式, 那么根据上式可求出 $\{a_n\}$ 的通项.

7.2

等差数列和等比数列

这一节中我们介绍两类最基本的数列: 等差数列和等比数列, 并以此为例向读者说明研究数列的性质以及建立数列的通项公式和前 n 项和公式的方法.

7.2.1 等差数列

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与前一项之差都等于同一个常数, 那么就称这个数列为**等差数列**, 这个常数叫做**公差**. 公差常用字母 d 表示, 即 $\{a_n\}$ 是等差数列等价于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (或正整数集的有限子集), $a_{n+1} - a_n = d = \text{常数}$ 都成立.

可以认为最简单的等差数列是由三个数组成的数列 a, A, b , 这时我们称 A 为 a 和 b 的**等差中项**, 由等差数列的定义可知, A 是 a 和 b 的等差中项, 等价于 $A = \frac{a+b}{2}$.

根据等差数列的定义可知 $a_{n+1} - a_n = d$, 像这样, 如果 $\{a_n\}$ 的某一项与它的前一项或者前几项可以用一个公式来表示, 那么这个公式称为数列的**递推公式**. $a_{n+1} = f(a_n)$ 是一个 2 项的递推公式, $a_{n+2} = f(a_{n+1}, a_n)$ 是一个 3 项的递推公式. 运用一定的技巧, 有时可以通过递推公式来研究数列的性质或求出数列的通项公式. 下面我们将尝试由等差数列的递推公式 $a_{n+1} - a_n = d$ 求出等差数列的通项.

由 $a_{n+1} - a_n = d$ 可得

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

归纳可得当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

下面考虑 $n=1$ 的情况, 当 $n=1$ 时, 上述公式变为 $a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1$, 即当 $n=1$ 时, 公式也成立.

由等差数列的通项公式可知, 只要确定了一个等差数列的首项和公差, 就能唯一地确定一个等差数列. 我们将首项 a_1 和公差 d 称为等差数列的基本量.

我们以等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 为基础, 来研究等差数列的一些重要性质.

1° **单调性**: 若 $d = a_{n+1} - a_n > 0$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列; 若 $d = a_{n+1} - a_n < 0$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列; 若 $d = a_{n+1} - a_n = 0$, 则 $\{a_n\}$ 的各项都相同, $\{a_n\}$ 是一个常数列.

2° **对称性**: 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $p, q, m, n \in \mathbb{N}^*$. 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$. 用基本量表示这四项, 可以立刻证明这个命题 (作为练习, 过程留给读者), 在这里我们还打算对等差数列的对称性做一个直观上的解释.

设有一次函数 $f(x) = dx + a_1 - d, x \in \mathbb{R}$, 那么 $\{a_n\} (d \neq 0)$ 的项 a_n 就是 $f(x)$ 在 n 处的函数值, 即 $a_n = f(n)$. 从图像上看, 数列 $\{a_n\}$ 表示的是一组在 $f(x) = dx + a_1 - d$ 的 y 轴右侧部分的图像上均匀离散分布的散点, 如图7.1所示. 图7.2示出了等差数列对称性的一种特殊情况, 根

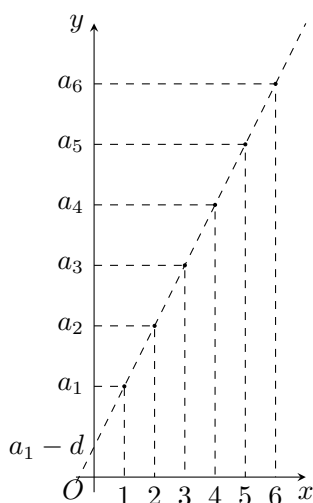


图 7.1: 等差数列与一次函数的关系

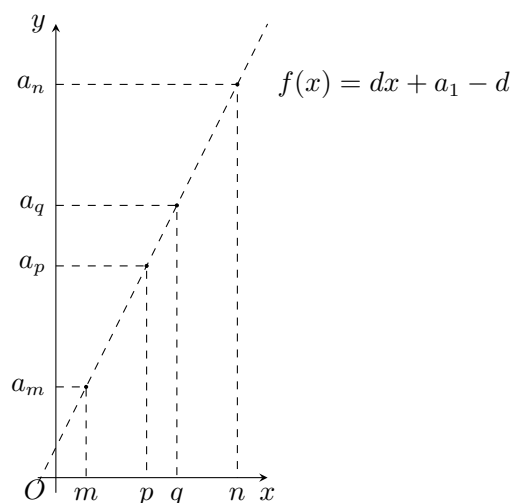


图 7.2: 对称性的直观解释

据图7.2可以从直观上解释这条性质. 等差数列具有这样的对称性, 本质是因为一次函数具有中心对称性.

等差数列的对称性在解决一些问题时经常用到.

特别地, 令 $m = n = l$ 可得: 若 $l = \frac{p+q}{2}$, 则 $a_l = \frac{a_p + a_q}{2}$, 即若 l 为 p 和 q 的等差中项, 那么 a_l 也是 a_p 和 a_q 的等差中项.

3° **等差数列的子数列的性质**: 如果 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差为 d , 那么 $\{a_n\}$ 的子数列

$$a_k, a_{k+b}, a_{k+2b}, \dots, a_{k+(n-1)b} (k, b \in \mathbb{N}^*)$$

是一个以 bd 为公差的等差数列.

证明. 用基本量来表示子数列中的项得: $a_{k+(n-1)b} = a_1 + (k-1)d + (n-1)bd$, $a_{k+nb} = a_1 + (k-1)d + nbd$, 因为 $a_{k+nb} - a_{k+(n-1)b} = bd$, 所以该子数列是一个以 bd 为公差的等差数列. $\square$

4° **公差的计算公式**: 如果 $\{a_n\}$ 是等差数列, $m, n \in \mathbb{N}^*$, 那么公差 d 可按下式计算:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

例 7.5. (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足: 公差 $d \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{N}^*$, 且 $\{a_n\}$ 中任意两项之和也是数列中的一项, 若 $a_1 = 9$, 求 d 的取值范围.

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意正整数 n , 均有 $a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} = 6n + 22$, 则 $a_{2021} =$ _____.

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点, 且满足 $\overrightarrow{AD} = a_1 \overrightarrow{AB} + a_{4034} \overrightarrow{AC}$, 那么 $a_{2017} a_{2018}$ 的最大值为_____.

(4) 《九章算术》卷第六《均输》中, 有问题“今有竹九节, 下三节容量四升, 上四节容量三升. 问中间两节欲均容, 各多少?”其中“欲均容”的意思是: 使容量从下往上均匀变细. 在这个问题中, 中间两节的容量之和为_____.

解. (1) 设 a_p 和 a_q 是 $\{a_n\}$ 中的任意两项, 根据题意有 $a_k = a_p + a_q$, 其中 a_k 也是 $\{a_n\}$ 中的项, 用基本量表示得 $a_1 + (k-1)d = 2a_1 + (p+q-2)d$, 即 $d = \frac{a_1}{k+1-p-q} = \frac{9}{k+1-p-q}$. 因为 k, p, q 均为正整数, 公差 $d \in \mathbb{N}^*$, 所以 $k+1-p-q$ 的可能取值为 1, 3, 9, 即 d 的取值集合为 $\{1, 3, 9\}$.

(2) 用基本量来表示得, $a_1 + (n-1)d + 2a_1 + 2nd + 3a_1 + 3(n+1)d = 6n + 22$, 即 $6dn + 2d + 6a_1 = 6n + 22$ 对任意的 n 均成立, 所以 $\begin{cases} 6d = 6, \\ 2d + 6a_1 = 22, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d = 1, \\ a_1 = \frac{20}{3} \end{cases}$, 所以 $a_{2021} = a_1 + 2020d = \frac{6070}{3}$.

(3) 根据三点共线定理可知 $a_1 + a_{4034} = 1$, 根据等差数列的对称性可知 $a_{2017} + a_{2018} = a_1 + a_{4034} = 1$, 所以 $a_{2017} a_{2018} \leq \frac{(a_{2017} + a_{2018})^2}{4} = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a_{2017} = a_{2018}$, 即该等差数列为常数列时取得最大值.

(4) 设从上到下第 i 节的容量为 $a_i, i = 1, 2, \dots, 9$, 由题意 $\{a_n\}$ 是一个等差数列, 且满足 $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3, \\ a_7 + a_8 + a_9 = 4, \end{cases}$ 用基本量表示得 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 3, \\ 3a_1 + 21d = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = \frac{13}{22}, \\ d = \frac{7}{66}, \end{cases}$ 所以 $a_5 + a_6 = 2a_1 + 9d = \frac{47}{22}$. ♡

评注 7.5.1. 从这组例题可以看出, 解答等差数列有关问题时, 经常需要用基本量来“翻译”题给条件来得出基本量之间的关系, 从而求出等差数列的基本量. 另外, 灵活应用等差数列的对称性以及等差数列与一次函数之间的联系等, 有时能够使问题简化.

一般地, 只要给出两个相互独立的条件, 就可以唯一确定一个等差数列, 即可以唯一确定等差数列的基本量.

例 7.6. (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2 + a_{10}^2 \leq 10$. 则 $S = a_{10} + a_{11} + \dots + a_{19}$ 的取值范围是_____.

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5^2 + a_9^2 \leq 10$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 的最大值为 ().

(A) $5\sqrt{5}$ (B) 20 (C) 25 (D) 100

解. (1) 用基本量法, 因为 $a_1^2 + a_{10}^2 \leq 10$, 所以 $a_1^2 + (a_1 + 9d)^2 \leq 0$. 而

$$\begin{aligned} S &= a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{19} \\ &= 10a_{10} + d + 2d + \cdots + 9d \\ &= 10a_{10} + 45d \\ &= 10a_1 + 135d, \end{aligned}$$

所以 $9d = \frac{1}{15}(S - 10a_1)$, 代入得

$$250a_1^2 + 10Sa_1 + S^2 - 2250 \leq 0$$

这等价于关于 a_1 的二次不等式 $a_1^2 + \frac{1}{25}Sa_1 + \frac{1}{250}S^2 - 9 \leq 0$ 有解.

所以判别式

$$\Delta = \left(\frac{1}{25}S\right)^2 - 4\left(\frac{1}{250}S^2 - 9\right) \geq 0$$

解得 $-50 \leq S \leq 50$.

另解 1 $S = 10a_1 + 135d = 15(a_1 + 9d) - 5a_1$, 因为 $(-a_1)^2 + (a_1 + 9d)^2 \leq 10$, 由柯西不等式可知,

$$S = 15(a_1 + 9d) + 5(-a_1) \leq \sqrt{15^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-a_1)^2 + (a_1 + 9d)^2} \leq 5\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 50$$

$$S = 15(a_1 + 9d) + 5(-a_1) \geq -\sqrt{15^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-a_1)^2 + (a_1 + 9d)^2} \geq -5\sqrt{10} \times \sqrt{10} = -50$$

当且仅当 $(a_1 + 9d, -a_1)$ 和 $(15, 5)$ 两个平面向量共线时, 取得两个等号.

所以 $-50 \leq S \leq 50$.

另解 2 以 a_1 和 a_{10} 为变量考虑问题, 那么 $S = \frac{10}{2}(a_{10} + a_{19}) = 5(3a_{10} - a_1)$ (用到等差数列的对称性).

不妨设 $a_1^2 + a_{10}^2 = M^2 \leq 10$, 其中 $0 \leq M \leq \sqrt{10}$, 可设 $a_{10} = M \cos \theta, a_1 = M \sin \theta$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$, 那么 $S = 5(3a_{10} - a_1) = 5M(3 \cos \theta - \sin \theta) = 5\sqrt{10}M \cos(\theta + \varphi)$, 其中 φ 是锐角, 且 $\tan \varphi = \frac{1}{3}$, 所以 $S = 5\sqrt{10}M \cos(\theta + \varphi) \in [-5\sqrt{10}M, 5\sqrt{10}M]$, 进一步得 $S \in [-50, 50]$. $\heartsuit$

评注 7.6.1. 前两种方法都是以基本量 a_1 和 d 为变量来考虑的, 第二种方法似乎略微简洁一些. 第三种方法则是以 a_1 和 a_{10} 为变量来考虑问题的, 也是一个不错的方法.

(2) 与第一问完全类似, $a_5^2 + a_9^2 = a_5^2 + (a_5 + 4d)^2 \leq 10$, 而 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_5 - 10d = \frac{5}{2}(-a_5 - 10d) + \frac{15}{2}a_5$, 所以

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(-a_5 - 10d)^2 + a_5^2} \leq \frac{5\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = 25$$

当且仅当两个平面向量 $(-a_5 - 10d, a_5)$ 和 $(\frac{5}{2}, \frac{15}{2})$ 同向时, 取得最大值. 所以选 C 项.

例 7.7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $(1 - \frac{1}{a_1}) \cdot (1 - \frac{1}{a_2}) \cdots (1 - \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{a_n}$, 记 $b_n = \frac{a_n - 7}{a_n - 5\sqrt{2}}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的最大项是 ().

(A) b_8

(B) b_7

(C) b_6

(D) b_5

解. 当 $n=1$ 时, $1 - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_1}$, 所以 $a_1 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时:

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a_n}$$

用 $n-1$ 替换上式中的 n , 得:

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{a_{n-1}}$$

两式相比得, $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n - 1}{a_n}$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 1$, 因此 $\{a_n\}$ 是 2 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 a_n 的通项公式为 $a_n = n + 1$.

$b_n = \frac{a_n - 7}{a_n - 5\sqrt{2}}$, 分离常数得 $b_n = 1 + \frac{5\sqrt{2} - 7}{a_n - 5\sqrt{2}} = 1 + \frac{5\sqrt{2} - 7}{n + 1 - 5\sqrt{2}}$, 根据反比例函数的性质立刻得 $n=7$ 时, b_n 取得最大值, 如图 7.3 所示. 所以 b_n 的最大项是 b_7 . 也可以研究 $b_{n+1} - b_n$ 的符号来做清楚 b_n 的单调性, 但是在本题中并无必要. ♡

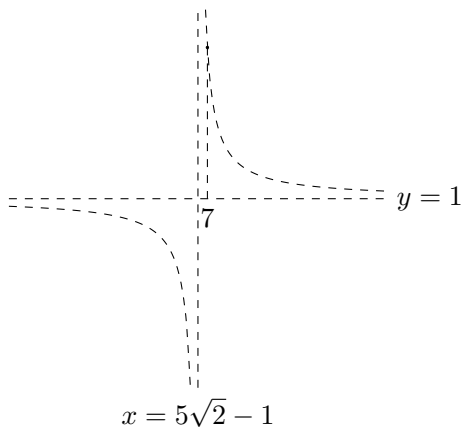


图 7.3:

接下来研究等差数列的前 n 项和公式.

等差数列的前 n 项和公式的形式如下:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

如果能让公式中只包含基本量, 只需将 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入整理即可得到

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)d}{2}$$

或

$$S_n = \frac{1}{2}dn^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

下面我们简要说明前 n 项公式的推导过程:

证明. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1,$$

两式相加得 $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$,

根据等比数列的对称性可知, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = (a_{n-1} + a_2) = a_n + a_1$,
即上式中的每一项都等于 $a_1 + a_n$, 所以

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\text{即 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

这就是等差数列的前 n 项和公式. 这种数列求和的方法称为倒序相加法. $\square$

我们知道, 设一个数列的前 n 项和为 S_n , 那么 $\{S_n\}$ 也是一个数列, 因此自然有这样一个问题:
对于等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和组成的数列 $\{S_n\}$ 有什么性质?

因为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 所以

$$S_{2n} = n(a_1 + a_{2n}) = n(a_n + a_{n+1}), S_{2n-1} = \frac{(2n-1)(a_1 + a_{2n-1})}{2} = (2n-1)a_n.$$

这两个式子的推导过程中用到了等差数列的对称性. 前 n 项和的这两个结论在今后经常用到, 且常与等差数列的对称性相结合.

设 $f(x) = \frac{1}{2}dx^2 + (a_1 - \frac{d}{2})x$, 那么对于 a_1 为首项, d 为公差的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 $S_n = f(n)$, 由此可知前 n 项和组成的数列 $\{S_n\}$ 的图像是 $f(x)$ 在 y 轴右侧部分的图像上的一系列散点. $f(x)$ 是一个经过原点的二次函数, 其开口方向由公差 d 的符号决定.

例 7.8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_{10} > 0, S_{11} < 0$, 那么当 S_n 最大时, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. 事实上, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = a_n$, 当 a_n 为正项时, S_n 递增, 当 a_n 为负项时, S_n 递减.

对于公差 $d < 0$, 首项 $a_1 > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 显然存在唯一的 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_n < 0$, 当且仅当 $n \geq k$; 即 S_n 递减当且仅当 $n \geq k$, 所以 S_n 的最大值是 $\{a_n\}$ 的所有正数项之和, $\{S_n\}$ 的最大项与 $\{a_n\}$ 的最后一个正数项的序数都是 $k-1$, 即 $a_{k-1} > 0$ 且 $a_k < 0$.

另一方面, 因为 S_n 的值可以看成是二次函数在正整数处的函数值, S_n 关于 n 的图像是二次函数图像上的一些点, 所以也可以利用二次函数的图像特点来研究 $\{a_n\}$ 的最大项. 对于公差 $d < 0$ 的等差数列, 二次函数是一个经过原点且开口向上的抛物线, 与轴最接近的正整数就是 S_n 最大值所对应的序号.

对于公差 $d > 0$, 首项 $a_1 < 0$ 的等差数列, 情况完全类似, 留给读者自己考虑.

回到本题, 由 $S_{10} = 5(a_5 + a_6) > 0$ 和 $S_{11} = 11a_6 < 0$ 可知 a_5 是数列 $\{a_n\}$ 的最后一个正数项, 结合前面的讨论, S_n 取最大值时对应的 $n = 5$.

另一方面, 如图所示, 设二次函数与 x 轴的交点为 0 和 x_0 , 根据题意可知 $x_0 \in (10, 11)$, 所以轴的范围是 $(5, \frac{11}{2})$, 因此 5 是离轴最近的正整数, 所以 S_n 取最大值时对应的 $n = 5$. $\heartsuit$

例 7.9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且满足 $S_n = n^2 + 2n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 由公式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

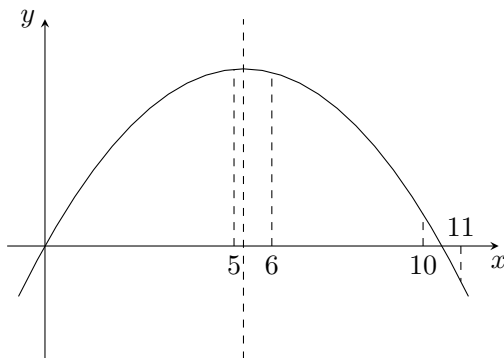


图 7.4:

可知, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 + 2n - n^2 + 2n - 1 - 2n + 2 = 2n + 1.$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1 + 2 = 3$, 而 $a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$, 所以公式 $a_n = 2n + 1$ 也适用于 $n = 1$ 的情况.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$. ♡

评注 7.9.1. 式 $a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$ 是知 S_n 求 a_n 的基本方法. 在这个例题中 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 的情况可以用统一的形式来表达, 但有时 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 则不能合并写成统一的形式, 这时只能写成分段函数的形式.

事实上, 如果已知 $S_n = f(n)$, 补充定义 $S_0 = f(0)$, 那么 $\{a_n\}$ 的通项公式对于 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 的情况可以用统一的形式来表达, 当且仅当 $S_0 = 0$. 对此说明如下: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = f(n) - f(n-1)$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = f(1)$, 而 $f(1) = f(1) - f(0)$, 当且仅当 $f(0) = 0$, 所以只有当 $S_0 = 0$ 时, 公式 $a_n = f(n) - f(n-1)$ 才适用于 $n = 1$ 的情况.

根据这个结论可以方便快捷地判定由 S_n 求出的 a_n 是否需要将 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况分开表示. 例如本题中, $S_0 = 0$, 所以本题中 $\{a_n\}$ 的通项公式可以写成统一的表达式.

例 7.10 (等差数列与裂项相消). (1) 设 $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) 数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\right\}$ 的前 2021 项和为 ().

(A) $\sqrt{2022} + 1$ (B) $\sqrt{2022} - 1$ (C) $\sqrt{2021} + 1$ (D) $\sqrt{2021} - 1$

先介绍两个与等差数列有关的重要的裂项公式. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 那么:

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$$

将这两个等式分别通分, 即可验证其正确性.

裂项的目的是“相消”，即在数列求和问题中，通过裂项尽可能消去大部分的项，从而将数列求和转化为少数几项之和. 下面我们来解例7.10.

解. (1)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

可见，通过裂项我们可以消去大部分的项，从而求出 S_n 的公式.

(2) 考虑裂项公式 $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $S_{2021} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2022} - \sqrt{2021} = \sqrt{2022} - 1$,

所以选 B 项. ♡

例 7.11. 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = \frac{19}{2}$, $a_{n+1} = \frac{38a_n - 1}{4a_n + 42}$, 记 $b_n = \frac{20}{2a_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*$

(1) 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $c_n = b_n b_{n+1} \cos n\pi, n \in \mathbb{N}^*$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若当 n 为偶数时, $T_n \leq tn^2$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围;

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求数列 $\{S_{2n} - S_n\}$ 的最大项.

解. (1) 因为 $b_{n+1} = \frac{20}{2a_{n+1} + 1} = \frac{20}{2 \cdot \frac{38a_n - 1}{4a_n + 42} + 1} = \frac{20(4a_n + 42)}{2(38a_n - 1) + (4a_n + 42)} = \frac{20}{2a_n + 1} = b_n$,
所以 $b_{n+1} - b_n = \frac{20}{2a_n + 1} - \frac{20}{2a_n + 1} = 1$. 又因为 $b_1 = 1$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 可知, $b_n = n$. 而 $\cos n\pi = \begin{cases} -1, & n \text{ 为奇数}, \\ 1, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以

$$T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = -b_1 b_2 + b_2 b_3 - b_3 b_4 + b_4 b_5 - \cdots + (-1)^n b_n b_{n+1}.$$

当 n 为偶数时, 不妨设 $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$, 那么 $T_n = T_{2m} = -b_1 b_2 + b_2 b_3 - b_3 b_4 + b_4 b_5 - \cdots + (-1)^{2m} b_{2m} b_{2m+1}$

并项求和:

$$\begin{aligned} T_{2m} &= (b_3 - b_1)b_2 + (b_5 - b_3)b_4 + \cdots + (b_{2m+1} - b_{2m-1})b_{2m} = 2(b_2 + b_4 + \cdots + b_{2m}) \\ &= 4(1 + 2 + \cdots + m) = 4 \times \frac{m(m+1)}{2} = 2m(m+1) = \frac{1}{2}n^2 + n \end{aligned}$$

$T_n \leq tn^2$ 对任意的 n 为偶数恒成立, 即 $\frac{1}{2}n^2 + n \leq tn^2$ 对 n 为偶数恒成立, 即 $t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ 对 n 为正偶数恒成立, 这等价于 $t \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

所以 t 的范围是 $[1, +\infty)$.

评注 7.11.1. 所谓并项求和, 即将每两项合并转化为易于求和的形式, 再求和. 对于正负交替的摆动数列, 经常可以考虑使用这个技巧.

(3) 因为 $b_n = \frac{20}{2a_n + 1} = n$, 所以 $a_n = \frac{10}{n} - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$,
所以 $S_n = 10\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{2}$,

所以 $S_{2n} = 10(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}) - n$,

不妨记 $M_n = S_{2n} - S_n$, 则 $M_n = 10(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}) - \frac{n}{2}$, 问题转化为求 $\{M_n\}$ 的最大项.

下面考虑 M_n 的单调性, 用 $n+1$ 替换上式中的 n 得 $M_{n+1} = 10(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}) - \frac{n+1}{2}$,

所以 $M_{n+1} - M_n = 10(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}) - \frac{1}{2} = \frac{10}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{2}$,

当 $n=1$ 时 $M_2 - M_1 = \frac{10}{12} - \frac{1}{2} > 0$, 即 $M_1 < M_2$, 当 $n \geq 2$ 时 $M_{n+1} - M_n < 0$, 即 $\{M_n\}$ 递减.

所以 M_n 的最大项是 $M_2 = 10 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - 1 = \frac{29}{6}$, 所以数列 $\{S_{2n} - S_n\}$ 的最大项为 $\frac{29}{6}$. $\heartsuit$

例 7.12. (1) 设 A_n, B_n 分别为等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项之和. 若 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{5n-3}{n+9}$, 则 $\frac{a_8}{b_8} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且对于一切正整数 n , 均有 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{3n+1}$. 则 $\frac{S_6}{T_5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. (1) 用基本量: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d_1 , $\{b_n\}$ 的公差为 d_2

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\frac{1}{2}d_1n^2 + (a_1 - \frac{d_1}{2})n}{\frac{1}{2}d_2n^2 + (b_1 - \frac{d_2}{2})n} = \frac{a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d_1}{b_1 + \frac{1}{2}(n-1)d_2} = \frac{5n-3}{n+9}$$

不妨设 $d_1 = 5d, d_2 = d$, 进一步得到 $a_1 = d, b_1 = 5d$. 所以 $\frac{a_8}{b_8} = \frac{d+7d_1}{5d+7d_2} = \frac{36d}{12d} = 3$.

评注 7.12.1. 事实上, 我们有如下结论:

设 S_n 和 T_n 分别是两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{An+B}{Cn+D}$, 那么对于 $s, t \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_s}{b_t} = \frac{A(2s-1)+B}{C(2t-1)+D}$.

例如在本题中, 根据这个结论可以直接求出 $\frac{a_8}{b_8} = \frac{5 \times 15 - 3}{15 + 9} = 3$.

这个命题简单推导如下: 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别是 d_1 和 d_2 , 那么 $S_n = a_1n + \frac{1}{2}n(n-1)d_1$, $T_n = b_1n + \frac{1}{2}n(n-1)d_2$.

注意到 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d_1$, 不妨设 $\frac{S_n}{n} = An + B$, 其中 A 和 B 仅由 $\{a_n\}$ 的基本量决定.

此时 $a_n = a_1 + (n-1)d_1 = a_1 + \frac{1}{2}(2n-1-1)d_1 = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$.

同理, 设 $\frac{T_n}{n} = Cn + D$, 可得 $b_n = \frac{T_{2n-1}}{2n-1}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{a_s}{b_t} &= \frac{S_{2s-1}}{T_{2t-1}} \times \frac{2t-1}{2s-1} = \frac{S_{2s-1}}{T_{2s-1}} \times \frac{T_{2s-1}}{2s-1} \times \frac{2t-1}{T_{2t-1}} \\ &= \frac{A(2s-1)+B}{C(2s-1)+D} \times [C(2s-1)+D] \times \frac{1}{C(2t-1)+D} = \frac{A(2s-1)+B}{C(2t-1)+D} \end{aligned}$$

(2) 不妨设 $a_n = 2kn - k, b_n = 3kn + k$, 即 $a_1 = k, b_1 = 4k$, 所以 $S_6 = \frac{(k+12k-k) \times 6}{2} = 36k$, $T_5 = \frac{(4k+16k) \times 5}{2} = 50k$, 所以 $\frac{S_6}{T_5} = \frac{18}{25}$. $\heartsuit$

例 7.13. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $b_n = |a_n|$, 试讨论 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的公式.

解. 因为 S_n 是等差数列的前 n 项和, 我们已经知道了它的计算公式, 所以如果能将 T_n 用含有 S_n 的式子表达出来, 也就得到了 T_n 的计算公式.

1° 如果 $a_n \geq 0$, 那么 $b_n = a_n$, $T_n = S_n$.

2° 如果 $a_n \leq 0$, 那么 $b_n = -a_n$, $T_n = -S_n$.

3° 如果 $a_1 > 0$, $d < 0$, 则一定存在唯一的正整数 m , 使 $a_m > 0$ 且 $a_{m+1} < 0$, 根据前面的讨论我们知道 S_n 的最大项就是 S_m . 当 $1 \leq n \leq m$ 时, $b_n = a_n$, 所以 $T_n = S_n$, 而当 $n \geq m+1$ 时, $b_n = -a_n$, 所以 $T_n = S_m - a_{m+1} - a_{m+2} - \cdots - a_n = S_m - (S_n - S_m) = 2S_m - S_n$, 即

$$T_n = \begin{cases} S_n, & 1 \leq n \leq m, \\ 2S_m - S_n, & n \geq m+1. \end{cases}$$

4° 如果 $a_1 < 0$, $d > 0$, 则一定存在唯一的正整数 m , 使 $a_m < 0$ 且 $a_{m+1} > 0$, 根据前述讨论, S_n 的最小项是 S_m , 当 $1 \leq n \leq m$ 时, $b_n = -a_n$, 所以 $T_n = -S_n$, 而当 $n \geq m+1$ 时, $b_n = a_n$, 所以 $T_n = -S_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = -S_m + (S_n - S_m) = S_n - 2S_m$, 即

$$T_n = \begin{cases} -S_n, & 1 \leq n \leq m, \\ S_n - 2S_m, & n \geq m+1. \end{cases}$$

♡

7.2.2 等比数列

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的比都是同一个常数, 那么称这个数列为**等比数列**, 这个常数叫做等比数列的**公比**, 公比常用字母 q 来表示, 显然 $q \neq 0$. 事实上, 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则要求 $a_1, a_n \neq 0$ 且 $q \neq 0$.

与等差中项类似, 在 g 和 h 中间插入一个数 G , 使得 g, G, h 为等比数列, 则称 G 是 g 和 h 的等比中项. 由等比数列的定义可知, G 是 g 和 h 的等比中项, 等价于 $G^2 = gh$.

例 7.14. 已知正实数 p, a, b, c, q 满足 $p \neq q$, 且 p, a, q 成等比数列, p, b, c, q 成等差数列, 试判断关于 x 的二次方程 $bx^2 - 2ax + c = 0$ 的实根个数.

解. 由题设, $pq = a^2$, 设等差数列的公差为 d , 则 $b = p + d$, $c = q - d$, $q = p + 3d$, 因为 $p \neq q$, 所以 $d \neq 0$.

而 $\Delta = 4a^2 - 4bc = 4pq - 4bc = 4pq - 4(p+d)(q-d) = 4dp - 4dq + 4d^2 = 4d(p-q) + 4d^2 = 4d \cdot (-3d) + 4d^2 = -8d^2 < 0$, 所以该二次方程没有实数根.

事实上, 根据“和定积渐大”可知 $pq < bc$, 由此立即得到 $\Delta < 0$.

♡

与等差数列相同, 根据递推式同样可以求出等比数列的通项公式. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 得

$$\begin{aligned} a_2 &= q \cdot a_1, \\ a_3 &= q \cdot a_2 = q^2 \cdot a_1, \\ a_4 &= q \cdot a_3 = q^3 \cdot a_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

归纳得当 $n \geq 2$ 时

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

容易验证 $n = 1$ 也符合这个公式, 这就是等比数列的通项公式. 对于等比数列, 有如下基本性质:

1° **单调性**: 若 $q > 1$, 当 $a_1 > 0$ 时为正项等比数列, 且数列递增, 当 $a_1 < 0$ 时为负项等比数列, 且数列递减.

若 $0 < q < 1$, 当 $a_1 > 0$ 时为正项等比数列, 且数列递减, 当 $a_1 < 0$ 时为负项等比数列, 且数列递增.

若 $q = 1$, 则等比数列为常数列.

若 $q < 0$, 则 $\{a_n\}$ 是正负交替的摆动数列, 即奇数项之间的符号都相同, 偶数项之间的符号也相同.

特别地, 对于 $q > 0$ 且 $a_1 > 0$, 即 $\{a_n\}$ 是正项等比数列的情况, 对 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 两边同时取对数, 得

$$\ln a_n = \ln a_1 + (n-1) \ln q$$

显然 $\{\ln a_n\}$ 是以 $\ln q$ 为公差的等差数列, 在这种看法下, 我们可以建立等差数列与等比数列之间的联系.

2° **对称性**: 设 $p, q, s, t \in \mathbb{N}^*$, 如果 $p+q = s+t$, 那么 $a_p a_q = a_s a_t$. 特别地, 如果 $s = t = r$, 此时 $r = \frac{p+q}{2}$, 则 $a_r^2 = a_p a_q$, 即若 r 是 p 和 q 的等差中项, 则 a_r 是 a_p 和 a_q 的等比中项.

设有函数 $f(x) = a_1 q^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$, 那么 $\{a_n\} (q \neq 0)$ 的项就是 $f(x)$ 在 n 处的函数值, 即 $a_n = f(n)$. 从图像上看, 数列 $\{a_n\}$ 表示的是一组在指数函数 $f(x) = a_1 q^{x-1}$ 的 y 轴右侧部分的图像上均匀离散分布的散点. 我们知道指数函数具有等式性质 $f(c+d) = f(c)f(d)$, 正是因为指数函数具有这一性质, 所以等比数列具有对称性.

3° **等比数列的子数列的性质**: 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 q 是公比, 那么它的子数列

$$a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots, a_{(k-1)m}(k, m \in \mathbb{N}^*)$$

是公比为 q^m 的等比数列.

证明留给读者 (提示: 用基本量表示出子数列中的各项, 再作比即可).

4° 公比的计算公式: 如果 $\{a_n\}$ 是等差数列, $m, n \in \mathbb{N}^*$, 那么公差 q 满足:

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

例 7.15. (1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_3 = 2$, 则 $a_7 =$ _____.

(2) 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_6 + a_5 + a_4 - a_3 - a_2 - a_1 = 49$, 则 $a_9 + a_8 + a_7$ 的最小值为_____.

(3) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 a_{2021} = 1$, 若 $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, 则 $f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{2021}) =$ _____.

(4) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 a_1+1, a_3+3, a_5+5 成等比数列, 且公比为 q , 则 $q =$ _____.

(5) 已知 $\{a_n\}$ 成等比数列, 且 $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt[3]{3}$, 则 $\frac{a_1 + a_{2011}}{a_7 + a_{2017}} =$ _____.

解. (1) $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 2$, 而 $a_7 = a_1 \cdot q^6 = a_1 \cdot (q^2)^3 = 8$.

(2) 考虑以 $a_1 + a_2 + a_3$ 为主元, 则 $(a_6 + a_5 + a_4) - (a_3 + a_2 + a_1) = 49 \Rightarrow (q^3 - 1)(a_3 + a_2 + a_1) = 49$.

显然, $q^3 - 1 > 0$, 所以 $a_3 + a_2 + a_1 = \frac{49}{q^3 - 1}$, 所以

$$a_9 + a_8 + a_7 = q^6(a_3 + a_2 + a_1) = \frac{49q^6}{q^3 - 1}$$

这关于 q^3 是二次比一次的分式函数, 根据不等式可得

$$\begin{aligned} a_9 + a_8 + a_7 &= 49\left(\frac{1}{q^3 - 1} + q^3 + 1\right) = 49\left(q^3 - 1 + \frac{1}{q^3 - 1} + 2\right) \\ &\geq 49 \times (2 + 2) = 196. \end{aligned}$$

当且仅当 $q^3 - 1 = 1$, 即 $q = \sqrt[3]{2}$ 时, 等号成立. 所以所求最小值是 196.

(3) 由 $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ 知, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2x^2+2}{x^2+1} = 2$$

这是 $f(x)$ 的一个等式性质, 即对于乘积为 1 的作用对象, 其函数值之和为 2, 根据等比数列的性质可知 $a_1 a_{2021} = a_2 a_{2020} = a_3 a_{2019} = \cdots = a_{2021} a_1 = 1$, 所以:

$$\begin{aligned} 2[f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{2021})] &= [f(a_1) + f(a_{2021})] + [f(a_2) + f(a_{2020})] + \cdots + [f(a_{2021}) + f(a_1)] \\ &= 2 \times 2021 \end{aligned}$$

所以 $[f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{2021})] = 2021$.

(4) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 而 $1, 3, 5$ 也成等差数列, 所以 $a_1 + 1, a_3 + 3, a_5 + 5$ 也成等差数列, 不妨设其公差为 d' . 又因为 $a_1 + 1, a_3 + 3, a_5 + 5$ 成等比数列, 所以 $\frac{a_5 + 5}{a_3 + 3} = \frac{a_3 + 3}{a_1 + 1} = q$, 由差比定理可知 $\frac{a_3 + 3}{a_1 + 1} = \frac{(a_5 + 5) - (a_3 + 3)}{(a_3 + 3) - (a_1 + 1)} = \frac{2d'}{2d'} = 1$, 所以 $q = 1$.

(5) 由题意得 $q = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$, 而 $\frac{a_1 + a_{2011}}{a_7 + a_{2017}} = \frac{a_1 + a_{2011}}{q^6(a_1 + a_{2011})} = \frac{8}{9}$.

♡

求等比数列的前 n 项和的方法和等差数列有所不同, 需要用到一些新的技巧.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$qS_n = a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1},$$

错位相减, 得

$$(1-q)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

所以

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-q}.$$

如果要使公式中只含有基本量, 上式又可以写成

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

当 $q = 1$ 时, $\{a_n\}$ 是一个常数列, 因此 $S_n = na_n$.

综上所述,

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$$

等比数列的求和公式是一个非常重要的求和公式, 此外, 这种数列求和的方法称为**错位相减法**, 这种方法还可以用来解决另一类数列的求和问题.

例 7.16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}, a_nb_{n+1} + b_{n+1} = nb_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解. (1) 已知 a_n 的公差, 要求其通项公式只需求出首项 a_1 , 令 $n = 1$, 得 $\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3} = 1$, 所以 $a_1 = 2$. 因此 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, 其通项公式为 $a_n = 3n - 1$.

(2) 因为 $a_n = 3n - 1$, 所以 $3nb_{n+1} = nb_n$, 即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{3}$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 所以 $b_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$, 其前 n 项和为 $S_n = \frac{1 - \frac{1}{3}^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$. ♡

关于等比数列的前 n 项和 S_n 有如下结论: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 那么:

$$S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$$

是公比为 q^n 的等比数列.

例 7.17. 记等比数列的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{2n}}{S_n} = 3$, 那么 $\frac{S_{3n}}{S_{2n}} =$ _____.

解. 因为 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 构成等比数列, 设公比为 k , 那么 $\frac{S_{2n}}{S_n} - 1 = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = k = 2$, 所以 $S_{3n} - S_{2n} = k(S_{2n} - S_n) = 2S_{2n} - 2S_n = 2S_{2n} - \frac{2}{3}S_{2n} = \frac{4}{3}S_{2n}$, 所以 $\frac{S_{3n}}{S_{2n}} = \frac{S_{3n} - S_{2n} + S_{2n}}{S_{2n}} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$. ♡

例 7.18. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10} = 10, S_{30} = 70$, 那么 $S_{40} =$ _____.

解. 由前 n 项和的性质, $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}, S_{40} - S_{30}$ 成等比数列, 设公比为 $k = q^{10} > 0$, 则 $S_{30} = S_{30} - S_{20} + S_{20} - S_{10} + S_{10} = 10k^2 + 10k + 10$, 所以 $10k^2 + 10k + 10 = 70$, 解得 $k = 2$ 或 $k = -3$ (舍去), 而 $S_{40} - S_{30} = 10k^3 = 80$, 所以 $S_{40} = 80 + 70 = 150$. ♡

例 7.19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 1 + \lambda a_n$, $\lambda \neq 0$, 证明 $\{a_n\}$ 成等比数列.

解. 因为 $S_n = 1 + \lambda a_n$, 所以 $S_{n+1} = 1 + \lambda a_{n+1}$, 两式相减得 $a_{n+1}(\lambda - 1) = \lambda a_n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1 + \lambda a_1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{1 - \lambda}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{1 - \lambda}$ 为首项, $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ 为公比的等比数列, 所以 $a_n = \frac{1}{1 - \lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^{n-1}$. ♡

例 7.20. 已知 $a_n = (2n + 1) \cdot 3^n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解. 对于形如 $\{b_n c_n\}$ 的数列, 其中 $\{b_n\}$ 是等差数列, $\{c_n\}$ 是等比数列. 那么这样的数列可以用**错位相减法**进行求和.

注意到

$$\begin{aligned} S_n &= 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + 7 \times 3^3 + \cdots + (2n + 1) \cdot 3^n \\ 3S_n &= 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n - 1) \cdot 3^n + (2n + 1) \cdot 3^{n+1} \end{aligned}$$

两式相减, 与等比数列求和的情况不同的是, 这时中间的一些项并没有如之前一样被消去, 但是中间的这些项变成了可求和的形式, 根据等比数列的求和公式:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2n + 1) \cdot 3^{n+1} - 3 \times 3^1 - 2 \times 3^2 - 2 \times 3^3 - \cdots - 2 \times 3^n \\ &= (2n + 1) \cdot 3^{n+1} - 9 - 2 \times \frac{3^2 - 3^{n+1}}{1 - 3} \\ &= 3^{n+1}(2n + 1) + 9 - 3^{n+1} - 9 \\ &= 3^{n+1}(2n + 1) - 3^{n+1} \\ &= 2n \cdot 3^{n+1} \end{aligned}$$

所以 $S_n = n \cdot 3^{n+1}$.

这里提醒读者, 在求解完数列求和问题后, 可以验证一下用通项公式计算出的 a_1 和用前 n 项和公式计算出的 S_1 两者是否相等, 以此来检查求和的结果是否正确.

另解 除了应用错位相减法以外, 还可以用裂项相消的方法. 因为 $\{a_n\}$ 的项具有一次式乘以 3 的幂的形式, 考虑 a_n 可以拆成 $c_{n+1} - c_n$ 的差, 其中 c_n 具有 $c_n = (An + B)3^n$ 的形式, A 和 B 为待定系数. 因为 $(2n + 1) \cdot 3^n = [A(n + 1) + B]3^{n+1} - (An + B)3^n = 2An3^n + (3A + 2B)3^n$, 比较系数

$$\text{可知 } \begin{cases} 2A = 2, \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } A = 1, B = -1, \text{ 所以 } c_n = (n - 1) \cdot 3^n.$$

所以 $S_n = c_2 - c_1 + c_3 - c_2 + \cdots + c_{n+1} - c_n = c_{n+1} - c_1 = n \cdot 3^{n+1} - 0 = n \cdot 3^{n+1}$

对于具有“等差乘等比”结构的数列求和问题, 可以采用错位相减法或者裂项相消法. 对于裂项相消法我们指出, 在熟练掌握之后, 有时并不需要用待定系数法就可以直接观察出裂项的形式. 裂项

相消比错位相减要更简洁,也是解决数列求和问题时更普适的方法,裂项相消比错位相减不知道高到哪里去了,但是用错位相减也不丢人啊,真的不丢人. ♡

习题 7.2

1. 若五项的数列 $\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 满足 $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, 且对任意的 $i, j (1 \leq i < j \leq 5)$, 均有 $a_j - a_i$ 在该数列中.

(1) $a_1 = 0$;

(2) $a_5 = 4a_2$;

(3) $\{a_n\}$ 为等差数列;

(4) 集合 $A = \{a_i + a_j | 1 \leq i < j \leq 5\}$ 含九个元素.

上述论断正确的有_____个.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{5}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 若 $S_n < a$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为_____.

3. “实数 a, b, c, d 依次成等差数列” 是 “ $a + d = b + c$ ” 的_____条件.

4. 已知一无穷等差数列中有 3 项 (顺次排列但不一定相连): 13, 25, 41, 则可以判断得出 2013_____ (填 “是”、“不是”、“不能确定”) 数列中的一项.

5. 等差数列 $2, 5, 8, \dots, 2015$ 与 $4, 9, 14, \dots, 2014$ 的公共项 (具有相同数值的项) 的个数是_____.

6. 正整数数列 $\{a_n\}: a_n = 3n + 2$ 与 $\{b_n\}: b_n = 5n + 3, n \in \mathbb{N}$, 在 $M = \{1, 2, \dots, 2018\}$ 中的公共项的个数是_____.

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = p (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, p \text{ 是常数})$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 “等方差数列”. 下列是对 “等方差数列” 的判断:

(1) 数列 $\{(-1)^n\}$ 是等方差数列;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等方差数列, 则 $\{a_n^2\}$ 是等差数列;

(3) 若 $\{a_n\}$ 等方差数列, 则 $\{a_{kn}\} (k \in \mathbb{N}^*, k \text{ 是常数})$ 也是等方差数列;

(4) 若 $\{a_n\}$ 既是等方差数列, 又是等差数列, 则此数列是常数列.

其中正确命题的序号为_____.

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $\{a_n\}, \{\sqrt{S_n}\}$ 均是公差为 d 的等差数列, 则 $S_n =$ _____.

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 前 n 项和为 S_n . 若数列 $\{\sqrt{8S_n + 2n}\}$ 也是公差为 d 的等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项为互异正数, 且其倒数构成等差数列, 则 $\frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2014} a_{2015}}{a_1 a_{2015}} =$ _____.

11. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $d > 0$, 且 a_2 是 a_1 、 a_4 的等比中项; 记 $b_n = a_{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 对任何正整数 n , 都有 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} < 2$ 成立, 则公差 d 的取值范围是_____.
12. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意正整数 n , 均有 $a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} = 6n + 22$, 则 $a_{2017} =$ _____.
13. 在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 10$, 且 a_3, a_6, a_{10} 成等比数列. 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 $a_5^2 + a_7^2 + 16d = a_9^2 + a_{11}^2$, 则 $\{a_n\}$ 的前 15 项之和 S_{15} 等于_____.
15. 已知等差数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{1000}$ 的前 100 项之和为 100, 最后 100 项之和为 1000, 则 $a_1 =$ _____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项依次构成公差为 d_1 的等差数列, 偶数项依次构成公差为 d_2 的等差数列, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n < a_{n+1}$, 若 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = 75$, 则 $a_8 =$ _____.
17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项的和为 60, 则 $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{12}|$ 的最小值为_____.
18. 设 S_n, T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+6}{n+1}$. 若 $\frac{a_m}{b_m}$ 为质数, 则正整数 m 的值为_____.
19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, 设 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 若对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\frac{A_n}{B_n} = \frac{3n+5}{5n+3}$, 则 $\frac{a_{10}}{b_6} =$ _____.
20. 已知等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且对于一切正整数 n , 均有 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{3n+1}$. 则 $\frac{S_6}{T_5} =$ _____.
21. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $(a_6 - 1)^3 + 2013(a_6 - 1) = 1, (a_{2008} - 1)^3 + 2013(a_{2008} - 1) = -1$, 则 $S_{2013} =$ _____, a_6 与 a_{2008} 的大小关系是_____.
22. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1 > 0$, $a_{2003} + a_{2004} > 0$, $a_{2003} \cdot a_{2004} < 0$, 则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是_____.
23. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $\frac{\sin^2 a_3 - \cos^2 a_3 + \cos^2 a_3 \cos^2 a_6 - \sin^2 a_3 \sin^2 a_6}{\sin(a_4 + a_5)} = 1$, 公差 $d \in (-1, 0)$. 若当且仅当 $n = 9$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值, 则首项 a_1 的取值范围是_____.
24. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且满足 $3a_5 = 8a_{12} > 0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 则 n 为何值时, S_n 取得最大值? 并说明理由.
25. 一个长方体的体积为 8cm^3 , 全表面积为 32cm^2 , 其长、宽、高成等比数列, 则此长方体全部棱长之和为_____.
26. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比是 2 的等比数列, $\{b_n\}$ 是首项是 2, 公差为 5 的等差数列. 同时出现在这两个数列中的数按从小到大的顺序排成数列 $\{x_n\}$, 则 $x_{100} =$ _____.

27. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为零, 且 a_2, a_3, a_9 构成等比数列, 则 $\frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_2 + a_3 + a_4}$ 的值是_____.
28. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $b_n = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数} \\ \sqrt{a_{n+1}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 若 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_2 + b_2 = 108$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.
29. 设数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21}$ 满足: $|a_{n+1} - a_n| = 1 (n = 1, 2, 3, \dots, 20)$, a_1, a_7, a_{21} 成等比数列. 若 $a_1 = 1, a_{21} = 9$, 则满足条件的不同的数列的个数为_____.
30. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 t , 前 n 项和 $S_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 t 的取值范围为_____.
31. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 并且对任意正整数 n 成立 $S_{n+2} = 4S_n + 3$, 则 a_2 的值是_____.
32. 已知一个等比数列前 2014 项之和为 200, 前 4028 项之和为 380, 则前 6042 项之和为_____.
33. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2^{10}S_{30} + S_{10} = (2^{10} + 1)S_{20}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为_____.
34. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2$, q 是公比. 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, T_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{2n} = 2T_n$, 求 q 的值.
35. 已知等比数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 5$, $a_4 = 625$, 则 $\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{\log_5 a_k \log_5 a_{k+1}} =$ _____.
36. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_{11} + a_{14} = -6$, 则前 17 项的和 $a_1 + a_2 + \dots + a_{17}$ 等于_____.
37. 公差为 d , 各项皆为正整数的等差数列 $\{a_n\}$, 若 $a_1 = 1919$, $a_m = 1949$, $a_n = 2019$, 则正整数 $m + n$ 的最小值是_____.
38. 若 2014 为一个正整数等差数列的第八项, 则该数列首项的最小值为_____.
39. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2 + a_{10}^2 \leq 10$. 则 $S = a_{10} + a_{11} + \dots + a_{19}$ 的取值范围是_____.
40. 下面给出一个“直角三角形数阵”:
- $$\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16} \\ \dots \end{array}$$
- 满足每一列的数成等差数列, 从第三行起, 每一行的数成等比数列, 且每一行的公比相等, 记第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij} (i \geq j, i, j \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_{n3} =$ _____.
41. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 存在两项 a_m 和 a_n , 使得 $\sqrt{a_m a_n} = 8a_1$, 且 $a_9 = a_8 + 2a_7$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值是_____.
42. 设 $0 < a < b$, 已知 a, s, t, b 依次成等差数列, a, u, v, b 依次成等比数列, 记 $x = st(s+t), y = uv(u+v)$, 则 x, y 的大小关系是_____.

7.3

求数列的通项公式

7.3.1 累加法和累乘法

这一节中我们将讨论一般情况下求数列通项公式的求法.

等差数列和等比数列都是递推数列, 即它们的项 a_n 是由前面的若干项确定的. 例如等差数列的递推公式为

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

其中 d 是常数.

如果将等差数列递推公式中的常数 d 换成一个与 n 有关的式子 $f(n)$, 即

$$a_{n+1} - a_n = f(n).$$

此时可以用**累加法**来求数列的通项公式. 由 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 可知

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= f(n-1) \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= f(n-2) \\ &\vdots \\ a_2 - a_1 &= f(1) \end{aligned}$$

以上各式两边累加, 得

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_2 - a_1 = a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

即

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

事实上, 对给定的数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项分别作差得到的新数列称为 $\{a_n\}$ 的**(一阶) 差分数列**, 如果记该数列为 $\{b_n\}$, 则 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 即 $b_n = f(n)$.

如果 a_1 已知, 且 $f(n)$ 可求和, 便求出了 $\{a_n\}$ 的通项公式. 特别地, 对于等差数列而言, $f(n)$ 是常函数 $f(n) = d$, 根据上式立刻得到等差数列的通项公式:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

例 7.21. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n + 1 + a_n, n \in \mathbb{N}^*$, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}}\right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

解. (1) 由题意可知

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \ln \frac{n+1}{n} \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \ln \frac{n}{n-1} \\ &\vdots \\ a_2 - a_1 &= \ln \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

累加得, $a_n - a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \ln \frac{i+2}{i+1} = \ln \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n}{n-1} \times \cdots \times \frac{3}{2} \right) = \ln \frac{n+1}{2}$

所以 $a_n = 1 + \ln \frac{n+1}{2}$.

(2) 这个递推式不能直接用累加法. 考虑对递推式两边同时除以 2^{n+1} , 得

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

记 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 即 $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$, 由此可得

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ b_{n-1} - b_{n-2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \\ &\vdots \\ b_2 - b_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \end{aligned}$$

累加, 根据等比数列的求和公式得,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

所以 $a_n = 2^n b_n = 3^n - 2^n$.

(3) 由累加法及等比数列的求和公式可得 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$,

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}} &= 2 \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2019} \right) \end{aligned}$$

所以 $\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}} \right] = 1$.

♡

与累加法类似的还有累乘法, 我们以最基本的等比数列为例, 它的递推公式为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

其中 q 为常数, 如果将 q 换成与 n 有关的式子 $f(n)$, 则可以运用**累乘法**求通项公式, 由递推式可知

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= f(n-1), \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} &= f(n-2), \\ &\vdots \\ \frac{a_2}{a_1} &= f(1),\end{aligned}$$

上面各式两边累乘可得

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{i=1}^{n-1} f(i).$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} f(i).$$

例 7.22. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 6$, 且 $a_{n+1} = \frac{n+3}{n}a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, $3a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^2 a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ().

(A) $\frac{n^2}{3^{n-1}}$ (B) $\frac{n^2+3}{3^n+1}$ (C) $\frac{4n^2+2}{3^{n+1}}$ (D) $\frac{n^2+1}{3^n-1}$

解. (1) 由累乘法可得 $a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+3}{k} = 6 \times \frac{4}{1} \times \frac{5}{2} \times \cdots \times \frac{n+2}{n-1} = 6 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3} = n(n+1)(n+2)$.

(2) 根据累乘法,

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot n^2.$$

所以选择 A 项.

另解 本题第二小问可以构造等比数列来求解, 因为 $3a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2}a_n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{n^2}$, 所以 $\{\frac{a_n}{n^2}\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 所以 $\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{3^{n-1}}$, 所以 $a_n = \frac{n^2}{3^{n-1}}$. $\heartsuit$

7.3.2 S_n 法

下面我们讨论求数列通项公式的 S_n 法. 所谓 S_n 法求通项公式即一类“由 S_n 求 a_n ”问题的求解方法, 这种方法的基本理论是公式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

我们已经解决过一些已知 $S_n = f(n)$, 求 a_n 的问题, 要解决这类问题直接套用上述公式即可. 特别地, 如果我们在形式上补充定义 $S_0 = f(0)$, 那么 $\{a_n\}$ 的通项公式对于 $n = 1$ 和 $n \geq 2$ 的情况可以用统一的形式来表达等价于 $S_0 = 0$, 参见 7.9 的评注.

如果题给条件不是 $S_n = f(n)$ 而是 $S_n = f(a_n)$, 此时可以考虑将 a_n 写成 $S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$, 从而使题给条件变成了数列 $\{S_n\}$ 的递推公式, 再用其他方法求 S_n 的通项公式, 进而根据公式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases} \text{ 求出 } a_n.$$

另一方面, 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 可得 $a_n = f(a_n) - f(a_{n-1})$, 这又是一个关于 a_n 的递推公式, 如果这个递推公式处理起来很方便, 也可以用这种方法直接求出 a_n 的表达式.

对于 $S_n = f(a_n)$ 形式的条件, 以上两种方法在解决问题时都经常用到, 到底是先求 S_n 再求 a_n 还是直接求 a_n , 则要根据具体问题具体分析, 选用一个更为简捷的方法.

例 7.23. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 4a_n - 3 (n = 1, 2, \cdots)$. 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

解. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4(a_n - a_{n-1})$, 所以 $a_n = \frac{4}{3}a_{n-1}$, 又因为当 $n = 1$ 时 $a_1 = S_1 = 4a_1 - 3$, 所以 $a_1 = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 是 1 为首项 $\frac{4}{3}$ 为公比的等比数列, 所以 $a_n = (\frac{4}{3})^{n-1}$. ♡

例 7.24. 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 是数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 且 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. (1)

证明. 类比前 n 项和的处理方法, 考虑到 $S_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, 所以 $\frac{2b_{n-1}}{b_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 整理得 $b_{n-1} + \frac{1}{2} = b_n$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列. □

(2) 因为 $b_1 = S_1$, 所以当 $n = 1$ 时有 $\frac{2}{S_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{3}{b_1} = 2$, 所以 $b_1 = \frac{3}{2}$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项 $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 所以 $b_n = \frac{1}{2}n + 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}n + 1}{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} = \frac{n+2}{n+1}$; 当 $n = 1$ 时, $S_1 = b_1 = \frac{3}{2}$, 综上所述, $S_n = \frac{n+2}{n+1}$.

下面是知 S_n 求 a_n 的问题, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$; 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n=1, \\ -\frac{1}{n(n+1)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

♡

评注 7.24.1. 本题第一小问实际上是求 $\{b_n\}$ 通项公式的问题, 第一小问适合将 S_n 换成 $\frac{b_n}{b_{n-1}}$, 直接处理关于 b_n 的递推式, 而不适合先构造 S_n 的递推式 $S_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{f(S_n)}{f(S_{n-1})}$ 求出 S_n 再求 b_n .

本题的第二小问实际上是两个问题, 一个是知前 n 项积求通项, 一个是知前 n 项和求通项, 这两个问题直接套用公式计算即可, 需要注意一下首项能否合并的细节, 正如知 S_n 求通项可以用 S_0 是否得零来判定能否合并, 知前 n 项积 T_n 求通项也可以类似地用 T_0 是否得 1 来判定你能否合并,

例如本题中的 $b_0 = 1$, 所以 S_n 是可以用一个统一的表达式来表示的, 而 $S_0 = 2 \neq 0$, 所以 a_1 需要单独写出.

7.3.3 一阶常系数线性递推数列

在前面的讨论中, 我们着重介绍了两类特殊的递推关系 $a_n - a_{n-1} = f(n-1)$ 和 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1)$, 并且讲述了累加法和累乘法作为解这类递推关系的思路. 在这一小节和下一小节中将以一阶和二阶的情况为例, 介绍常系数线性递推数列求通项的几种常用方法.

所谓 k 阶常系数线性递推数列, 是指这样的数列 $\{a_n\}$, 满足如下形式的递推公式

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n), n \geq k$$

其中 $C_1, C_2, \cdots$ 是 k 个常数, $f(n)$ 是以序数 n 为自变量的函数.

对于阶数较低的情况而言, 经常可以采用一些较为简单和自然的方法, 快速有效地解出 a_n 的通项. 在这一小节和下一小节中我们将讨论 $k=1$ 和 $k=2$ 的情况, 给出求解通项的一些技巧和实例.

一阶常系数线性递推公式具有如下形式:

$$a_n = k a_{n-1} + f(n)$$

其中 k 为常数且 $k \neq 0$.

我们先考虑 $f(n) = b$ (b 为常数) 的情况, 这时 $a_n = k a_{n-1} + b$, 事实上, 数列可分为如下几种情况:

若 $k=1$, 则 $a_n = a_{n-1} + b$, 此时 $\{a_n\}$ 是公差为 b 的等差数列, $a_n = a_1 + (n-1)b$;

若 $k \neq 1, b=0$, 此时 $a_n = k a_{n-1}$, 这是一个一阶常系数线性齐次递推公式, 此时 $\{a_n\}$ 是公比为 k 的等比数列, $a_n = a_1 k^{n-1}$.

若 $k \neq 1$ 且 $b \neq 0$, 这是一般的一阶递推关系.

定理 7.3.1. 已知数列 $\{u_n\}$ 的首项为 u_1 , 且 $u_n = k u_{n-1} + b$, 其中 k 和 b 均为常数, 且 $k, b \neq 0, k \neq 1$, 则 $\{u_n\}$ 的通项公式为:

$$u_n = (u_1 + \frac{b}{k-1}) k^{n-1} - \frac{b}{k-1}.$$

这个定理的具体结论并不要求记忆, 但是要熟练掌握解一般的一阶递推关系的方法.

证明. 设想 $c_n = u_n + \lambda$, λ 为常数, 且满足 $c_n = k c_{n-1}$, 即 $u_n = k u_{n-1} + k\lambda - \lambda$, 比较系数可知 $k\lambda - \lambda = b$, 所以 $\lambda = \frac{b}{k-1}$. 这时 $\{c_n\}$ 是以 $u_1 + \lambda$ 为首项, k 为公比的等比数列, 所以 $c_n = (u_1 + \lambda) k^{n-1}$, 所以 $u_n = (u_1 + \lambda) k^{n-1} - \lambda$, 代入 $\lambda = \frac{b}{k-1}$ 得 $u_n = (u_1 + \frac{b}{k-1}) k^{n-1} - \frac{b}{k-1}$. $\square$

这种证明方法是利用待定系数法构造辅助数列 $\{c_n\}$, 使得 $\{c_n\}$ 具有齐次的递推公式, 从而归结为等比数列的通项公式问题.

另证 1 因为 $u_n = k u_{n-1} + b$, 所以 $u_{n+1} = k u_n + b$, 两式相减得 $u_{n+1} - u_n = k(u_n - u_{n-1})$, 所以数列 $\{u_{n+1} - u_n\}$ 是以 $u_2 - u_1$ 为首项, k 为公比的等比数列. 因为 $u_2 - u_1 = k u_1 + b - u_1 = (k-1)u_1 + b$, 所以 $u_{n+1} - u_n = [(k-1)u_1 + b] k^{n-1}$, 另一方面 $u_{n+1} = k u_n + b$, 代入解得 $u_n = (u_1 + \frac{b}{k-1}) k^{n-1} - \frac{b}{k-1}$.

另证 2 我们也可以用解递推关系的一般方法来解一阶递推关系, 为此我们先说明如下命题:

引理 7.1. 设 $u_n = b_n$ 是递推公式 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k} + f(n), n \geq k$ 的一个特解 (满足递推公式的不含任意常数的解), $u_n = B_n$ 是其对应的齐次递推公式 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k}, n \geq k$ 的通解 (含有任意常数的解, 并且含有若干常数的通解可以代表递推公式的所有解), 则 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k} + f(n), n \geq k$ 的通解是 $u_n = B_n + b_n$.

一阶齐次递推公式的通解就是等比数列的通项公式, 而二阶和二阶以上齐次递推数列的通项可以特征方程的方法求出 (将在下一小节介绍), 因此要求出 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k} + f(n), n \geq k$ 的解, 只需求出它的一个特解.

证明. 因为 b_n 是 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k} + f(n), n \geq k$ 的特解, 所以 $b_n = C_1 b_{n-1} + C_2 b_{n-2} + \cdots + C_k b_{n-k} + f(n)$,

又因为 B_n 是 $u_n = C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} + \cdots + C_k u_{n-k}$ 的通解,

所以 $B_n = C_1 B_{n-1} + C_2 B_{n-2} + \cdots + C_k B_{n-k}$,

所以 $b_n + B_n = C_1 b_{n-1} + C_2 b_{n-2} + \cdots + C_k b_{n-k} + f(n) + C_1 B_{n-1} + C_2 B_{n-2} + \cdots + C_k B_{n-k} = C_1 (b_{n-1} + B_{n-1}) + C_2 (b_{n-2} + B_{n-2}) + \cdots + C_k (b_{n-k} + B_{n-k}) + f(n)$. $\square$

关于 $f(n)$ 为多项式函数或者指数函数的情况, 又有如下引理:

引理 7.2. 在递推关系 $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n), n \geq k$ 中, 如果 $f(n)$ 是关于 n 的 m 次多项式函数, 且 “1” 是特征方程 $\alpha^k - C_1 \alpha^{k-1} - C_2 \alpha^{k-2} - \cdots - C_k = 0$ 的 r 重根 (特别地, 若 1 不是特征方程的根, 则 $r = 0$), 那么该非齐次递推关系有特解 $u_n = n^r g(n)$, 其中 $g(n)$ 是关于 n 的 m 次多项式函数, 系数待定.

引理 7.3. 在递推关系 $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n), n \geq k$ 中, 如果 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数 $f(n) = c \cdot b^n$, 且 “ b ” 是特征方程 $\alpha^k - C_1 \alpha^{k-1} - C_2 \alpha^{k-2} - \cdots - C_k = 0$ 的 r 重根 (特别地, 若 b 不是特征方程的根, 则 $r = 0$), 那么该非齐次递推关系有特解 $u_n = A n^r b^n$, 其中 A 是待定系数.

两个引理的证明从略.

回到定理 7.3.1 的证明, 由引理 7.1 先求出对应的齐次递推公式 $u_n = k u_{n-1}$ 的通解 $b_n = C k^{n-1}$ (C 为任意常数), 由引理 7.2, 1 不是特征方程 $\alpha - k = 0$ 的根, 且这里的 $f(n)$ 次数为 0, 所以特解为 $B_n = A$, A 为待定常数, 代入递推公式, $A = kA + b$, 所以 $A = \frac{b}{1-k}$, 所以原非齐次递推公式的通解是 $u_n = b_n + B_n = C k^{n-1} - \frac{b}{k-1}$, 代入初值条件可得 $u_1 = C - \frac{b}{k-1}$, 所以 $C = u_1 + \frac{b}{k-1}$, 所以 $\{u_n\}$ 的通项公式为 $u_n = (u_1 + \frac{b}{k-1}) k^{n-1} - \frac{b}{k-1}$.

从这种证明方法中可以看出, 虽然引理的形式比较复杂, 但是用引理解一阶情况的问题还是相对比较简洁的.

例 7.25. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 (待定系数法) 设 λ 满足 $a_{n+1} + \lambda = 2(a_n + \lambda)$, 比较可得 $\lambda = 3$, 所以 $\{a_n + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

评注 7.25.1. 熟练之后, 如果能直接观察出辅助数列的形式, 也可以不用待定系数法.

另解 1 (作差法) 因为 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 所以 $a_n = 2a_{n-1} + 3$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1})$, 所以 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 又因为 $a_2 - a_1 = 2 \times 1 + 3 - 1 = 4$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 4 \times 2^{n-1}$, 又因为 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

另解 2 (一般法) 对应齐次递推的通解为 $C \cdot 2^{n-1}$ (C 为任意常数), 因为 1 不是特征方程 $\alpha - 2 = 0$ 的根, 且多项式的次数为 0, 所以原非齐次递推的特解为 A , 代入比较可知 $A = -3$, 所以原非齐次递推的通解为 $a_n = C \cdot 2^{n-1} - 3$, 代入初值条件 $a_1 = 1$ 解得 $C = 4$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

评注 7.25.2. 从这道例题可以看出, 一般法虽然是花里胡哨的方法, 但是其处理思路却十分固定和清晰. 运用一般法求递推数列的通项基本流程如下: 先根据引理 7.3.1 和其他引理求出通解, 再代入初值条件 (对于一阶情况而言, 是代入首项) 求出任意常数 C 在给定初值条件下的取值.

例 7.26. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + n$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 本题中 $f(n) = n$, 用一般法仍然可以求解, 对应齐次递推的通解是 $B_n = C \cdot 2^{n-1}$, 因为 1 不是特征方程 $\alpha - 2 = 0$ 的根, 而 $f(n)$ 的次数是 1, 所以原非齐次递推的特解为 $b_n = An + B$, 代入得 $An + A + B = 2An + 2B + n$, 整理得 $-An + A - B = n$, 比较系数 $\begin{cases} -A = 1, \\ A - B = 0, \end{cases}$ 所以 $A = -1$, $B = -1$, 所以 $a_n = C \cdot 2^{n-1} - n - 1$, 代入初值条件 $a_1 = 1$ 得 $1 = C - 1 - 1$, 所以 $C = 3$, 所以 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$.

另解 1 除了用一般法以外, 还可以用作差法, 因为 $a_{n+1} = 2a_n + n$, 所以 $a_n = 2a_{n-1} + n - 1$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) + 1$, 因为 $a_2 - a_1 = 2a_1 + 1 - 1 = 2$, 根据定理 7.3.1 可知 $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, 代入 $a_{n+1} = 2a_n + n$ 得 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$.

另解 2 待定系数法, 设想 $a_{n+1} + A(n+1) + B = 2(a_n + An + B)$, 即 $a_{n+1} = 2a_n + An + B - A$, 所以 $A = 1$, $B - A = 0$, 所以 $A = B = 1$, 所以 $\{a_n + n + 1\}$ 是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列, $a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$, 所以 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$. ♡

例 7.27. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + n^2$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 用一般法求解, 对应的齐次递推公式的通解为 $B_n = C \cdot 2^{n-1}$, 因为 1 不是特征方程 $\alpha - 2 = 0$ 的根, 而 $f(n)$ 的次数是 2, 所以原非齐次递推的特解为 $b_n = An^2 + Bn + D$, 代入递推公式得 $A(n+1)^2 + B(n+1) + D = 2An^2 + 4Bn + 2D + n^2$, 所以 $(A+1)n^2 + (B-2A)n + D - A - B = 0$, 即 $\begin{cases} A+1=0, \\ B-2A=0, \\ D-A-B=0, \end{cases}$ 解得 $A = -1, B = -2, D = -3$, 所以 $b_n = -n^2 - 2n - 3$, 所以 $a_n = B_n + b_n = C \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$, 代入初值条件 $a_1 = 1$ 得 $C - 6 = 1$, 所以 $C = 7$, 所以 $a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$.

此外, 也可以使用两次作差法来求解: 每作差一次, 都可以使 $f(n)$ 降低一次, 从而最终转化为等比数列的通项问题. ♡

例 7.28. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 本题中的递推公式所对应的齐次递推公式的通解为 $B_n = C \cdot 2^{n-1}$, 因为 2 是特征方程 $\alpha - 2 = 0$ 的 1 重根, 由引理 7.3 可知原非齐次递推公式的特解是 $b_n = An2^n$, 其中 A 是待定系数, 代入递推关系得 $A(n+1)2^{n+1} = An2^{n+1} + 2^n$, 即 $An2^{n+1} + A \cdot 2^{n+1} = An2^{n+1} + 2^n$. 所以 $A = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n = B_n + b_n = n2^{n-1} + C \cdot 2^{n-1}$, 代入初值条件得 $a_1 = C + 1 = 1$, 所以 $C = 0$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$.
另解 递推公式两边同时除以 2^{n+1} , 得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$, 所以数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 所以 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}n$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$. ♡

例 7.29. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 本题中的递推公式所对应的齐次递推公式的通解为 $B_n = C \cdot 2^{n-1}$, 因为 3 不是特征方程 $\alpha - 2 = 0$ 的根, 由引理 7.3 可知原非齐次递推公式的特解是 $b_n = A \cdot 3^n$, 其中 A 是待定系数, 代入递推关系得 $3A \cdot 3^n = 2A \cdot 3^n + 3^n$, 比较系数可知 $A = 1$, 所以 $a_n = b_n + B_n = 3^n + C \cdot 2^{n-1}$, 代入初值条件 $a_1 = 3 + C = 1$ 得 $C = -2$, 所以 $a_n = 3^n - 2^n$.

另解 递推公式两边同时除以 2^{n+1} , 再用累加法, 过程参见例 7.21 的第二小问. ♡

评注 7.29.1. 从以上两个例题可以看出, 对于 $a_{n+1} = ka_n + f(n)$, 当 $f(n)$ 是指数函数时, 既可以用一般法求解, 也可以对递推公式两边同时除以 k^{n+1} , 做辅助数列 $\{\frac{a_n}{k^n}\}$.

例 7.30 (取倒数). (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 4}$, 求数列 a_n 的通项公式.

(2) 已知数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足关系式 $(2 - a_{n+1})(4 + a_n) = 8$, 且 $a_0 = 2$, 则 $\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i}$ 的值是_____.

解. (1) 取倒数, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + \frac{3}{2}$, 记 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 $b_{n+1} = 2b_n + \frac{3}{2}$, 由待定系数法得到 $b_{n+1} + \frac{3}{2} = 2(b_n + \frac{3}{2})$, 所以 $\{b_n + \frac{3}{2}\}$ 是以 $\frac{5}{2}$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $b_n + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-2}$, 所以 $b_n = 5 \cdot 2^{n-2} - \frac{3}{2}$, 所以 $a_n = (5 \cdot 2^{n-2} - \frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{5 \cdot 2^{n-1} - 3}$.

(2) 整理得, $2a_n - 4a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 0$, 即 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{4 + a_n}$, 取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + \frac{1}{2}$, 由待定系数法 $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 2(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2})$, 所以 $\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} = 2^n$, 所以 $\frac{1}{a_n} = 2^n - \frac{1}{2}$.
 所以

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i} = \frac{1}{2}(a^{n+2} - n - 3).$$

♡

评注 7.30.1. 形如 $a_{n+1} = \frac{a_n}{ta_n + k}$ (t, k 为常数) 的递推公式, 可以通过取倒数转化辅助数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的一阶常系数线性递推公式, 再用其他方法求解.

例 7.31 (取对数). 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = 3 \cdot a_n^4$, 求数列 a_n 的通项公式.

解. 显然对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n > 0$, 对递推公式两边同时取以 3 为底的对数, 得

$$\log_3 a_{n+1} = 1 + 4 \log_3 a_n.$$

令 $b_n = \log_3 a_n$, 即 $b_{n+1} = 4b_n + 1$, 用待定系数法得 $b_{n+1} + \frac{1}{3} = 4(b_n + \frac{1}{3})$, 所以 $\{b_n + \frac{1}{3}\}$ 是 $\frac{1}{3}$ 为首项, 4 为公比的等比数列, 所以 $b_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4^{n-1}$, 所以 $b_n = \frac{4^{n-1}}{3} - \frac{1}{3}$, 所以 $a_n = \log_3 b_n = 3^{\frac{4^{n-1}-1}{3}}$.
♡

评注 7.31.1. 形如 $a_{n+1} = t \cdot a_n^k$ (t, k 为常数, $t > 0$) 的递推公式, 可以通过取对数转化辅助数列 $\{\log_t a_n\}$ 的一阶常系数线性递推公式, 再用其他方法求解.

例 7.32. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, 且当 $n \geq 3$ 时, $\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}$.

解. 等式两边同时除以 $\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$, 得

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}} - 2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1$$

令 $b_n = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$, $n \geq 3$, 即 $b_n - 2b_{n-1} = 1$, 由待定系数法得 $b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$, 所以 $\{b_1 + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 即 $b_n = 2^n - 1$.

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (2^n - 1)^2$, 由累乘法可知, 当 $n \geq 2$ 时

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} (2^k - 1)^2.$$

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 1 & , n = 1, \\ \prod_{k=1}^{n-1} (2^k - 1)^2 & , n \geq 2. \end{cases}$$

♡

7.3.4 二阶常系数线性递推数列

意大利数学家斐波那契 (Leonardo Fibonacci) 提出过一个“小兔繁殖问题”, 在这个问题中可以抽象出一个由如下递推关系给出的数列:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$

这是一个典型的二阶常系数线性齐次递推数列. 一般地, 已知齐次递推关系

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n (p \neq 0, q \neq 0)$$

称方程 $x^2 - px - q = 0$ 是该齐次递推关系关系的特征方程, 该方程的根

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 + 4q}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 + 4q})$$

称为特征根.

注意到如果 λ 是特征根, 那么数列 $\{\lambda^n\}$ 将满足齐次递推关系:

$$\lambda^n (\lambda^2 - p\lambda - q) = 0 \Rightarrow \lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n$$

进一步地, λ_1^n 和 λ_2^n 的任意线性组合构成的数列 $\{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n\}$ (其中 C_1 和 C_2 是任意常数) 也满足齐次递推关系 (验证留给读者). 最后, 我们还能证明该递推数列 $\{u_n\}$ 的所有解都可以表示成 $\{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n\}$ 的形式, 也即这是它的通解.

进一步考虑, 如果 $p^2 + 4q = 0$, 此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 即特征根是重根, 这时 λ^n 和 $n\lambda^n$ 的任意线性组合构成的数列 $\{C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n\}$ (其中 C_1 和 C_2 是任意常数) 是递推关系的通解.

定理 7.3.2. 已知齐次递推关系

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n (p \neq 0, q \neq 0, p^2 + 4q = 0)$$

记 λ_1 和 λ_2 是特征方程 $\alpha^2 = p\alpha + q$ 的两个根 (可能有重根), 那么:

- (1) 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则该齐次递推关系的通解为 $\{C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n\}$ (其中 C_1 和 C_2 是任意常数).
- (2) 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 则该齐次递推关系的通解为 $\{C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n\}$ (其中 C_1 和 C_2 是任意常数).

定理的证明从略.

例 7.33. 斐波那契数列满足递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$, 且 $F_1 = 1, F_2 = 1$, 求 $\{F_n\}$ 的通项公式.

解. 由定理 7.3.2 可知, 通解为 $F_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, 解方程 $\lambda^2 = \lambda + 1$ 得 $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 所以 $F_n = C_1(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, 代入初值条件 $F_1 = 1$ 和 $F_2 = 1$ 得

$$\begin{cases} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})C_1 + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})C_2 = 1, \\ (\frac{3-\sqrt{5}}{2})C_1 + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})C_2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases} \text{ 所以 } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

另解 (待定系数法) 设 $F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n)$, 即 $F_{n+2} = (\alpha + \beta)F_{n+1} - \alpha\beta F_n$, 所以

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha\beta = -1, \end{cases} \text{ 所以 } \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 就是两个特征根, 不妨记 } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ 令 } b_n = F_{n+1} - \alpha F_n,$$

所以 $b_{n+1} = \beta b_n$, 又因为 $b_1 = 1 - \alpha$, 所以 $\{b_n\}$ 是以 $1 - \alpha$ 为首项, β 为公比的等比数列, 所以 $b_n = (1 - \alpha)\beta^{n-1}$, 所以 $F_{n+1} - \alpha F_n = (1 - \alpha)\beta^{n-1}$.

$$\text{等式两边同除以 } \alpha^{n+1} \text{ 得 } \frac{F_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{F_n}{\alpha^n} = \frac{1-\alpha}{\alpha\beta} \cdot (\frac{\beta}{\alpha})^n$$

由累加法可得 $\frac{F_n}{\alpha^n} = \frac{F_1}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{\beta}{\alpha})^i = \frac{1}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha\beta} \cdot \frac{\frac{\beta}{\alpha} - (\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$, 结合 $\alpha + \beta = 1$ 得 $\frac{1-\alpha}{\beta} = 1$, 所以

$$\frac{F_n}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\beta}{\alpha} - (\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} - (\frac{\beta}{\alpha})^n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \right) = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\text{所以 } F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

♡

评注 7.33.1. 对比两种方法可知, 待定系数法的过程需要构造辅助数列, 从而将二阶问题转化为一阶问题, 一步步顺次解决, 书写起来更自然、更有次序, 而用定理求解则比较直接、简洁, 另外, 两种方法都用到了特征方程和特征根的概念, 我们将求解二阶线性常系数齐次递推数列的方法称为**特征根法**.

例 7.34. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, $S_{n+1} = 4a_n + 2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 因为 $S_{n+1} = 4a_n + 2$, 所以 $S_{n+2} = 4a_{n+1} + 2$, 两式相减得 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 所以该递推公式的通解为 $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 n \cdot 2^n$, 因为 $S_2 = 4a_1 + 2 = 6$, 所以 $a_2 = S_2 - a_1 = 5$, 代入初值条件 $a_1 = 1, a_2 = 5$ 得
$$\begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 1, \\ 4C_1 + 8C_2 = 5, \end{cases} \quad \text{解}$$
得 $C_1 = -\frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{4}$, 所以 $a_n = -2^{n-2} + 3n \cdot 2^{n-2} = (3n-1)2^{n-2}$.

另解(待定系数法) 由待定系数法可知 $(a_{n+2} - 2a_{n+1}) = 2(a_{n+1} - 2a_n)$, 所以数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, 两边同时除以 2^{n+1} 可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}$, 所以 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{3}{4}$ 为公差的等差数列, 所以 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$, 所以 $a_n = (3n-1)2^{n-2}$. ♡

例 7.35. 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 10$, 且对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有

$$n(n+1)a_{n+2} = 5n(n+2)a_{n+1} - 6(n+1)(n+2)a_n,$$

求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解. 两边同时除以 $n(n+1)(n+2)$, 并记 $b_n = \frac{a_n}{n}$, 则 $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n$, 其特征方程的两个根为 2 和 3, 所以 b_n 的通解为 $b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$, 代入初值条件 $b_1 = 1, b_2 = \frac{a_2}{2} = 5$ 得 $C_1 = -1, C_2 = 1$, 所以 $b_n = 3^n - 2^n$ (也可以做辅助数列), 所以 $a_n = n \cdot 3^n - n \cdot 2^n$.

记 $T_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n \times 3^n$, 注意到 $n \cdot 3^n = c_{n+1} - c_n$, 其中 $c_n = (\frac{1}{2}n - \frac{3}{4})3^n$, 则

$$T_n = c_2 - c_1 + c_3 - c_2 + \cdots + c_{n+1} - c_n = c_{n+1} - c_1 = (\frac{1}{2}n - \frac{1}{4})3^{n+1} + \frac{3}{4}$$

同理, 记 $T'_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \times 2^n$, 注意到 $n \cdot 2^n = d_{n+1} - d_n$, 其中 $d_n = (n-2)2^n$, 则

$$T'_n = d_2 - d_1 + d_3 - d_2 + \cdots + d_{n+1} - d_n = d_{n+1} - d_1 = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$\text{所以 } S_n = T_n - T'_n = (\frac{1}{2}n - \frac{1}{4})3^{n+1} - (n-1)2^{n+1} - \frac{5}{4}. \quad \heartsuit$$

评注 7.35.1. 这里的数列求和也可以用错位相减法来进行.

例 7.36 (*). 设数列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 满足 $a_0 = 5, a_1 = 35$, 且当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} - 2 \cdot 3^n$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 这是一个非齐次的二阶递推数列, 根据引理7.1先求出对应齐次递推数列的通解. 对于递推公式 $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$, 特征方程为 $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$, 所以其通解 $B_n = C_1 3^n + C_2 4^n$.

进一步地, 考虑原非齐次递推数列的特解, 根据引理7.3, 因为 3 是特征方程的一重根, 所以其特解的形式为 $b_n = An3^n$ (A 是待定系数), 代入递推公式得 $An \cdot 3^n = 7An \cdot 3^{n-1} - 7A \cdot 3^{n-1} - 12An \cdot 3^{n-2} + 24A \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 3^n$, 解得 $A = 6$, 所以 $b_n = 6n \cdot 3^n = 2n \cdot 3^{n+1}$.

所以 $a_n = b_n + B_n = 2n \cdot 3^{n+1} + C_1 3^n + C_2 4^n$, 代入初值条件 $a_0 = 5$ 和 $a_1 = 35$ 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ 3C_1 + 4C_2 + 18 = 35, \end{cases} \quad \text{解得 } C_1 = 3, C_2 = 2, \text{ 所以 } a_n = 2n \cdot 3^{n+1} + 3^{n+1} + 2^{2n+1}, \text{ 即 } a_n = (2n+1)3^{n+1} + 2^{2n+1}.$$

♡

评注 7.36.1. 本题也可以不用一般法: 对递推关系两边同时除以 3^n 并记 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 得到辅助数列 $\{b_n\}$ 的递推, 再用作差法得到 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 的齐次递推, 最后再用其他方法求解.

7.3.5 不动点在求数列通项公式中的应用

例 7.37. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 对 $n = 1, 2, \dots$ 有 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, 求该数列的通项公式.

这是一个“分式线性递推”的问题, 目前我们还很难解决这个问题. 为此, 先介绍**不动点**的概念, 这个概念源于函数迭代的思想, 如果读者对函数迭代的相关概念尚不清楚, 可以回顾第二章的相关内容.

对于函数 $f(x)$, 如果存在实数 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的不动点, 所谓不动点, 即点 x_0 被对应法则 f 作用后, 得到的函数值仍然是 x_0 . 在几何上, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = x$ 交点的横坐标就是 $f(x)$ 的不动点.

一般地, 如果数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给出, 由此可以定义数列的不动点 x_0 : 对于递推数列 $\{x_n\}$, 若其递推公式为 $x_{n+1} = f(x_n)$, 且存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 是数列 $f(x)$ 的不动点.

我们知道不动点的概念源于函数迭代的思想, 实际上递推数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 就可以看成是 x_1 在 f 下的 $n-1$ 次迭代, 特别地, 若从某一项 x_k 开始, 数列的取值是 x_0 即 $x_k = x_0$, 则 $x_{k+1} = f(x_k) = f(x_0) = x_0$, $x_{k+2} = f(x_{k+1}) = f(x_0) = x_0$, 归纳可得当 $n \geq k$ 时, x_n 恒等于 x_0 , 即数列 $\{x_n\}$ 在第 k 项之后就“不动”了.

有时数列 $\{x_n\}$ 可能无法取到 x_0 , 但是会收敛于 x_0 , 所谓收敛就是指当 n 充分地大时, 数列 $\{x_n\}$ 的项将充分趋近于某个值 x , 也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 代入递推公式可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = x$, 当 $f(x)$ 是连续函数时 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1})$ 就等于 $f(x)$, 所以我们得到 $f(x) = x$, 即这样的数列会无限趋近于其不动点 x_0 .

并不是所有的数列都有实数范围内的不动点, 有些数列的“不动点”不是实数, 有些数列不存在不动点.

先来考虑一阶线性递推数列, 若数列 $\{x_n\}$ 的首项为 x_1 , 且 $x_n = kx_{n-1} + b$, 其中 k 和 b 均为常数, 且 $k, b \neq 0, k \neq 1$, 则 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n = (x_1 + \frac{b}{k-1})k^{n-1} - \frac{b}{k-1}$. 我们在前面

已经用待定系数法和一般法等方法得到了这个结果, 接下来我们尝试用不动点来认识这个问题: 解方程 $x = kx + b$ 得 $x = \frac{b}{1-k}$, 这就是数列的不动点 x_0 . 另一方面 $x_n - x_0 = kx_{n-1} + b - x_0 = kx_{n-1} - \frac{kb}{1-k} = k(x_{n-1} - x_0)$, 这恰好是当初我们用待定系数法得到的结果, 因此我们自然想到: 对于一阶线性递推数列, 可以求出其不动点 x_0 , 之后 $\{x - x_0\}$ 就成等比数列.

例 7.38. 用不动点法思考例题 7.25:

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 令 $x = 2x + 3$, 解得 $x = -3$, 因此变形得到

$$a_{n+1} - (-3) = 2a_n + 3 - (-3) \Leftrightarrow a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

所以 $\{a_n + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$. ♡

评注 7.38.1. 由上面的例子得到启发, 在数列的递推式两边减去不动点, 可以得到较为特殊的结构.

接下来我们来看分式递推数列, 这也是不动点法的主要应用. 所谓分式递推数列指的是以下类型: 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式. 处理这类问题的一般思路依然是: 在递推式两边减去不动点.

考虑该数列的不动点, 由方程 $x = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow cx^2 + (d-a)x + b = 0$, 这是一个二次方程, 我们先来看几个具体的例子:

例 7.39. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{5a_n - 1}{a_n + 3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 令 $x = \frac{5x - 1}{x + 3} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$, 所以 1 是数列的不动点, 根据上面的思路, 在递推式两边同时减去 1, 得到 $a_{n+1} - 1 = \frac{5a_n - 1}{a_n + 3} - 1 = \frac{4(a_n - 1)}{a_n + 3}$.

注意到等式两边分别出现了 $a_{n+1} - 1$ 和 $a_n - 1$ 这样相似的结构而且都是在分子上, 实际上这个问题我们在例题 7.30 中已经解决过了, 与例 7.30 完全类似, 我们对等式两边同时取倒数得

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n + 3}{4(a_n - 1)} = \frac{a_n - 1 + 4}{4(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{4}$$

所以, 数列 $\{\frac{1}{a_n - 1}\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公差的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}$, 所以 $a_n - 1 = \frac{4}{n + 3}$, 所以 $a_n = \frac{n + 7}{n + 3}$. ♡

例 7.40. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解. 令 $\frac{2x + 1}{3x + 4} = x$, 解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -1$, 这里数列有两个不动点 $\frac{1}{3}$ 和 -1 , 分别在数列的递推公式两边减去 $\frac{1}{3}$ 和 -1 得

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 4}$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} - \frac{1}{3} = \frac{a_n - \frac{1}{3}}{3a_n + 4}$$

两式相比得 $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-\frac{1}{3}} = 5 \cdot \frac{a_n+1}{a_n-\frac{1}{3}}$. 所以数列 $\{\frac{a_n+1}{a_n-\frac{1}{3}}\}$ 是以 3 为首项, 5 为公比的等比数列, 所以 $\frac{a_n+1}{a_n-\frac{1}{3}} = 3 \cdot 5^{n-1}$, 所以 $a_n = \frac{5^{n-1}+1}{3 \cdot 5^{n-1}-1}$. ♥

评注 7.40.1. 综合上面的两个例题, 做一个小的总结, 对于形如 $x_{n+1} = \frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ 的递推数列, 处理的时候可以分为两种情况:

- (1) 如果数列只有一个不动点 x_0 , 那么数列 $\{\frac{1}{x_n-x_0}\}$ 是等差数列,
- (2) 如果数列有两个不动点 α, β , 那么数列 $\{\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}\}$ 是等比数列.

下面我们来解例 7.37.

解. 这个例题与上面两个问题的情况不同, 事实上 $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n}$, 同样尝试求它的不动点: 令 $x = \frac{x^2+2}{2x}$, 解得 $x = \pm\sqrt{2}$. 所以 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 是数列的两个不动点, 变形得

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}, a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} + \sqrt{2} = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n},$$

两式相比, 得 $\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}} = (\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}})^2$, 令 $b_n = \ln \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$, 则 $b_{n+1} = 2b_n$, 所以 b_n 是以 $\ln(3-\sqrt{2})$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $b_n = 2^{n-1} \cdot \ln(3-\sqrt{2}) = \ln(3-\sqrt{2})^{2^{n-1}} = \ln(\sqrt{2}-1)^{2^n}$, 所以 $\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^{2^n}$, 解得 $a_n = \frac{\sqrt{2}[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}]}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}$. ♥

例 7.41. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{3}$ 且 $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{1-x_n}$, 则 $x_{1001} - x_{401} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -2 - \sqrt{3}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$, $x_5 = \sqrt{3}$, 所以数列 $\{x_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列, 所以 $x_{1001} = x_1$, $x_{401} = x_1$, 所以 $x_{1001} - x_{401} = 0$.

另解 1 观察结构, 考虑作变量替换 $x_n = \tan a_n$, 此时

$$\tan a_{n+1} = \frac{\tan a_n + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan a_n \tan \frac{\pi}{4}} = \tan\left(a_n + \frac{\pi}{4}\right).$$

归纳可得 $\tan a_{n+4} = \tan\left(a_n + \frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = \tan a_n$, 所以 $\{x_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列, 所以 $x_{1001} - x_{401} = x_1 - x_1 = 0$.

另解 2 令 $x = \frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow x^2+1=0$, 在实数范围内没有不动点, 但是如果扩展到复数范围, 则有两个不动点 i 和 $-i$, 变形得

$$x_{n+1} - i = \frac{x_n+1}{1-x_n} - i = \frac{(1+i)(x_n-i)}{1-x_n}$$

$$x_{n+1} + i = \frac{x_n+1}{1-x_n} + i = \frac{(1-i)(x_n+i)}{1-x_n}$$

$$\text{两式相比得 } \frac{x_{n+1}-i}{x_{n+1}+i} = i \frac{x_n-i}{x_n+i}.$$

所以 $\{\frac{x_n-i}{x_n+i}\}$ 在形式上是一个以 i 为公比的等比数列, 记 $b_n = \frac{x_n-i}{x_n+i}$, 迭代可得 $b_{n+4} = b_n$, 所以 $\{b_n\}$ 是一个以 4 为周期的周期数列, 所以 $\{x_n\}$ 也是一个以 4 为周期的周期数列, 所以 $x_{1001} - x_{401} = x_1 - x_1 = 0$. ♥

评注 7.41.1. 事实上, 如果分式线性递推数列 $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$ 在实数范围内没有不动点, 此时二次方程 $cx^2 + (d-a)x + b = 0$ 有两个共轭虚根 u 和 v , 此时我们可以得到 $\frac{x_{n+1} - u}{x_{n+1} - v} = \left(\frac{a-uc}{a-vc}\right) \frac{x_n - u}{x_n - v}$. 如果“公比” $\frac{a-uc}{a-vc}$ 恰好是 1 的 T 次方根 (T 次单位根), 那么通过迭代可以得到 $\frac{x_{n+T} - u}{x_{n+T} - v} = \frac{x_n - u}{x_n - v}$, 进一步得到 $x_{n+T} = x_n$, 则 $\{x_n\}$ 是以 T 为周期的周期数列. 例如在本题中 i 是一个 4 次单位根, 所以 $\{x_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列.

由此可以看出, 如果分式线性递推数列在实数范围没有不动点, 则它可能具有周期性, 在解决相关问题时候要注意发现这一点.

例 7.42. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$, $n \geq 1$.

(1) 求证: 当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递减数列;

(2) 求证: 当 $n \geq 1$ 时, $|a_{n+1} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \frac{r^{2^n}}{1 - r^{2^n}}$, 其中 $r = 2 - \sqrt{3}$.

解. (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n}$, 又注意到 $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 3}{2a_{n-1}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_{n-1} \cdot \frac{3}{2a_{n-1}}} = \sqrt{3}$, 且因为 a_n 都是有理数, 所以 $a_n > \sqrt{3}$, 从而 $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $\{a_n\}$ 严格单调递减.

评注 7.42.1. 第一小问考查的是数列单调性, 结合 a_n 有下界即可判断 $a_{n+1} - a_n$ 的符号, 进而将数列单调性说明清楚.

(2) 分析: 令 $\frac{x^2 + 3}{2x} = x$, 解得 $x = \pm\sqrt{3}$, 所以数列有两个不动点 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$, 由此可进一步求出数列的通项.

由 $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$ 可得 $\frac{a_{n+1} - \sqrt{3}}{a_{n+1} + \sqrt{3}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n + \sqrt{3}}\right)^2$, 由此可得 $\frac{a_{n+1} - \sqrt{3}}{a_{n+1} + \sqrt{3}} = r^{2^n}$, 其中 $r = \left|\frac{a_1 - \sqrt{3}}{a_1 + \sqrt{3}}\right| = 2 - \sqrt{3}$, 解得 $a_{n+1} = \sqrt{3} \frac{1 + r^{2^n}}{1 - r^{2^n}}$.

所以 $|a_{n+1} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \frac{r^{2^n}}{1 - r^{2^n}}$. ♡

习题 7.3

- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n + 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}}\right] = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 对任一实数序列 $A = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$, 定义 ΔA 为序列 $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \cdots)$, 它的第 n 项是 $a_{n+1} - a_n$, 假定序列 $\Delta(\Delta A)$ 的所有项都是 1, 且 $a_{19} = a_{32} = 0$, 则 a_1 的值为_____.
- 将石子摆成如图所示的梯形形状, 称具有“梯形”结构的石子数依次构成的数列 $\{a_n\}: 5, 9, 14, 20, \cdots$, 为“梯形数列”. 根据“梯形”的构成, 可知 $a_{624} = \underline{\hspace{2cm}}$.



- 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\sum_{n=1}^{2018} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .
6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 6$, $a_{n+1} = [\frac{5}{4}a_n + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 2}]$, $n \in \mathbb{N}^*$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项和, 则 S_{2016} 的个位数字是_____.
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 4\sqrt{a_n + 1} + 4(n \geq 1)$. 则 $a_n =$ _____.
8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 a_{2017} 的值为_____.
9. 已知数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 满足关系式 $(2a_{n+1})(4 + a_n) = 8$, 且 $a_0 = 2$, 则的 $\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i}$ 值是_____.
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot a_n}{a_n + 3^{n+1}}$, $a_1 = 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.
11. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n^2}{2a_n^2 + 4na_n + n^2}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项.
12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = n \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, 前 n 项和 S_n , $m + S_{2015} = -1007$, $a_1 m > 0$. 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{4}{m}$ 的最小值为_____.
13. 数列 $a_0 = 134$, $a_1 = 150$, $a_{k+1} = a_{k-1} - \frac{k}{a_k} (k = 1, 2, \dots, n-1)$. 若 $a_n = 0$, 则 n 为_____.
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 等于_____.
15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 4a_n - 3 (n = 1, 2, \dots)$. 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.
16. 已知 k 为给定正整数, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = (3^{\frac{2}{2k-1}} - 1)S_n + 3 (n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 令 $b_n = \frac{1}{n} \log_3(a_1 a_2 \cdots a_n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 记 $T_k = \sum_{i=1}^{2k} |b_i - \frac{3}{2}|$. 若 $T_k \in \mathbb{N}^*$, 求 k 的所有可能值.
17. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, 则 $a_n =$ _____.
18. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$. 若 $a_7 = 8$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 等于_____.
19. 已知正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. 若 $a_{11} = 157$, 则 $a_1 =$ _____.
20. 设单调递增数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且 $a_7 = 120$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_8 =$ _____.
21. 已知数列 $\{a_n\}$ 是由正数组成的递增数列, 且 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 若 $a_5 = 52$, 则 $a_7 =$ _____.
22. 设 $0 \leq x_1 \leq x_2$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \geq 1$. 若 $1 \leq x_7 \leq 2$, 则 x_8 的取值范围为_____.
23. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.
24. 欲登上 7 阶楼梯, 某人可以每步跨上两阶楼梯, 也可以每步跨上一阶楼梯, 则共有_____种上楼梯的方法.

25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = (\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n (n \in \mathbb{N})$, 用 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 则 $[a_{2017}]$ 的个位数字是_____.
26. 设 $x_1 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1} - 1}{2x_{n-1} + 4} (n \geq 2)$. 数列 $\{x_n\}$ 的通项公式是_____.
27. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n - 4}{9a_n + 15} (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项.
28. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}, n \geq 1$.
- (1) 求证: 当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递减数列;
- (2) 求证: 当 $n \geq 1$ 时, $|a_{n+1} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \frac{r^{2^n}}{1 - r^{2^n}}$, 其中 $r = 2 - \sqrt{3}$.
29. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}$, 且对于任意 $n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, 则 $\sum_{n=1}^{2016} \frac{1}{a_n + 1}$ 的整数部分是_____.
30. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n^2 + m (n \in \mathbb{N}^*)$ 若对任意正整数 n , 都有 $a_n < 4$, 求实数 m 的最大值.
31. 已知两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 3b_n + 7, b_{n+1} = 3a_n + 5b_n (n \in \mathbb{N}_+)$. 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.
32. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $a_1 = -1, b_1 = 2, a_{n+1} = -b_n, b_{n+1} = 2a_n - 3b_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $b_{2015} + b_{2016} =$ _____.
33. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_2 = 10$, 对所有的正整数 n 都有 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, 则 $a_{2015} =$ _____.
34. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n| (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_{2014} =$ _____.
35. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_2 = -19, a_{n+2} = |a_{n+1}| - a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 那么 $a_{2019} =$ _____.
36. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \sqrt{3}$ 且 $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{1 - x_n}$, 则 $x_{1001} - x_{401} =$ _____.
37. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n + a_{n+1} = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{2017} - 2S_{2018} + S_{2019}$ 的值为_____.
38. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 1, a_{11} = 9$, 且任意连续三项的和都是 15, 则 $a_{2016} =$ _____.
39. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, 4a_{n+1} - a_{n+1}a_n + 4a_n = 9$, 则 $a_{2018} =$ _____.
40. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 对 $1 \leq n \leq 5$, 有 $a_n = n^2$; 且对一切正整数 n , 都有 $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$, 则 $a_{2023} =$ _____.
41. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n a_{n+1}} + \frac{1}{a_n a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, $a_1 + a_3 = 6$, a_1, a_2, a_3 单调递增且成等比数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $[S_{2014}]$ 的值是_____. (其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数)
42. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_0 = \sqrt{3}, a_{n+1} = [a_n] + \frac{1}{\{a_n\}}$ (其中 $[a_n]$ 和 $\{a_n\}$ 分别表示实数 a_n 的整数部分与小数部分), 则 $a_{2019} =$ _____.

7.4

数列求和

先回顾一下我们学过的求和方法.

等差数列求和: 倒序求和法, 求和公式为 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ 或 $S_n = \frac{1}{2}dn^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$.

以及两个与等差数列相关的裂项相消的公式

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$$

$$\text{等比数列求和公式为 } S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}.$$

另外, 对于差比数列 (等差乘等比), 读者可以根据自己的喜好选择裂项相消和错位相减的任意一种方式来处理.

例 7.43 (裂项). 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和满足: $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明对于任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

解. (1) 由 $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$ 可得

$$(S_n + 1)(S_n - n^2 - n) = 0$$

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n > 0$, 所以 $S_n = n^2 + n$. 这是一个知 S_n 求 a_n 的问题, 当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$, 又因为 $a_1 = S_1 = 2$ 也满足, 所以 $a_n = 2n$.

(2) 由 (1) 可知 $a_n = 2n$, 所以 $b_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$.

所以

$$\begin{aligned} T_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

♡

例 7.44 (另一类裂项公式). 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明数列 $\{\lg(a_n + 1)\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n + 2}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明 $S_n < 1$.

解. (1) 实际上题目的设问是在善意地提示我们要做辅助数列 $\{\lg(a_n + 1)\}$. 配方得 $a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2$, 取对数得 $\lg(a_{n+1} + 1) = 2\lg(a_n + 1)$, 所以数列 $\{\lg(a_n + 1)\}$ 是以 $\lg 3$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 即 $\lg(a_n + 1) = 2^{n-1} \cdot \lg 3$, 即 $a_n = 3^{2^{n-1}} - 1$.

$$(2)b_n = \frac{1}{3^{2^{n-1}} - 1} + \frac{1}{3^{2^{n-1}} + 1} = \frac{2 \cdot 3^{2^{n-1}}}{3^{2^n} - 1} = 2\left(\frac{1}{3^{2^{n-1}} - 1} - \frac{1}{3^{2^n} - 1}\right).$$

$$\text{所以 } S_n = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} - \frac{1}{3^3 - 1} + \cdots + \frac{1}{3^{2^{n-1}} - 1} - \frac{1}{3^{2^n} - 1}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^n} - 1}\right) < 1.$$

♡

例 7.45 (并项求和与错位相减). 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2(\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3})$, 设其前 n 项和为 S_n ;

(1) 求 S_n ;

(2) 记 $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解. (1) 由于 $\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} = \cos \frac{2n\pi}{3}$, 考虑使用并项求和, 每三项为一组, 注意到 $a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} = (-\frac{(3k-2)^2 + (3k-1)^2}{2} + (3k)^2) = \frac{18k-5}{2}$, 因此通过并项求和将问题转化为等差数列求和.

当 $n = 3k, k \in \mathbb{N}^*$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_{3k} &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= \frac{13}{2} + \frac{31}{2} + \cdots + \frac{18k-5}{2} = \frac{k(9k+4)}{2}. \end{aligned}$$

当 $n = 3k-1, k \in \mathbb{N}^*$ 时, 有

$$S_{3k-1} = S_{3k} - a_{3k} = \frac{k(9k+4)}{2} - 9k^2 = \frac{k(4-9k)}{2}.$$

当 $n = 3k-2, k \in \mathbb{N}^*$ 时, 有

$$S_{3k-2} = S_{3k-1} - a_{3k-1} = \frac{k(4-9k)}{2} + \frac{(3k-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - k.$$

$$\text{再将 } k \text{ 换回 } n, \text{ 可得 } S_n = \begin{cases} -\frac{n}{3} - \frac{1}{6}, & n = 3k-2, \\ \frac{(n+1)(1-3n)}{6}, & n = 3k-1, (k \in \mathbb{N}^*), \\ \frac{n(3n+4)}{6}, & n = 3k. \end{cases}$$

(2) $b_n = \frac{S_{3n}}{n \cdot 4^n} = \frac{9n+4}{2 \cdot 4^n}$, 这是一个差比数列, 可以采用错位相减法或裂项相消法来解决, 这里以错位相减法为例.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{13}{4} + \frac{22}{4^2} + \cdots + \frac{9n-5}{4^{n-1}} + \frac{9n+4}{4^n} \right] \\ 4T_n &= \frac{1}{2} \left[13 + \frac{22}{4} + \cdots + \frac{9n+4}{4^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

两式相减得

$$\begin{aligned} 3T_n &= \frac{1}{2} \left(13 - \frac{9n+4}{4^n} + \frac{9}{4} + \cdots + \frac{9}{4^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(13 - \frac{9n+4}{4^n} + \frac{\frac{9}{4} - \frac{9}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= 8 - \frac{9n+16}{2^{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{8}{3} - \frac{9n+16}{3 \cdot 2^{2n+1}}.$$

♡

评注 7.45.1. 在解答并项求和有关问题时, 常常根据数列的结构将相邻的几项合并, 从而使本来不易求和的结构变成方便求和的结构.

例 7.46 (并项求和). (1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 则 $\sum_{k=1}^{60} a_k =$ _____.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = (2|\sin \frac{n\pi}{2} - 1|)a_n + 2n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和为 _____.

解. (1) 注意到 $a_2 - a_1 = 1$, $a_3 + a_2 = 3$, $a_4 - a_3 = 5$, $a_5 - a_4 = 7$, $\dots$, 依此类推. 由 $a_2 - a_1 = 1$ 和 $a_3 - a_2 = 3$ 得 $a_1 + a_3 = 2$, 由 $a_6 - a_5 = 9$ 和 $a_7 - a_6 = 11$ 得 $a_5 + a_7 = 2 \dots$, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{57} + a_{59} = 2 \times 15 = 30$.

另一方面, $a_2 - a_1 = 1$, $a_4 - a_3 = 5$, $a_6 - a_5 = 7$, $\dots$, $a_{60} - a_{59} = 2 \times 59 - 1 = 117$, 以上各式累加, 由等差数列的求和公式可得

$$a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + \dots + a_{60} - a_{59} = \frac{30 \times (1 + 117)}{2} = 1770 = (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{60}) - 30$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{60} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{59}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{60}) = 1770 + 30 + 30 = 1830.$$

(2) 由题意可得 $a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = -a_2 + 4 = -a_1 + 2$, $a_4 = a_3 + 6 = -a_1 + 8$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$, 同理可得 $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 2 + 10 + 2 + 14 = 28$, $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 2 + 18 + 2 + 22 = 44$; 每四项为一组并项求和, 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项是一个等差数列求和, $S = 25 \times 12 + \frac{25 \times 16 \times 24}{2} = 5100$. ♡

例 7.47. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4, b_1 = 6, b_2 = 2a_2 - 2, b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1 & , 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k & , n = 2^k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbb{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式;

② 求 $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{2^n} c_{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$.

解. (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 依题意得, $\begin{cases} 6q = 6 + 2d, \\ 6q^2 = 12 + 4d, \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} d = 3, \\ q = 2, \end{cases}$ 所以 $a_n = 3n + 1, b_n = 3 \cdot 2^n$.

(2) ① 将 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式代入, 得 $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = a_{2^n}(b_n - 1) = (3 \cdot 2^n + 1)(3 \cdot 2^n - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

所以所求的通项公式为 $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

② 在这个求和问题中, 将数列中的项分为两类:

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k c_k = \sum_{k=1}^n a_{2^k} b_k + \sum_{k=1}^{2^n} a_k - \sum_{k=1}^n a_{2^k}.$$

由等比数列的求和公式可得:

$$\sum_{k=1}^n a_{2^k} b_k = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 2^k + 1) \cdot 3 \cdot 2^k = \sum_{k=1}^n 9 \cdot 4^k + \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k = 3 \times (4^{n+1} - 3) + 3 \cdot 2^{n+1} - 3,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2^k} = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 2^k + 1) = 3 \cdot 2^{n+1} + n,$$

由等差数列的求和公式:

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{k=1}^{2^n} (3k + 1) = \frac{2^n(4 + 3 \cdot 2^n + 1)}{2} = 5 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{2n-1}.$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} a_k c_k &= 3 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1} - 12 + 5 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{2n-1} - n - 3 \cdot 2^{2n+1} \\ &= 27 \cdot 2^{2n-1} + 5 \cdot 2^{n-1} - 12 - n. \end{aligned}$$

另解 此外, 还可以利用 ① 中得到的结果:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} a_k c_k &= \sum_{k=1}^{2^n} a_k - \sum_{k=1}^n a_{2^k} (c_{2^k} - 1) \\ &= (2^n \cdot 4 + \frac{2^n(2^n - 1)}{2} \times 3) + \sum_{k=1}^n (9 \times 4^k - 1) \\ &= (3 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1}) + 9 \times \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} - n \\ &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12. \end{aligned}$$

♡

例 7.48. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n - na_n = n, (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $a_2 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使 $T_n > \frac{9}{20}$ 成立的最小正整数 n 的值.

解. (1) 由 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 可得 $2a_{n+1} = n+1 + (n+1)a_{n+1} - n - na_n$, 化简得 $na_n - (n-1)a_{n+1} = 1$, 所以 $(n+1)a_{n+1} - na_{n+2} = 1$, 两式相减得 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 又因为 $2S_1 - a_1 = a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 所以 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为 2, 所以 $a_n = 2n - 1$.

$$(2) b_n = \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1} + (2n+1)\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1})}$$

根据 $\frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$, 得

$$b_n = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

由 $T_n > \frac{9}{20}$ 得 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{10}$, 所以 $2n+1 > 100$, 所以 $n > \frac{99}{2}$, 因此所求最小正整数为 50.

♡

例 7.49. 在 1 和 2 之间插入 n 个正数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记为 A_n , 令 $a_n = \log_2 A_n, n \in \mathbb{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^n \tan a_{2i} \cdot \tan a_{2i+2}$.

解. 记这 $n+2$ 个数构成的等比数列为 $\{b_n\}$, 则公比 q 满足 $q^{n+1} = 2$, 所以

$$A_n = 1 \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdots q^{n+1} = q^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = (q^{n+1})^{\frac{n+2}{2}} = 2^{\frac{n+2}{2}},$$

所以 $a_n = \log_2 A_n = \frac{n+2}{2}$.

考虑该求和问题的裂项形式, 由两角和与差的正切公式得

$$\tan(n+1)\tan(n+2) = \frac{\tan(n+1) - \tan n}{\tan 1} - 1,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \tan a_{2i} \cdot \tan a_{2i+2} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\tan(i+2) - \tan(i+1)}{\tan 1} - 1 \right] = \frac{\tan(n+2) - \tan 2}{\tan 1} - n.$$

♡

习题 7.4

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 首项为 2, 且满足 $6S_n = 3a_{n+1} + 4^n - 1$. 则 S_n 的最大值为_____.
2. 小王在 word 文档中设计好一张 A4 规格的表格, 根据要求, 这种规格的表格需要设计 1000 张, 小王欲使用“复制——粘贴”(用鼠标选中表格, 右键点击“复制”, 然后在本 word 文档中“粘贴”)的办法满足要求. 请问: 小王需要使用“复制——粘贴”的次数至少为_____.
3. 集合 $M = \{1, 2, \cdots, 2018\}$ 中, 末尾数字是 8 的元素之和是_____.
4. 已知集合 $A = \{k+1, k+2, \cdots, k+n\}$, k, n 为正整数, 若集合 A 中的所有元素之和为 2019, 则当 n 取最大值时, 集合 A =_____.
5. 将全体正奇数按自小到大的顺序排列, 然后取第一数为 a_1 , 取后续两数和为 a_2 , 再取后续三数和为 a_3 , 如此继续, 得到数列 $\{a_n\}$, 即: $a_1 = 1, a_2 = 3 + 5, a_3 = 7 + 9 = 11, \cdots$, 则 $\{a_n\}$ 的前 20 项之和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ =_____.
6. 将正整数 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 按第 k 组含 $k+1$ 个数分组: $(1, 2), (3, 4, 5), (6, 7, 8, 9), \cdots$, 那么 2016 在第_____组.
7. 将全体正整数按自小到大的顺序排列, 然后这样分段, 使得第一段有 1 个数, 第二段有 3 个数, $\cdots$, 第 n 段有 $2n-1$ 个数, 那么, 第 20 段中的第 18 个数是_____.
8. 将正整数数列 $1, 2, 3, \cdots$ 按如下方式自左至右分段, 使得第一段有 1×2 个数, 第二段有 2×3 个数, $\cdots$, 第 n 段有 $n \times (n+1)$ 个数, $\cdots$. 则 2014 位于第_____段.
9. 将所有正整数自小到大一个接一个地顺次写成一排, 则从左至右的第 2016 个数字是_____.
10. 将正偶数集合 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 从小到大按第 n 组有 $3n-2$ 个数进行分组: $\{2\}, \{4, 6, 8, 10\}, \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}, \cdots$, 则 2018 位于第_____组.

11. 将全体真分数排成这样的—个数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$, 排序方法是: 自左至右, 先将分母按自小到大的排列, 对于分母相同的分数, 再按分子自小到大的排列, 则其第 2017 项 $a_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知数列: $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{27}, \frac{4}{27}, \dots, \frac{26}{27}, \dots, \frac{2}{3^n}, \frac{4}{3^n}, \dots, \frac{3^n-1}{3^n}, \dots$, 那么 $\frac{2020}{2187}$ 是该数列的第—项.
13. 把 $1, 2, \dots, n^2$ 按照顺时针螺旋方式排成 n 行 n 列的表格 T_n , 第一行是 $1, 2, \dots, n$. 例如: $T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. 设 2018 在 T_{100} 的第 i 行 j 列, 则 $(i, j) = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 设 $f(n)$ 为最接近 $\sqrt[n]{n}$ 的整数, 则 $\sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{f(k)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 设 $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}_+$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 a_n + b_2 a_{n-1} + \dots + b_n a_1 = 2^n - \frac{n}{2} - 1$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.
16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = a \cdot 2^n + b \cdot n - 80 (a, b \in \mathbf{N}_+)$. 已知数列的前 n 项和 S_n 的最小值当且仅当 $n = 6$ 时取得, 且 a_{36} 能被 7 整除. 求 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{12}|$ 的值.
17. 已知函数 $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi x}{2}$, 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = f(n) + f(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项之和 $S_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. 化简 $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2016\sqrt{2017}+2017\sqrt{2016}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
19. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^3 - n^2, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\sum_{i=1}^{2015} \frac{1}{a_i + 8i - 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
20. 对正整数 n , 定义 $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$, 记 $S_n = n! [\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} - 1]$. 则 $S_{2017} = \underline{\hspace{2cm}}$.
21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \frac{nx}{(x+1)(2x+1) \cdots (nx+1)}, n \in \mathbf{N}^*$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} < 1$, 则实数 x 的取值范围是—.
22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} (n \geq 1)$, 且其前 n 项和为 S_n . 则 $[S_n] = \underline{\hspace{2cm}}$. ($[S_n]$ 表示不超过实数 S_n 的最大整数)
23. 已知集合 $A_k = \{2^{k-1} + a_{k-2}2^{a_{k-2}+k-2} + a_{k-3}2^{a_{k-3}+k-3} + \dots + a_12^{a_1+1} + a_02^{a_0} | a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \dots, k-2\}$, 用 n_k 表示集合 A_k 中所有元素的和, 则 $\sum_{k=1}^{2015} n_k = \underline{\hspace{2cm}}$.
24. 设 $a_k = \frac{2^k}{3^{2^k} + 1} (k \in \mathbf{N})$, 令 $A = a_0 + a_1 + \dots + a_9, B = a_0 a_1 \cdots a_9$. 则 $\frac{A}{B} = \underline{\hspace{2cm}}$.
25. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \frac{2^n}{2^{2^n} + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i, B_n = \prod_{i=1}^n a_i$. 求证: $3A_n + B_n \cdot 2^{\frac{(1+n)(2-n)}{2}}$ 为定值.
26. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$.

(1) 证明 $\{a_n + \frac{1}{2}\}$ 为等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

27. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $(n \in \mathbb{N}^*)$,

① 求 T_n ;

② 求 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} (n \in \mathbb{N}^*)$.

28. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = b_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证 $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 (n \in \mathbb{N}^*)$;

(3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

29. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列, 且对任意的正整数 n , 均有 $S_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - 2^n + \frac{3}{2}$ 成立, 其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

30. 在数列的每相邻两项之间插入此两项的和, 形成新的数列, 这样的操作叫做该数列的一次“Z 扩展”. 已知数列 1, 2, 3 第 1 次“Z 扩展”后得到数列 1, 3, 2, 5, 3; 第 2 次“Z 扩展”后得到数列 1, 4, 3, 5, 2, 7, 5, 8, 3; $\cdots$. 设第 n 次“Z 扩展”后所得数列为 $1, x_1, x_2, \cdots, x_m, 3$, 并记 $a_n = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m + 3$.

(1) 求 a_1, a_2, a_3 的值;

(2) 若 $b_n = a_n - 2$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

31. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 $d (d \neq 0)$ 的等差数列, 且 $a_1 + t^2 = a_2 + t^3 = a_3 + t$,

(1) 求实数 t, d 的值;

(2) 若正整数满足 $m < p < r, a_m - 2t^m = a_p - 2t^p = a_r - 2t^r = 0$, 求数组 (m, p, r) 和相应的通项公式 $\{a_n\}$.

32. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 \neq 0$, $2S_{n+1} - 3S_n = 2a_1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;

- (2) 若 $a_1, a_p (p \geq 3)$ 两项均为正整数, 且存在正整数 m , 使 $a_1 \geq m^{p-1}, a_p \leq (m+1)^{p-1}$, 求 a_n .

33. 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为 1 的等差数列, 偶数项是首项为 2 的等比数列. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_5 = 2a_4 + a_5, a_9 = a_3 + a_4$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 若 $a_m a_{m+1} = a_{m+2}$, 求正整数 m 的值;
- (3) 是否存在正整数 m , 使得 $\frac{S_{2m}}{S_{2m-1}}$ 恰好为数列 $\{a_n\}$ 中的一项? 若存在, 求出所有满足条件的 m 值, 若不存在, 说明理由.

34. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 7, a_5 + a_7 = 26$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

- (1) 求 $\{a_n\}$ 及 S_n ;
- (2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1} (n \in \mathbb{N}_+)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

35. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前项和, 且 $a_1 + a_2 = 4, \frac{2S_{n+1} + 1}{2S_n + 1} = \frac{a_2}{a_1} = c (c > 0, n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 令 $b_n = a_n \log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

36. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $a_n = \begin{cases} n \cdot 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \\ (n + \lambda) \cdot 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$,

- (1) 求 S_n ;
- (2) 若 $\lambda \in (-2017, -2016)$, 求 S_n 取得最小值时对应的 n 的值.

37. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2^{n+1}a_n}{(n + \frac{1}{2})a_n + 2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1) 设 $b_n = \frac{2^n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $c_n = \frac{1}{n(n+1)a_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .

38. 若数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_n, a_{n+1} 是关于 x 的方程 $x^2 - nx + c_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 的两个实根, 且 $a_1 = 1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = c_{2n-1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 T_n . (必要时, 可以利用: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

39. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n^2 = a_n \cdot (S_n - \frac{1}{2})$.

- (1) 求 S_n 的表达式;
- (2) 设 $b_n = \frac{S_n}{2n+1}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明 $T_n < \frac{1}{2}$.

40. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{2}{(n+2)a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明: $T_n < \frac{3}{4} (n \in \mathbb{N}^*)$.

41. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}}, T_n = \sum_{k=1}^n c_k$, 证明: $T_n < 1$.

42. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = 2S_n + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$,

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个实数, 使这 $n+2$ 个数依次成公差为 d_n 的等差数列, 设数列 $\{\frac{1}{d_n}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{15}{8}$.

43. 对任意正整数 m, n , 定义函数 $f(m, n)$ 如下:

$$(1) f(1, 1) = 1,$$

$$(2) f(m+1, n) = f(m, n) + 2(m+n),$$

$$(3) f(m, n+1) = f(m, n) + 2(m+n-1).$$

(1) 求 $f(m, n)$ 的解析式;

(2) 设 $a_n = \frac{\sqrt{f(n, n)}}{2^{n-1}} (n \in \mathbb{N}_+), S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n < 6$.

44. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 对于任意的 $p, q \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{p+q} = a_p + a_q$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \frac{b_4}{2^4+1} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{2^n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $C_n = 3^n + \lambda b_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 是否存在实数 λ , 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $C_{n+1} > C_n$ 恒成立, 若存在, 求实数 λ 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

45. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{n(n+1)}$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求正整数 k , 使得对任何 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $T_k \geq T_n$;

(3) 设 $c_n = \frac{a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$, R_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 若对任何 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $R_n < \lambda$ 成立, 求 λ 的最小值.

7.5

数学归纳法与数列不等式的证明

事实上我们曾用归纳的方法得到等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 这种方法实际上就是数学归纳法的思想. **数学归纳法**是证明关于正整数 n 的命题 $P(n)$ 成立时经常用到的方法.

学习数学和一些其他学科的主要思维过程是由**推理和证明**组成的.

推理可分为**合情推理**和**演绎推理**. 合情推理又有归纳推理和类比推理两种.

归纳推理是以某类事物的部分对象具有某些特征, 推出该类事物的全部对象具有这些特征的推理, 简言之, 它是从个别的、特殊的知识到整体的、一般的结论的推理.

例如, H_2SO_4 , H_3PO_4 和 HNO_3 都是无机酸, 它们都含有氧元素, 所以, 所有的无机酸可能都含有氧元素. 这就是一个典型的归纳推理过程.

类比推理是由两类对象具有某些类似的特征, 且其中一类对象具有某些已知特征, 推出另一类对象也具有这些特征的推理, 简言之, 它是由特殊到特殊的推理.

例如, 鲁班注意到茅草的叶子边缘长着许多锋利的小齿, 而这些锯齿轻易地在他手背上割开了一道口子, 所以, 带有锋利的小锯齿的铁片可能很锋利, 能把树锯倒.

需要指出, 不论是归纳推理还是类比推理, 合情推理的结果未必正确, 例如“酸中有氧”就是一个错误的结论. 因此, 合情推理是一种“大胆猜想”的思维过程, 尽管它的结论是或然的, 但是人类历史上很多意义重大的认识, 几乎都有合情推理的功劳. 也正是因为合情推理具有这样的特点, 我们还需要另一种“小心求证”的思维方式, 这就是演绎推理.

演绎推理是由一般原理、一般原则推出特殊对象具有某些特征的推理方法, 就是我们常说的**证明**. 演绎推理最显著的特点就是它的推论前提与结论之间的联系是必然的, 是一种确实性推理.

在数学中, 常用的证明方法有**综合法** (由因导果)、**分析法** (执果索因)、**反证法**和**数学归纳法**. 一般来说, 用综合法书写的解题过程表述更加简单、明了、顺畅, 而分析法是逆向思维, 经常用来探寻解题思路. 由于分析法的过程往往很冗长, 说起来也比较啰嗦, 因此在书籍和刊物中的多数证明都是用综合法书写的. 由于它往往不是实际的思维过程, 而更像是事后的总结, 因此容易使读者即使看明白了证明过程, 也仍然不知道“这是怎么想出来的”.

我们在这一节将着重介绍数学归纳法, 并以数学归纳法作为基础, 选讲几个有关数列不等式证明的问题.

数学归纳法是皮亚诺 (G.Peano, 1858-1932) 公理的直接推论, 皮亚诺公理叙述如下:

公理 1 (归纳公理). 设 S 是正整数集 N^* 的一个子集, 且满足条件:

- (1) $1 \in S$;
- (2) 若 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$.

那么, $S = N^*$.

数学归纳法的形式如下:

定理 7.5.1 (第一数学归纳法). 设 $P(n)$ 是有关正整数 n 的一个命题 (或性质). 如果:

- (1) 当 $n=1$ 时, $P(n)$ 成立;

(2) 由 $P(n)$ 成立可以推出 $P(n+1)$ 成立.

那么, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 都成立.

证明. 记 $S = \{n | n \in \mathbb{N}^*, \text{且 } P(n) \text{ 成立}\}$, 显然 S 是 $\mathbb{N}^*$ 的子集, 则由 (1) 知 $1 \in S$; 由 (2) 知 $n \in S$ 则 $n+1 \in S$, 这样由皮亚诺归纳公理可知 $S = \mathbb{N}^*$, 也就是说对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 都成立. $\square$

在多米诺骨牌这个游戏中, 对于任意相邻的两块骨牌, 若前一块骨牌倒下, 则会导致后一块骨牌倒下. 这样, 只要推倒第 1 块骨牌, 不论有多少块骨牌, 都能全部倒下. 可以看出, 使所有骨牌都能倒下的条件有两个, 两者缺一不可:

(1) 第一块骨牌倒下;

(2) 任意两块相邻骨牌, 前一块倒下一定导致后一块倒下.

这个游戏的两个胜利条件用数学语言加以描述, 恰好就是数学归纳法的内容.

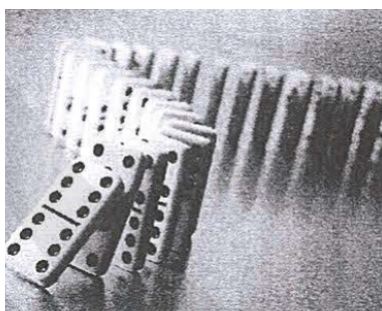


图 7.5: 多米诺骨牌

对读者而言, 接受数学归纳法的含义和正确性并不是难事, 但是想要用好数学归纳法却并不容易, 将数学归纳法的步骤总结如下:

(1)(归纳奠基) 证明 $P(1)$ 成立;

(2)(归纳递推) 当 $k \geq 1$ 时, 以 $P(k)$ 为条件 (称为归纳假设), 推出 $P(k+1)$ 也成立. 实际上, 这一步证明的是一种递推关系, 即证明新命题:

若 $P(k)$ 为真, 则 $P(k+1)$ 也为真.

只要完成这两个步骤, 根据数学归纳法就可以断定命题 $P(n)$ 对于所有的正整数 n 都成立.

凡是与正整数 n 有关的命题, 包括与 n 有关的恒等式或者不等式, 都有机会用数学归纳法给出证明. 但是与正整数有关的命题也有很多不能用数学归纳法给出证明的, 这就是说数学归纳法并不是万能的.

例 7.50. 用数学归纳法证明: 如果 $\{a_n\}$ 是一个公差为 d 的等差数列, 那么

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立.

解. 等差数列的通项公式是一个涉及全体正整数的命题, 所以用数学归纳法的第一步 (归纳奠基) 是证明 $n=1$ 时命题成立, 第二步 (归纳递推) 是假设 $n=k$ 时等式成立, 并以此为条件推出当 $n=k+1$ 时等式也成立. 证明过程如下:

- (1) 当 $n = 1$ 时, 等式显然成立.
 (2) 假设当 $n = k \in \mathbb{N}^*$ 时等式也成立, 即

$$a_k = a_1 + (k - 1)d$$

根据等差数列的定义可知 $a_{k+1} = a_k + d$, 于是

$$a_{k+1} = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + [(k + 1) - 1]d$$

即当 $n = k + 1$ 时等式也成立.

由 (1)(2) 及数学归纳法可知, 等式对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立. ♡

评注 7.50.1. 数学归纳法的要点在于, 在证明归纳递推步骤时必须合理、灵活地使用归纳假设, 并把证明的目标铭记在心, 形成一个正确的逻辑思维结构.

例 7.51. 证明:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) (n \in \mathbb{N}^*)$$

证明. (1) 当 $n = 1$ 时, 等式显然成立.

- (2) 当 $n = m (m \in \mathbb{N}^*)$ 时, 等式成立, 即

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

要证明 $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$, 考虑在上面两式同时加上 $(k+1)^2$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \end{aligned}$$

即当 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

由 (1)(2) 及数学归纳法可知等式对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立. □

评注 7.51.1. 这个恒等式很难直接用其他方法证明, 从这个例子中读者可以看出数学归纳法作为一种重要证明方法的强大之处.

例 7.52 (“先猜后证”与数学归纳法). 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^n ka_k = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

- (2) 令 $b_1 = a_1, b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})a_n (n \geq 2)$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 S_n 满足 $S_n < 2 + 2 \ln n$.

(提示: 运用不等式 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x} (x > 0)$.)

(1) 解. 当 $n \geq 2$ 时, 由 $\sum_{k=1}^n ka_k = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ 可知 $\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = 4 - \frac{n+1}{2^{n-2}}$,
 两式相减得 $na_n = (4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}) - (4 - \frac{n+1}{2^{n-2}}) = \frac{n}{2^{n-1}}$,
 所以 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} (n \geq 2)$.

又因为 $a_1 = 1$ 也成立, 所以 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} (n \in \mathbb{N}^*)$, 由等比数列求和公式

$$T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

♡

(2)

证明. 首先我们需要得到 S_n 的表达式, 但是数列 b_n 不易直接求和, 注意到:

$b_1 = a_1 = 1, S_1 = b_1 = T_1$.
 $b_2 = \frac{T_1}{2} + T_1 + (1 + \frac{1}{2})a_2, S_2 = S_1 + b_2 = T_1 + \frac{T_1}{2} + (1 + \frac{1}{2})a_2 = (1 + \frac{1}{2})(T_1 + a_2) = (1 + \frac{1}{2})T_2$.
 $S_3 = S_2 + b_3 = (1 + \frac{1}{2})T_2 + \frac{T_2}{3} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})a_3 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})(T_2 + a_3) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})T_3$.
 由此, 猜想 $S_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})T_n$. 下面用数学归纳法证明

(I) 当 $n = 1, 2$ 时, 已证等式成立.

(II) 假设当 $n = k$ 时等式成立, 即 $S_k = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k})T_k$. 从而

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + b_{k+1} = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k})T_k + \frac{T_k}{k+1} + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1})a_{k+1} \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1})(T_k + a_{k+1}) = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1})T_{k+1}. \end{aligned}$$

由 (I)(II) 及数学归纳法可得, $S_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})T_n$.

下面是一个有关数列求和的数列不等式的证明问题, 根据不等式 $\ln 1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} (n > 0)$ 进行放缩:

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})T_n \\ &< (1 + \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{n-1}))T_n \\ &= (1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n - \ln(n-1))(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) \\ &= (1 + \ln n)(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) \\ &< 2(1 + \ln n). \end{aligned}$$

证毕.

□

评注 7.52.1. 本题的难点有两个, 第一个是得到 S_n 表达式的过程, 实际上 b_n 的结构中既含有 T_n 又含有 a_n , 猜想 b_n 求和的结果 S_n 与 T_n 相关也是合理的, 先猜后证就这么回事, 需要一点灵感和运气.

第二个难点是利用不等式进行放缩以及数列求和, 在有关数列求和的不等式证明问题中, 我们经常根据对数列的每一项进行放缩, 并使放缩后的新结构方便进行求和.

下面再来分析几个典型的数列不等式证明问题,这类问题并没有定法,也正因如此,数列不等式可谓是数列问题中思维含量最大、最富挑战性的一类.

例 7.53. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 S_n 满足 $S_n^2 - (n^2 + n + 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0$, $n \in \mathbb{N}_+$.

(1) 求 a_1 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \frac{1}{3}$.

(1) 解. 由 $S_n^2 - (n^2 + n + 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0$ 可知 $(S_n + 3)(S_n - n^2 - n) = 0$, 又因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n = n^2 + n$, $a_1 = S_1 = 2$. $\heartsuit$

(2) 解. 知 S_n 求 a_n . 当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - (n-1)^2 - (n-1) = 2n$, 当 $n = 1$ 时 $a_1 = 2 \times 1 = 2$, 所以 $a_n = 2n$. $\heartsuit$

(3)

证明. 不能直接求和, 放大为可以裂项相消的结构, 注意要留着第一项不动, 否则就放“过”了(思考: 为什么?)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{6 \times 7} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

评注 7.53.1. 碰到不能直接求和, 又要求证明不等式的结构, 一种思路是将每一项按需求进行放缩, 使之变成可以直接求和的结构(通常是等比数列和可以裂项相消的结构), 进而证明不等式.

例 7.54. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 4$, $a_4 = S_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n + b_n, S_{n+1} + b_n, S_{n+2} + b_n$ 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 证明 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 解. 设数列的公差为 d , 由题意得 $a_1 + 2d = 4$, $a_1 + 3d = 3a_1 + 3d$, 解得 $a_1 = 0$, $d = 2$.

从而 $a_n = 2n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

由 $S_n = n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 由 $S_n + b_n, S_{n+1} + b_n, S_{n+2} + b_n$ 成等比数列可得 $(S_{n+1} + b_n)^2 = (S_n + b_n)(S_{n+2} + b_n)$,

解得 $b_n = \frac{1}{d}(S_{n+1}^2 - S_n S_{n+2})$.

所以 $b_n = n^2 + n$. $\heartsuit$

(2)

证明. $c_n = \sqrt{\frac{2n-2}{2n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}}.$

考虑放大为熟悉的裂项公式:

$$\begin{aligned} c_n &< \sqrt{\frac{n-1}{(n-1)(n+1)}} < \sqrt{\frac{1}{n+1}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \end{aligned}$$

所以 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 0 + 2 \sum_{k=2}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2\sqrt{n}.$

另证 也可以用高考标答 (2019 浙江理 20) 给出的数学归纳法来证明:

(i) 当 $n=1$ 时, $c_1 = 0 < 2$, 不等式显然成立;

(ii) 假设 $n=k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时不等式成立, 即

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k < 2\sqrt{k}$$

那么当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \cdots + c_k + c_{k+1} &< 2\sqrt{k} + \sqrt{\frac{k}{(k+1)(k+2)}} < 2\sqrt{k} + \sqrt{\frac{1}{k+1}} \\ &< 2\sqrt{k} + \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = 2\sqrt{k+1}. \end{aligned}$$

由 (i)(ii) 及数学归纳法可知, 不等式对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立. $\square$

例 7.55. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 点 (n, S_n) 均在曲线 $y = b^x + r (b > 0$ 且 $b \neq 1, b, r$ 均为常数).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n = 2(\log_2 a_n + 1) (n \in \mathbb{N}^*)$. 证明: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 不等式 $\frac{b_1+1}{b_1} \cdot \frac{b_2+1}{b_2} \cdot \cdots \cdot \frac{b_n+1}{b_n} > \sqrt{n+1}$ 成立.

(1) 解. $a_n = (b-1)b^{n-1}$, 过程留给读者. $\heartsuit$

(2) 本题的实质是证明 $\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} > \sqrt{n+1}$ 成立, 对于这类问题可以从多个角度认识.

证 1(数列单调性) 记 $A_n = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n}}{\sqrt{n+1}}.$

那么 $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \frac{2n+3}{2\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}} > \frac{2n+3}{n+1+n+2} = 1.$

因为 $\{A_n\}$ 是正项数列, 所以 $\{A_n\}$ 递增, 所以 $A_n > 1$.

证 2(累乘法) 要证明原不等式成立, 即证明

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{n+1}.$$

因为 $2k+1 > \sqrt{4k^2+4k} > 2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}$, 所以 $\frac{2k+1}{2k} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}.$

所以 $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} > \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \sqrt{n+1}$, 证毕.

这种思路类似于证明与数列求和有关的不等式时先放缩再求和, 而这里是先放缩再求积.

证 3(数学归纳法)

① 当 $n=1$ 时, $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, 所以不等式成立.

② 假设当 $n=k(k \in \mathbb{N}^*)$ 时不等式成立, 即 $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{k+1}$ 成立.

则

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k} \cdot \frac{2k+3}{2k+2} &> \sqrt{k+1} \cdot \frac{2k+3}{2k+2} \\ &> \sqrt{\frac{(2k+3)^2}{4(k+1)}} = \sqrt{\frac{4(k+1)^2 + 4(k+1) + 1}{4(k+1)}} \\ &= \sqrt{k+1 + 1 + \frac{1}{4(k+1)}} > \sqrt{k+1+1}. \end{aligned}$$

所以 $n=k+1$ 时不等式也成立. 由 ① ② 及数学归纳法可知不等式成立.

例 7.56. 已知 $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $a_1 = 2$. 证明 $1 - \frac{1}{2021^{2021}} < \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{a_i} < 1$.

解. 这是一个非线性递推, 考虑计算不动点. 令 $\lambda = \lambda^2 - \lambda + 1$, 解得 $\lambda = 1$. 等式两边同时减 1 得

$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, 取倒数可得 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$, 这是一个典型的可以裂项相消的结构.

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_2-1} - \frac{1}{a_3-1} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} < \frac{1}{a_1-1} = 1.$$

接下来考虑如何证明不等式的左半部分, 只需证明 $1 - \frac{1}{a_{n+1}-1} > 1 - \frac{1}{2020^{2020}}$, 只需证明 $\frac{1}{2021^{2021}} > \frac{1}{a_{n+1}-1}$, 只需证明 $2021^{2021} < a_{n+1} - 1$, 也即 $a_{2021} - 1 > 2021^{2021}$.

由递推式, $a_n = \frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$, 从而

$$a_1 a_2 \cdots a_{2021} = \frac{a_{2021}-1}{a_1-1} = a_{2021} - 1.$$

由均值不等式可知 $a_{2021} - 1 = \sqrt[2021]{a_1 a_2 \cdots a_{2021}} > \frac{2021}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2021}}}.$

注意到 $\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{a_i} < 1$, 由此立刻得 $a_{2021} - 1 > 2021^{2021}$, 证毕. ♡

评注 7.56.1. 这是一个非常精彩的问题, 发现裂项公式、发现累乘法的结构、均值不等式的应用三者环环相扣, 这启发我们不能囿于只从一个角度理解数列的递推式, 而应该根据解题的需要从多个角度发掘递推式包含的信息, 对条件进行转化.

例 7.57. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{\sqrt{n}(a_n + 1)\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n^2 \leq \frac{2n(n+1)(4^n-1)}{3}$.

解. (1) 这是一阶线性递推数列, 其通项公式为 $a_n = 2^n - 1$, 过程留给读者自己完成.

(2) 记 $b_n = \sqrt{n} \cdot 2^n$, 这个数列很难直接求和, 又该如何建立 b_n 与和的平方 S_n^2 之间的联系呢? 结

合 b_n 的结构, 联想到柯西不等式. 由柯西不等式:

$$\begin{aligned} S_n^2 &= (\sqrt{1} \cdot 2^1 + \sqrt{2} \cdot 2^2 + \cdots + \sqrt{n} \cdot 2^n)^2 \\ &\leq ((\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 + \cdots + (\sqrt{n})^2)(4 + 4^2 + \cdots + 4^n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot 4 \times \frac{4^n - 1}{4 - 1} \\ &= \frac{2n(n+1)(4^n - 1)}{3}. \end{aligned}$$

♡

习题 7.5¹

- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -\frac{(S_n - 1)^2}{S_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 其中 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.
 - 求证: $\{\frac{1}{S_n - 1}\}$ 为等差数列;
 - 若对任意的 n , 均有 $(S_1 + 1)(S_2 + 1) \cdots (S_n + 1) \geq kn$, 试求 k 的最大值.
- 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2^n + r$ (r 为常数), 记 $b_n = 2(1 + \log_2 a_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
 - 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;
 - 若对于任意的正整数 n , 都有 $\frac{1+b_1}{b_1} \cdot \frac{1+b_2}{b_2} \cdots \frac{1+b_n}{b_n} \geq k\sqrt{n+1}$ 成立, 求实数 k 的最大值.
- 前 n 项和为 S_n 的正项数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
 - 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 求证: $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2})(1 + \frac{1}{a_3}) \cdots (1 + \frac{1}{a_{n-1}}) > \frac{\sqrt{a_n}}{2}$.
- 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_n > 0, a_n = \frac{na_{n+1}^2}{na_{n+1} + 1}, n \in \mathbb{N}^*$. 求证:
 - 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
 - 对如图任意正整数 n , $a_n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
 - 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 证明 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}$.
- 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, 关于 x 的方程 $x^2 - a_{n+1} \cos x + (2a_n + 1) = 0$ 有唯一解.
 - 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 设 $b_n = [1 + \frac{1}{\log_2(a_n + 1)}]^n$, 求证: $b_n < 3$;

¹请量力而行!

(3) 设 $c_n = n^2 a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

7. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. 证明: $1 - \frac{1}{2018^{2018}} < \sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{a_n} < 1$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = \frac{1}{k}, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2} a_{n-1}^2$, 其中 k 为正整数. 如果对于所有的 $n \in \mathbb{N}_+$, 都有 $a_n < 1$, 求 k 的取值范围.

9. 已知 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, 且 $a_1 + a_2 = 6, a_3 + a_4 = 24$. $b_n = \frac{a_n}{(a_n - 1)^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对一切正整数 n 均有, $T_n < 3$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1} = \frac{(n-1)a_n}{n-a_n}, n = 2, 3, 4, \dots$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\sum_{k=1}^n a_k^2 < \frac{7}{6}$.

11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(1) = \frac{10}{3}$, 且对任意实数 x, y , 恒有 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = 3f(n) - f(n-1), n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{24a_n}{(3a_n - 8)^2}, n \in \mathbb{N}^*$, S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n < 1$.

12. 设 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积, 满足 $T_n = 1 - a_n, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $S_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2$, 求证: $a_{n+1} - \frac{1}{2} < S_n < a_{n+1} - \frac{1}{3}$.

13. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{a_k^2} < 3$.

14. 设 $a_1 = 1, a_n = n^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} (n \geq 2)$. 求证:

(1) $\frac{a_n + 1}{a_{n+1}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} (n \geq 2)$;

(2) $(1 + \frac{1}{a_1})(1 + \frac{1}{a_2}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n}) < 4 (n \geq 1)$.

15. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足: $a_1 = b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$. 证明:

(1) $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} < \sqrt{2}, \frac{a_{2n}}{b_{2n}} > \sqrt{2}$,

(2) $|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2}| < |\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}|$.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{5a_n - 8}{a_n - 1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 若 $a = 3$, 求证: 数列 $\{\frac{a_n - 2}{a_n - 4}\}$ 成等比数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的正整数 n , 都有 $a_n > 3$, 求实数 a 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x) = \frac{16x + 7}{4x + 4}$, 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_n = f(a_{n-1}), b_n = f(b_{n-1}), n = 2, 3, \dots.$$

(1) 讨论数列 $\{a_n\}$ 的单调性;

(2) 求证: $|b_n - a_n| < \frac{1}{8^{n-3}} |b_1 - a_1|, n = 1, 2, 3, \dots$.

第八章 附录

8.1

习题参考答案

第一章 集合与简易逻辑用语

习题 1.1

1. 4
2. 24
3. 6
4. 2
5. 0
6. 1
7. $\in$; $\notin$
8. (2) 不属于; (3) 2689
9. 9
10. $5 - 2\sqrt{3}$
11. 3
12. -5
13. 72
14. $\{1\}$
15. $\{-3, 0, 2, 6\}$
16. 10, 11, 11, 12, 13
17. 57
18. $\in$; $\in$
19. 505 (提示: 根据题意, S 中的元素 y 只能是 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ 和 $(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2$ 的组合.)
20. 16815 (提示: 所求的和为 $\frac{1}{2}[(1+\cdots+19)^2 - (1^2+\cdots+19^2)]$.)
21. $\pm\frac{9}{4}$
22. $M = N$ (提示: 事实上, M 和 N 均表示全体 4 的倍数的集合即 $\{4k|k \in \mathbb{Z}\}$.)
23. $[0, 3)$
24. $[2, 3]$
25. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$
26. $[2 + \sqrt{5}, +\infty)$
27. $[\frac{1}{2}, 3]$
28. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
29. 4
30. 196
31. 2^{2015} (所求值为 $f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2016})$ 的展开式中奇数次项的系数和, 即 $\frac{1}{2}[f(1) - f(-1)]$.)

32. 1001
33. 401
34. -1 (注意到对于含有 n 个不同元素的集合 $M = \{a_i | i = 1, \dots, n\}$, 成立 $\sum_{i=1}^{2^n-1} m_i = \prod_{i=1}^n (a_i + 1) - 1$.)
35. 2019
36. (1) 1024; (2) $-\frac{50}{3} + \frac{100}{3} \times 2^{101}$.
37. 0
38. $[0, \frac{1}{2})$
39. $\emptyset$
40. 24
41. $\emptyset$ (A 中的元素为正奇数, B 中的元素是偶数)
42. 30
43. 2 或 $2 + \sqrt{2}$
44. 0 或 -1
45. $[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}]$
46. 960
47. $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$
48. $[\frac{13}{6}, \frac{5}{2})$
49. $\{-1, \sqrt{3}\}$
50. 2 (计算可得 $B = \{y | 4 - \sqrt{5} \leq y \leq 4 + \sqrt{10}\}$)
51. 504
52. $-3; -1$
53. (1) $a = 0, b = -4$; (2) $a \in (-2, 2]$
54. 2015

第二章 基本初等函数 I

习题 2.1

1. $\frac{1}{12}$
2. 660
3. $\pi + 1$
4. 997
7. $36 - 20\sqrt{3}$
8. 11
9. -2
10. $\frac{1}{8}$
11. 2029105 (证明 $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{N}$)

习题 2.2

1. $[\frac{5}{2}, +\infty)$
2. $\frac{7}{2}$
3. -4
4. 0 (注意到 $f(x)$ 是奇函数)
5. 9 (利用 $f(x+2) = f(x) + 2$)
6. -36
12. 2
13. 2019
14. 3
15. 4
16. 2
17. 2
18. $(-\infty, -1]$
19. $(0, 2)$

20. -16 21. $2n$

22. 2019

23. -1 **习题 2.3**

1. $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$

2. 24

3. 406

4. $\begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

5. 18

6. 3

7. 3

8. 9

9. $[-2, -1)$

10. $-\frac{3}{2}$

11. $\frac{1}{4}$

12. $(1, 5]$

13. 0

14. 2

15. $\mathbb{R}$ 16. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

17. $\frac{2\sqrt{6}-4}{5}$

18. $(\frac{3+\sqrt{7}}{4}, +\infty)$

19. $[0, 2]$ 20. $(0, 2)$

21. $(0, \frac{1}{16})$

22. $(0, 1)$

23. (1) $-20 \leq p \leq 12$; (2) 存在常数 $q = 8, q = 9$ 或 $q = \frac{15 - \sqrt{17}}{2}$, 使得当 $x \in [q, 10]$ 时, $f(x)$ 的值域为区间 D , 且 D 的长度为 $12 - q$.

24. 2

25. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

26. $\frac{5}{2}$

27. 略.

28. 略.

习题 2.41. $[-2, 3]$

2. 3

3. 1

4. $(1, +\infty)$ 5. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ 6. -1

7. 略.

8. 14

9. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup \{3 - 2\sqrt{3}\}$

10. 2

11. $b > a > c$

12. 4

13. 0

14. 4

15. $(e, 2e + \frac{1}{e})$ (提示: 注意到 $cf(a) = e$, 再结合 $y = |\ln x|$ 的性质)

16. 10^{100} 17. (1) $a = 4, b = 2$; (2) $2 + \log_2 3$ 18. (1) $k = -\frac{1}{2}$; (2) $(1, +\infty)$

第三章 基本初等函数 II

习题 3.1

1. $-\frac{3}{2}$
2. 1
3. $\{x|x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
4. $\frac{2013}{2} + \pi$
5. $\sin^2 x - \frac{1}{4}$, 或写成 $\frac{1}{4}(1 - 2\cos x)$
6. $[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}](k \in \mathbb{Z})$
7. 0
8. (C)
9. $\frac{\pi}{3}$
10. (1) $f(n) = 200 \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{2\pi}{3}\right) + 300$; (2) 一年中的 6, 7, 8, 9, 10 五个月是该地区旅游“旺季”
11. $\sqrt{3} - 1$
12. $\frac{4}{3}$
13. $n \sin^2 x \geq \sin x \sin nx$
14. $\frac{3}{4}$
15. $\sqrt{5}$
16. -1
17. $-\frac{24}{25}$
18. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$
19. 1
20. $\frac{3}{2}$
21. $[0, \frac{9}{8}]$
22. 1
23. $[-\frac{\sqrt{10+1}}{2}, \frac{\sqrt{10}-1}{2}]$

习题 3.2

1. $\frac{2}{3}$
2. (B)
3. 8
4. $\frac{3}{2}$
5. $\frac{\pi}{6}$
6. $-\frac{3}{4}$
7. 0
8. $(k + \frac{1}{8}, k + \frac{5}{8})(k \in \mathbb{Z})$
9. $[0, \frac{\pi^2}{4})$
10. $\frac{\pi}{4}$ (令 $z_1 := 3 + i, z_2 := 5 + i, z_3 := 7 + i, z_4 = 8 + i$, 则原式等于 $\arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 + \arg z_4$, 再利用 $\arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 + \arg z_4 = \arg z_1 z_2 z_3 z_4$.)
24. $[-\frac{1}{2}, 1]$
25. $\{\frac{1}{2}\} \cup (\frac{3}{5}, 1)$
26. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
27. π
28. $\pm\sqrt{2}$
29. $\sqrt{10}$ (提示: 以 $t := \sin^2 A$ 为主元, 考虑几何意义)
30. $\frac{1}{14}$
31. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
32. $\frac{1}{8}$
33. $\frac{2\sqrt{6}-3}{3}$
34. $\frac{17}{8}$
35. $\frac{2}{3}\pi$

36. -4
37. $-\frac{25}{27}$
38. $\frac{5}{2}$ (考虑三倍角公式)
39. $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
40. 3
41. $-\frac{1}{2}$
42. $\sqrt{3}$
43. $\frac{\pi}{18}$ 或 $\frac{7\pi}{18}$ 或 $\frac{13\pi}{18}$
44. 7 (提示: $x = \frac{3}{4} = 0.75$)
45. 2π
46. 2014
47. $\frac{1}{2}$
48. 4
49. 1 或 0 (提示: $\frac{\cos 2k\pi}{m} + i\sin \frac{2k\pi}{m}$ 和 $\cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$ 分别是 m 次和 n 次单位根, 再利用多项式的根与系数的关系)
50. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
51. $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
52. $-\frac{1}{4}$
53. $\frac{\pi}{3}$
54. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$
55. 44
56. 0
57. 1
58. (1) 最小正周期为 π , 单调递减区间为 $[k\pi - \frac{5}{12}\pi, k\pi + \frac{\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$; (2) $(-1 - \sqrt{3}, +\infty)$.
59. (1) $a = 1$, 最小正周期为 π ; (2) $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$.
60. (1) $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbb{Z})$; (2) 0 .
61. (1) $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}]$; (2) $0 < m < 3$
62. (1) $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; (2) $\frac{2m^2}{5} - 1$
63. (1) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$; (2) $\frac{133}{4}$
64. 略.
65. (1) $f(x) = \frac{3}{x} - 4x, x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$; (2) $[-1, 1]$
66. (1) -2 ; (2) $-\frac{\pi}{4}$

第四章 平面向量与复数

习题 4.1

1. $3\sqrt{2}$
2. 26
3. $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$
4. 4
5. $(1, \frac{5}{3})$
6. $\angle BAC$ 的角平分线
7. $\frac{7}{16}$
8. -1
9. $6\sqrt{3}$
10. $\frac{5}{3}$
11. $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$
12. 3
13. $\frac{9}{4}$

14. $(-\infty, \frac{6}{13}\sqrt{13} - 1) \cup (4, +\infty)$

15. 13

16. -16, 6

17. 4

18. $(-1, 8)$

19. $1 + \sqrt{3}$

20. -3

21. $[-\frac{17}{2}, \frac{9}{4}]$

22. 2

23. $-\frac{65}{8}$

24. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}$

25. $\sqrt{3}$

26. 4

27. $[-5, 2]$

28. $3\sqrt{2}$

29. -32

30. 0

31. C, D 不可能同时在 AB 的延长线上

32. 24

33. $\frac{3}{2} 2$

34. $-\frac{1}{2}$

35. $\frac{3}{2}$

36. $\frac{13}{6}$

37. $\frac{1}{3}$

38. $-\frac{7}{2}$

39. $2\sqrt{13}$

40. 0

41. $(-\frac{1}{4}, 2)$

42. $[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

43. 2

44. 逆时针旋转 60 度所得

45. $\frac{\pi}{2}$

46. $\frac{\pi}{4}$

47. $-\frac{1}{6}$

48. 5

49. $\frac{5}{2}$

50. 4024

51. $\frac{11}{6}$

52. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

53. 3

54. $5 : 4 : 3$

55. $\frac{1}{30}$

56. 90°

57. $-\frac{10}{13}$

58. $2\sqrt{7} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

59. $\frac{1}{4}$

60. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

61. $\frac{\pi}{2}$

62. 32

63. $\frac{1}{2}$

64. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

65. $\frac{1}{6}$

66. $\frac{2\pi}{3}$

67. 4

习题 4.2

1. 3

2. 3

3. 4

4. $\sqrt{3} \pm 1$

5. -1

6. $\arctan \frac{\sqrt{6}}{12}$

7. $\pm(4 - 3i)$

8. -1

9. $a < -1$

10. -1

11. 5

12. 8

13. $[4\sqrt{2}, 6\sqrt{2}]$

14. $3\sqrt{3}$

15. 3520

16. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

17. 2^{1009}

18. $4\sqrt{2}$

19. 1

20. $3\sqrt{3}$

21. $\frac{1}{2}$

22. 2

23. $\sqrt{3}$

24. 2

25. -1

26. 1

27. 17

28. 2

29. 1

30. 1

31. $\sqrt{10}$

32. $\sqrt{2} - 1$

33. $[1, 3]$

34. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$

35. $\sqrt{3}$

第五章 解三角形**习题 5.1**

1. 3

2. $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$

3. $\frac{3}{5}$

4. 2064

5. $\frac{3}{4}$

6. $\frac{\pi}{3}$

7. $\frac{\pi}{3}$

8. $\frac{1}{4}$

9. $(0, \frac{\pi}{6}]$

10. $(1, \frac{3}{2})$

11. $\frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{2}$

12. 15

13. $2\sqrt{5}$

14. $a = \frac{6}{37}\sqrt{37}, b = \frac{5}{37}\sqrt{111}, c = \frac{8}{37}\sqrt{37}$

15. $\sqrt{13}$

习题 5.2

1. 12

2. $\frac{3(\sqrt{6} + 2)}{2}$

3. 6

4. $\frac{32}{49}$

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 3

7. $\frac{6}{11}$

8. $\sqrt{3}$

9. $\frac{1}{5}$

10. $\frac{26}{5}$

11. $\frac{189}{2}$

12. $2\sqrt{3}$

13. $6\sqrt{10}$

14. 略

15. 8

16. $\sqrt{3}$

17. 锐角、直角或钝角三角形

18. 以上结论都不对

19. (1) $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{5\pi}{12}, C = \frac{\pi}{3}$. (2) $a = 2\sqrt{2}, c = 2\sqrt{3}$

20. (1) $a = 1, b = 3$. (2) $(0, 1]$

21. (1) 略 (2) $a = c = 2$

22. 44

23. (1) $C = \frac{2\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}$ (2) $\sqrt{3}$

24. (1) $C = \frac{\pi}{3}$. (2) $c = 6$

25. (1) $\frac{45 - 8\sqrt{5}}{81}$. (2) $2\sqrt{5}$

26. (1) $B = \frac{2\pi}{3}$ (2) $B = \frac{2\pi}{3}, A = C = \frac{\pi}{6}$

27. 6

28. (1) $BC = 3$. (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

29. $\frac{2}{5}$

30. (1) $C = \frac{\pi}{3}$. (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

31. (1) 周长最大值为 6, 当且仅当等边三角形时取到. (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

32. 直角三角形, $\angle C = \frac{\pi}{2}$. (2) $\frac{1}{4}$

33. $\omega = 2$. (2) $(-1, -\frac{1}{2})$

34. (1) $a = 1$. (2) $\alpha = \frac{\pi}{6}, \angle PAB = \frac{\pi}{12}$

35. (1) $A = \frac{\pi}{2}$. (2) 最大值为 $\sqrt{2}$

36. (1) $C = \frac{\pi}{3}$. (2) $(\frac{20}{3}, 8]$

37. (1) $A = \frac{\pi}{3}$. (2) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}]$

38. (1) 略 (2) $(3 - 2\sqrt{2}, \frac{1}{2})$

第六章 不等式

第一部分. 一元二次不等式

1. $\frac{1}{2}$

2. $(-3, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 3)$

3. $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{45}{8})$

4. 2

5. $\frac{1}{8}, 36$

6. $-1 \cup [3, +\infty)$

第二部分. 基本不等式

1. $Q \geq P \geq R$

2. (A)

3.

4. $[0, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}]$

5. 25

6. $\frac{1}{4}$

7. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

8. $2 + 2\sqrt{2}$

9. $\frac{4}{27}$

10. 214

11. 6

12. $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

13. $2\sqrt{3}$

14. $\frac{1}{3}$

15. $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

16. $-\frac{125}{27}$

第三部分. 柯西不等式

1. $[4, 4\sqrt{2}]$

2. $[\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$

3. $x = \frac{7}{3}$

4. $\sqrt{3}$

5. 27

6. 5

7. $(a+b)^2$

8. 4

9. 9

10. $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

11. $x_1 = x_2 = x_3 = X - 4, 1$

12. $\frac{5}{2} + \sqrt{6}$

13. 8060

14. $\frac{1}{4}$

15. $\frac{89}{287}$

16. 42

17. 1

18. 4

19. -12

20. 9

21. $\frac{4}{3}$

22. $[14 - 2\sqrt{13}, 14 + 2\sqrt{13}]$

23. $\frac{5\sqrt{34}}{12}$

第四部分. 简单二元线性规划问题

1. $\frac{1}{8}, 36$

2. $-1 \cup [3, +\infty)$

3. $[\frac{4}{5}, \frac{2}{7}]$

4. 80

5. $[7, +\infty)$

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 6. $\sqrt{3}$ | 23. 2 |
| 7. 2 | 24. $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7})$ |
| 8. $\frac{1}{4}$ | 25. -2 |
| 9. $a = -1, b = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$ | 26. $[2, +\infty)$ |
| 10. $[22, 23)$ | 27. 4 |
| 11. 55 | 28. $[120, 130]$ |
| 12. 必要不充分 | 29. -1 |
| 13. $\sqrt{3}$ | 30. -5 |
| 14. $\frac{\pi}{2}$ | 31. 60 |
| 15. 6 : 1 | 32. $\sqrt{22}$ |
| 16. $\pi - 2$ | 33. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 17. 5 | 34. 4 |
| 18. 3 | 35. 1.4 |
| 19. $\frac{1}{6}$ | 36. $\frac{25}{13}$ |
| 20. $[1, 6]$ | 37. $\frac{7}{5}$ |
| 21. $(-\frac{1}{2}, 2)$ | 38. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |
| 22. $\frac{1}{2}$ | |

第七章 数列

习题 7.2

- | | |
|------------------|------------------------------|
| 1. 4 | 8. $\frac{n^2}{4}$ |
| 2. $\frac{1}{4}$ | 9. $4n - \frac{9}{4}$ |
| 3. 充分不必要 | 10. 2014 |
| 4. 是 | 11. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ |
| 5. 134 | 12. $\frac{6058}{3}$ |
| 6. 135 | 13. $a_n = n + 6$ |
| 7. (1)(2)(3)(4) | 14. 15 |
| | 15. 0.505 |

16. 11

17. 60

18. 2

19. $\frac{31}{29}$

20. $\frac{18}{25}$

21. $S_{2013} = 2013, a_6 > a_{2008}$

22. 4006

23. $(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$

24. $n = 16$

25. 32cm

26. 2^{397}

27. $\frac{8}{3}$

28. $a_n = 9^n$

29. 15099

30. $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

31. 2 6

32. 542

33. $\frac{1}{2}$

34. $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

35. $\frac{2014}{2015}$

36. -34

37. 15

38. 5

39. $-50 \leq S \leq 50$

40. $\frac{n}{16}$

41. $\frac{17}{15}$

42. $x > y$

习题 7.3

1. 1

2. 819

3. 196250

4. $\frac{5^{2019}}{16} - \frac{8077}{16}$

5. $a_n = 2^{n-1} + n - 1$, 故 $S_n = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

6. 1

7. $4n^2 - 4n$

8. $\frac{1}{3}026$

9. $\frac{1}{2}(2^{n+2} - n - 3)$

10. $a_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3^n - 1}$

11. $a_n = \frac{n}{3^{2^{n-1}} - 2} (n \geq 1)$

12. 9

13. 201

14. 44

15. $a_n = (\frac{4}{3})^{n-1}$

16. k 的所有可能值为 $k = 1$

17. $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

18. 88

19. 3

20. 194

21. 212

22. $[\frac{21}{13}, \frac{13}{4}]$

23. $2^n - 1$

24. 21

25. 2

26. $\frac{2^{n-2} - 3^{n-2}}{2 \cdot 3^{n-2} - 2^{n-2}}$

27. (特征方程法) $a_n = \frac{49 - 22n}{33n - 24}$

28. (1) $a_n \geq \sqrt{3}$, $a_{n+1} - a_n < 0$

(2) 略

29. 2

30. m 的最大值是 2

31. $2^{3n-2} + 2^{n+1} - 4$

32. -3×2^{2015}

33. -10

34. 1

35. 17

36. 0

37. 3

38. 5

39. $\frac{5}{3}$

40. 17

41. 5368

42. $3029 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

习题 7.4

1. 35

2. 10

3. 204626

4. $\{334, 335, 336, 337, 338, 339\}$

5. 44100

6. 63

7. 379

8. 18

9. 8

10. 27

11. $\frac{1}{65}$

12. 1553

13. (34, 95)

14. $\frac{2823}{7}$

15. $T_n = \frac{(n-1) \cdot 2^n + 1}{2}$

16. 8010

17. 10200

18. $1 - \frac{1}{\sqrt{2017}}$

19. $\frac{2015}{6048}$

20. $-\frac{1}{2018}$

21. $x \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup \dots \cup (-\frac{1}{2013}, -\frac{1}{2014}) \cup (-\frac{1}{2015}, +\infty)$

22. n

23. $\frac{2^{4031} + 1}{3} - 2^{2015}$

24. $\frac{3^{2^{10}} - 1}{2^{47}} - \frac{1}{2^{36}}$

25. 2

(提示: $a_n = \frac{2^n}{2^{2^n} - 1} - \frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}} - 1}$, 所以 $A_n = \frac{2}{3} - \frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}} - 1}$, $B_n = \frac{3 \times 2^{\frac{n(1+n)}{2}}}{2^{2^{n+1}} - 1}$, 于是 $3A_n + B_n \cdot 2^{\frac{(1+n)(2-n)}{2}} = 2$)

26. (1) $\{a_n + \frac{1}{2}\}$ 为以 $\frac{3}{2}$ 为首项, 以 3 为公比的等比数列, $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

(2) 略

(提示: $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$)

27. (1) $a_n = 2^{n-1}$, $n_n = n$

(2) (i) $T_n = 2^{n+1} - n - 2$

(ii) 略 (提示: $\frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+2} - \frac{2^{k+1}}{k+1}$)

28. (1) $a_n = n$, $b_n = 2^{n-1}$

- (2) 略 (提示: $S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2 < 0$)
- (3) 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{4^n}{2n+1} - \frac{6n+5}{9 \times 4^n} - \frac{4}{9}$
29. (1) $a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 1$
(2) $a_n = 3^{n-1} - 2^n$
30. (1) $a_1 = 14, a_2 = 38, a_3 = 110$
(2) $a_n = 4 \cdot 3^n + 2$
31. (1) $t = -\frac{1}{2}, d = \frac{3}{8}$
(2) $(m, n, p) = (1, 3, 4), a_n = \frac{3}{8}n - \frac{11}{8}$
32. (1) 略
(2) $a_n = 2^{p-1} \times (\frac{3}{2})^{n-1}$
33. (1) $a_n = \begin{cases} n, n = 2k - 1 \\ 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, n = 2k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$
(2) $m = 2$
(3) $m = 1$
34. (1) $a_n = 2n + 1, S_n = n^2 + 2n$
(2) $T_n = \frac{n}{4(n+1)}$
35. (1) $a_n = 3^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
(2) $T_n = \frac{(2n-3)3^n + 3}{2}$
36. (1) $S_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + 1 + \frac{\lambda}{6}[3 \cdot 2^n - (-2)^n - 2]$
(2) $n = 1343$
37. (1) $b_n = \frac{n^2 + 1}{2}$
(2) $S_n = \frac{1}{2} \cdot [1 - (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}]$
38. (1) $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, n = 2k - 1 \\ \frac{n-2}{2}, n = 2k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$
(2) $b_n = n^2 - n, T_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$
39. (1) $S_n = \frac{1}{2n-1}$
(2) 略
40. (1) $aa_n = 2n, n \in \mathbb{N}^*$
(2) 略
41. (1) $a_n = 2^n - 1$
(2) 略
42. (1) $a_n = 3^{n-1}$
(2) 略
43. (1) $f(m, n) = m^2 + 2mn + n^2 - m - 3n + 1$
(2) 略
44. (1) $a_n = 2n$
(2) $b_n = (-1)^{n-1}(2^{n+1} + 2), n \geq 2$
(3) $\lambda \in (-\frac{9}{14}, \frac{3}{8})$
45. (1) $a_n = 2^n$
(2) $k = 4$
(3) $\lambda \geq \frac{2}{3}$

习题 7.4

1. (1) 略
(2) $k_{max} = 3$
2. (1) $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$
(2) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
3. (1) $a_n = 2n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$
(2) 略
4. 略
5. (1) $a_n = 2^n - 1$
(2) 略
6. (1) $a_n = 2^n - 1$
(2) 略
(3) $S_n = \frac{(n^2 - 2n + 3) \cdot 2^{n+1} - n(n+1)(2n+1)}{6} - 6$
7. 略
8. $k \geq 3$

9. 略

10. (1) $a_n = \frac{1}{3n-2}, n \in \mathbb{N}^*$

(2) 略

11. (1) $a_n = 8 \cdot 3^{n-1}$

(2) 略

12. (1) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(2) 略

13. (1) $a_n = n$

(2) 略

14. 略

15. 略

16. (1) 略

(2) $a \in (3, +\infty)$

17. (1) 当 $0 < a_1 < \frac{7}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增; 当 $a_1 = \frac{7}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\} = \frac{7}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$; 当 $a_1 > \frac{7}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减。

(2) 略