高中數學講義

Gao's Lectures on Gaokao Mathematics

(第二卷) (淮北一中实验班试用)

July 2022

This page intentionally left blank

> 酌奇而不失其真，玩华而不坠其实。
>
> ——刘勰，《文心雕龙 · 辨骚》

《高中数学讲义》序言

答应给这本书做序，我义不容辞，同时又深感荣幸！

当我开始认真敲打这些文字的时候，我正坐在济南的一间会议室里，看着自己的学生自习. 李昊恩也曾是他们中的一员，不过他又有些不一样，他是我的数学课代表，但不搞数学竞赛. 这其中一部分原因是他更热爱化学，可能多少也与我的教学让他不那么喜欢数学有点关系. 不过好在他不是那么讨厌数学，不然这本书就无从谈起了.

当我回首李昊恩同学在高中学习数学的生涯，有几点令我印象深刻，想一起分享给读者. 首先，是他学习数学的方式，他是一个爱思考善思考的孩子. 我的课堂上总是留有一些思考题，他总是不满足于问题的解决，而是想找到我留这个问题思考的目的. 我不喜欢故弄玄虚，所以他时常让我觉得有些内容我们已心照不宣了. 其次，是他的数学笔记，也是这本书的重要底本. 学生的笔记大多是整理课堂内容，而他是似乎是在写文学批注，充满个人见解以及一些个性化又能加深理解的语言. 我记得他对“端点效应”验证充分性时分类讨论的解释用到的两个词——“悬崖勒马”和“执迷不悟”，真难为他怎么想的. 最后，是他数学学习的心态，永不满足. 李昊恩同学的优秀，我在此不再做更多的赘述，读者可以去从校史馆了解. 但他从不因为自己的成绩而放松，在数学学习上主动向老师同学们请教，不断吸收，最终形成个人的体系并加以运用. 从我的角度来看，这些才是数学学习的正道！

事实上，这本书的大部分内容我都是熟悉的. 我自己深知这份工作的艰辛，所以，当李昊恩决定要做这件事情的时候，我既欣慰又惭愧. 欣慰的是，以他的水平对这东西做整理，必能让这本书的高度得到保证，书中的内容也有些真正的价值. 惭愧的是，我已经工作近十年，却从没有如他一般有热情，并坚持到底. 因此，我得知他们有一个编委会，就知道这件事一定能做成. 更有趣的是，编委会的四位同学高中时所参与的学科竞赛正好覆盖了数、理、化、生四个学科，真正是强强联合！在此，也再次向李昊恩、周皓然、马天宇、于秉钧四位同学的辛勤付出表达我的敬意.

这本书我已经在去年见到了初稿，并在新一届的教学中使用了一段时间. 说实话，对自己曾经的教学也有些反思，希望日后能不断增删，毕竟，学习一直在路上. 这两天，借着外出培训的时间，我又看了一下完整稿，深感这一年在清华学习对李昊恩的影响. 这本讲授高中数学的书，读起来竟是大学教材的格式，一下把我拉回到读书的时光. 值得一提的是，这本书的写作使用 LaTeX 完成的，因为我使用 LaTeX 整理资料，方便为他提供一些习题. 但我仅仅是入门水平，李昊恩已经可以用它完成著作了. 我很荣幸拜读自己学生的大作，毕竟自己肯定是写不出这个水平的.

在他们这一届高三备考的很多日子里，李昊恩坐在办公室里我办公桌的隔壁构思行文，终于完成这本讲义. 他说，这本书是他的“儿子”，希望日后他的学弟学妹们，能多多关注这个“大侄子”. 开卷有益，自己定会有些收获，也让这本书茁壮成长.

最后，还是要对李昊恩同学说一句——爱徒，辛苦了！

高　雷

2022 年 8 月于济南

前言

我是淮北一中 2021 届奥赛班的一名毕业生，曾在一中度过了难忘的三年时光. 其间，有幸能够领略高老师讲授的数学课. 一直觉得这样精彩又独特的数学课需要有一套专门的、系统的讲义，在上高二时，突然萌生了俟毕业后将课堂笔记的内容整理成讲义的想法，希望留作纪念，更希望对以后老师的教学以及同学们的学习提供一点方便.2020 年冬天我通过参加化学竞赛决赛获得了保送资格，一下子有了大把空闲的时间，向高老师说明我的想法后，他希望我能尽快将讲义整理完毕，当时我不假思索地答应下来. 但事实与理想状况总有差距，开始修改课堂笔记时我遇到了很多困难，首先我的很多课堂笔记都已散佚，其次，用于给自己备忘的课堂笔记和一个可以称做讲义的稿子完全不是一回事，由于那时候的自己对这本讲义的内容和样式尚没有清晰的规划，尝试写了一些却总不能满意，只好暂时放下，这样一拖再拖到了 2021 年六月毕业季（本书封面上的 Euler 公式 $e^{i\pi}+1=0$ 就是当时高老师题写的毕业寄语），总算有了初步的规划，于是着手编写这份讲义，撰写书稿、编辑、排版、审稿同步进行，经过近一整年的努力，讲义终于编成了.

本书的主体内容是基于新教材的知识覆盖范围，同时也结合了现行高考的要求. 在内容上，除包含了教材的全部基本内容外，这份讲义的特别之处在于加入了许多对重要概念的理解，并且一旦必要且有益，我们都会做适当的补充. 高中数学对包括笔者在内的一部分同学而言往往是相对难学的，因此本书希望对每一个概念和问题都进行细致和认真的分析，通过这些分析使读者能够准确把握住这些要点，从而使得自己也具有分析问题和解决问题的能力.

全书分为十二章，包括集合，基本初等函数（含三角函数），平面向量与复数，数列，立体几何，解析几何，导数和概率统计等若干大模块. 每一个小节都加入了相当数量的典型问题作为例题，并逐一作了分析和解答，不是简单地向读者提供问题的答案，而是提供了笔者思考这些问题的方式和完整的过程. 讲义中的大部分内容和问题来自课堂笔记，即高老师在课堂上讲授过的内容和分析过的问题，在此基础上加入了笔者的部分理解. 在每一节后配有一定数量的习题，这些习题绝大部分选自近年来高中数学联赛的预赛试题，最初是由高老师整理出来，供数学竞赛的同学备考高中数学联赛一试和奥赛班同学在高考一轮复习期间使用的，在此对他致以诚挚的敬意和感谢！也正因如此，部分习题可能难度较大、技巧性较强，更适于作为巩固练习，而不建议选用这些问题代替日常的作业.

在此，我想向参与编写本书的所有同学表示感谢. 本书的第六章和第十二章初稿由马天宇同学完成，第十章的部分初稿由于秉钧同学完成，第十一章的部分初稿由周皓然同学完成. 这些同学在高中时的数学成绩便名列前茅，而且都对高中数学有扎实的掌握程度以及很多独到的见解，感谢你们为这本讲义付出了自己的智慧！另外还要特别感谢周皓然、王春晖、朱浩宇和孙文辉等同学帮助我整理了大部分的习题答案，没有他们的付出，这本书很难顺利完成. 在初稿的基础上，我们进行了交

叉审稿，并结合了高老师的想法进行了修改，感谢高老师一直以来对本书编写工作的关心，并感谢他特地拨冗为本书撰写序言.

由于本书的准备时间比较仓促，对很多内容，尤其是解析几何和导数中的一些处理问题的思想介绍较少，有待于在以后的继续修订中加以改进. 另外，由于笔者的水平有限，难免有很多疏漏和不当之处，敬请各位读者批评指正. 我的电子邮箱是 lhe21@mails.tsinghua.edu.cn，欢迎随时来信与我讨论！另外，如果读者有我的微信、QQ 等联系方式，也欢迎通过它们和我聊. 对于任何有益的建议和意见，这里都会有清华的小纪念品聊表心意.

另外要特别感谢养育、陪伴了我十九个年头的父母. 本书完成的大部分阶段我都负笈于北京，不似高中时期的朝夕相伴，这才想起他们在我生活、求学时对我无微不至的体贴和无条件的支持，是他们无私的关爱使得这本讲义充盈着温暖的底色，这本讲义献给你们！

本书杀青之际，听闻母校即将乔迁，不禁倍感欣喜和艳羡. 新校区有了更新、更好的环境以及更加优越的条件，希望一代代一中学子能够再接再厉，争创更加精彩的成绩，不负好时光！希望母校的发展越来越好！

最后，感谢教导过我的所有老师，感谢所有帮助过我的人，谢谢你们！

李昊恩
2021 年 12 月于清华园
(2022 年 7 月略作修改)

目录

第八章　立体几何与空间向量

相迁变而规物兮，几何雅而远谋.

——丘成桐（Shing-Tung Yau）

立体几何的研究对象是空间图形，包括构成立体图形的基本元素——点、直线、平面，以及空间几何体. 通过研究它们的性质、它们相互之间的位置关系，特别是直线、平面的平行关系和垂直关系展开研究，从而进一步认识空间几何体的性质.

我们生活在三维世界中，立体几何知识可以用来研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系，在解决实际问题中有着广泛的应用. 在这类问题中常常涉及到空间中的角、距离和体积等几何度量，空间向量将是刻画空间中的平行和垂直关系，以及解决空间中几何度量的有力工具. 空间向量与平面向量在概念上完全类似，只不过空间向量是三维向量，遵循的是三维向量基本定理，读者只要在平面向量的基础上做一个简单、自然的推广，就能很好地利用向量方法解决立体几何问题.

8.1 认识空间图形

在我们周围存在各种各样的物体，如果只考虑这些物体的形状和大小，那么由这些物体可以抽象出**空间几何体**.

8.1.1　几种基本空间几何体的结构

我们考虑一类空间几何体的形成过程：一条平面曲线 (或直线) 绕着它所在平面内的一条定直线 (称为**轴**) 旋转所形成的曲面叫做旋转面，封闭的旋转面围成的几何体叫做**旋转体**. 球、圆柱、圆锥、圆台等都是旋转体.

球是以圆为旋转曲线，以圆的直径为轴的旋转体. 正如给定圆心和半径后可以确定一个圆，给定球心和球半径同样可以确定一个球面. 有关球的几何量的计算公式如下：

$$\text{球的表面积公式：} S_{\text{球}} = 4\pi R^2.$$

$$\text{球的体积公式：} V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

平面截球得到的截面都是圆，其中轴截面 (经过轴即经过球心的平面截球) 得到的截面是最大圆，这个最大圆的半径恰好就是球的半径.

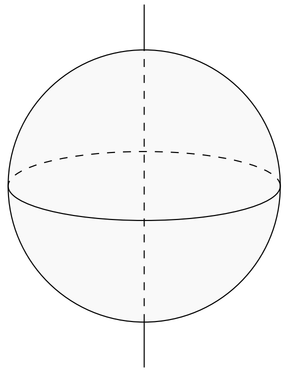


图 8.1: 球

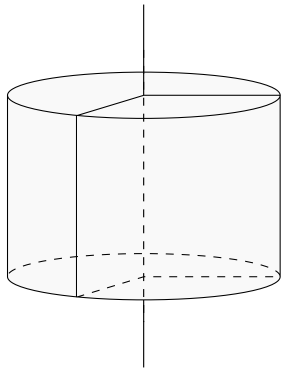


图 8.2: 圆柱

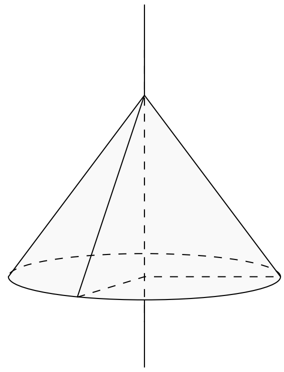


图 8.3: 圆锥

推导球的表面积和体积公式，最直接的方法是计算重积分，下面用一种避免计算积分的方式来说明球的体积公式:

如图所示，将半球分为高度相等的 n 层，那么每层都是一个高为 $\dfrac{R}{n}$ 的圆台 (最上面一层理解为上底面缩小为一个点的圆台)，其中自下而上第 k 层的上底面半径为 $r_k = \sqrt{R^2 - (\dfrac{kR}{n})^2} = \dfrac{R}{n} \cdot \sqrt{n^2 - k^2}$，下底面半径 $r_{k-1} = \dfrac{R}{n} \cdot \sqrt{n^2 - (k-1)^2}$.

我们对圆台的体积进行估计：可以估计每个圆台的体积都将介于以 r_k 为底面半径，高为 $\dfrac{R}{n}$ 的圆柱体积和以 r_{k-1} 为底面半径，高为 $\dfrac{R}{n}$ 的圆柱体积之间，即

$$\pi r_k^2 \frac{R}{n} < V_k < \pi r_{k-1}^2 \frac{R}{n}$$

累加得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi R^3}{n}(1 - \frac{k^2}{n^2}) < V_{\text{半球}} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi R^3}{n}(1 - \frac{k^2}{n^2})$$

记 $V_{\text{不足}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi R^3}{n^3}(1 - \frac{k^2}{n^2})$，$V_{\text{过剩}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi R^3}{n^3}(1 - \frac{k^2}{n^2})$，根据公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 可得:

$$V_{\text{不足}} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$V_{\text{过剩}} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3 n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

考虑分割为无限多层的情况，此时不足近似和过剩近似理解为 $n \to \infty$ 的极限.

因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_{\text{不足}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$，而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_{\text{过 P 剩}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$，即不足近似和过剩近似都以 $\dfrac{2}{3}\pi R^3$ 为极限，所以 $V_{\text{半球}} = \dfrac{2}{3}\pi R^3$，即 $V_{\text{球}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

这种推导方法的思路是：对半球的体积分别作不足近似和过剩近似，再说明不足近似和过剩近似具有相同的极限，这样就“ 夹住”了半球的体积.

下面我们来探究圆柱和圆锥的体积问题. 祖F (gèng，公元 5 世纪-6 世纪) 是祖冲之之子，南北朝时期的伟大数学家，他曾提出过计算体积的**祖F原理**：“幂势既同，则积不容异 ”. 其中“ 势”即高，“ 幂”即面积，“ 积”即体积，祖F原理可以描述为:

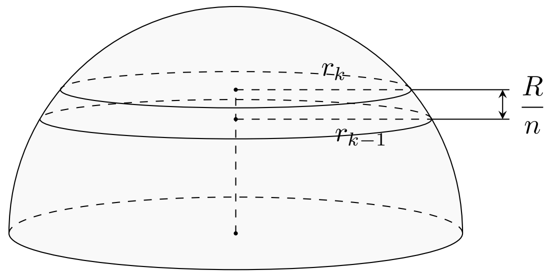


图 8.4: 推导球的体积公式

定理 8.1.1 (祖暅原理). 夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总是相等的，那么这两个几何体的体积也相等.

根据祖暅原理，考虑有一个底面半径和高均为 R 的圆柱挖去一个以这个圆柱的下底面圆心为顶点，以圆柱的上底面为底的圆锥形成的几何体，与一个半径为 R 的半球作比较，如图8.5所示.

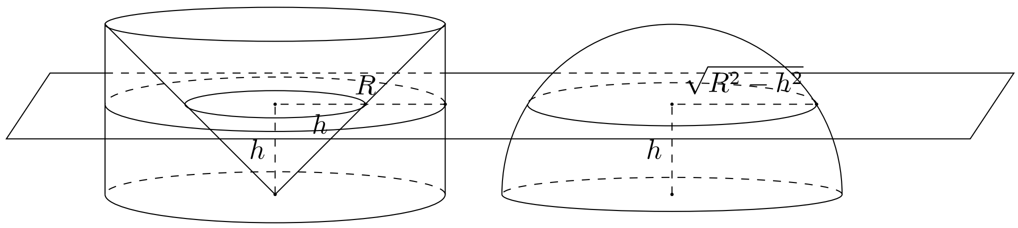


图 8.5: 用祖暅原理研究柱体与锥体的体积

如果高度为 h 处的平面截这两个空间几何体，左边的几何体的截面是一个圆环，其面积 $S_1 = \pi(R^2-h^2)$，右边几何体的截面是一个以 $\sqrt{R^2-h^2}$ 为半径的小圆，其面积 $S_2 = \pi(R^2-h^2)$，可见不管 h 取 $(0,R)$ 之间的何值，S_1 和 S_2 总是相同的. 根据祖暅原理，$V_{圆柱} - V_{圆锥} = V_{半球}$，又因为 $V_{圆柱} = \pi R^3$，$V_{半球} = \dfrac{2}{3}\pi R^3$，所以 $V_{圆锥} = \dfrac{1}{3}\pi R^3 = \dfrac{1}{3}V_{圆柱}$. 这个结论可以推广到一般的圆柱和圆锥上，即圆锥的体积是与它同底等高的圆柱体积的 $\dfrac{1}{3}$，这是我们在高中之前就已经熟知的事实.

圆柱和圆锥的表面积都是容易理解的，要求它们的表面积，只需求出平面展开图的面积. 我们知道圆柱的展开图由一个矩形 (侧面积) 和两个圆 (底面积) 组成，而圆锥的展开图则是由一个扇形 (侧面积) 和一个圆 (底面积) 组成的. 对于圆柱，矩形的两条邻边长分别等于高和底面圆周长，所以：

$$S_{圆柱} = S_{侧} + S_{底} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h).$$

对于圆锥，扇形的半径恰等于母线长 l，弧长恰等于底面圆周长，根据第三章给出的扇形面积计算公式得：

$$S_{圆锥} = S_{侧} + S_{底} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi rl + \pi r^2 = \pi r(r+l).$$

例 8.1. 圆锥的母线长为 1，轴截面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求所有过顶点的截面面积中的最大值.

解. 过顶点的截面都是以母线长为腰的等腰三角形，当等腰三角形的底边为底面圆的直径时，顶角最大，此时截面为轴截面，设顶角为 A，则面积 $S = \dfrac{1}{2}\times 1^2 \times \sin A = \dfrac{1}{2}\sin A$，令 $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}\sin A$，解得 $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A = \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.

当轴截面的顶角为 $\frac{\pi}{3}$ 时，$A\in(0,\frac{\pi}{3}]$，此时 S 在 $A=\frac{\pi}{3}$ 时取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

当轴截面的顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 时，$A\in(0,\frac{2\pi}{3}]$，此时 $\sin A\in(0,1]$，S 在 $\sin A=1$ 即 $A=\frac{\pi}{2}$ 时取得最大值 $\frac{1}{2}$.

综上所述，所有过顶点的截面面积中的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$. ♡

评注 8.1.1. 过顶点截圆锥得到面积最大的截面是否为轴截面，取决于轴截面的顶角与 $\frac{\pi}{2}$ 的大小关系. 当轴截面的顶角为锐角或直角时，轴截面就是符合要求的最大截面；而当轴截面的顶角为钝角时，轴截面就不是面积最大的截面，此时面积最大的截面是顶角为直角的截面，即等腰直角三角形截面.

例 8.2. 求半径为 R 的球的内接圆柱体积的最大值和表面积的最大值.

解. 球内接圆柱的底面半径 r 和高 $\frac{h}{2}$ 满足 $r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2$. 不妨设 $r=R\cos\theta$，$\frac{h}{2}=R\sin\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，如图 8.6 所示. 所以:

$$\begin{aligned}V&=2\pi R^3\cos^2\theta\sin\theta=2\pi R^3\sqrt{(\cos^2\theta\sin\theta)^2}=2\pi R^3\sqrt{4\times\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}\\&\le 2\pi R^3\cdot\sqrt{(\frac{1}{3})^3\times4(\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\cdot\pi R^3=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3.\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{1}{2}\cos^2\theta=\sin^2\theta$ 即 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得最大值.

$$\begin{aligned}S_{表}&=2\pi R\cos\theta(R\sin\theta+R\cos\theta)=2\pi R^2(\cos^2\theta+2\sin\theta)=2\pi R^2(\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2})\\&=[\sqrt{5}\sin(2\theta+\varphi)+1]\pi R^2\le(\sqrt{5}+1)\pi R^2(\text{其中 }\varphi\text{ 为锐角且 }\tan\varphi=\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

当且仅当 $\theta=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ 时取得最大值. ♡

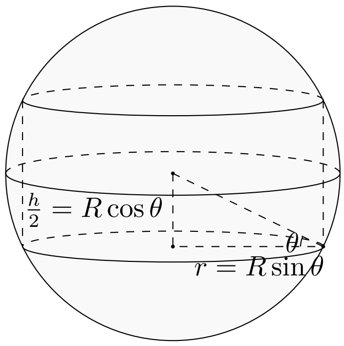


图 8.6: 球内接圆柱

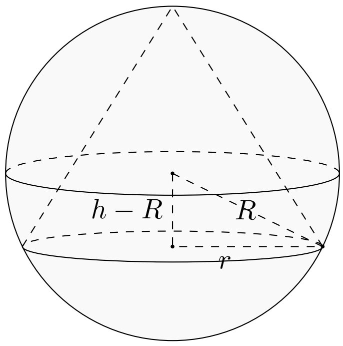


图 8.7: 球内接圆锥

例 8.3. 求半径为 R 的球的内接圆锥体积的最大值.

解. 如图所示，球内接圆锥的底面半径 r 和高 h 满足 $R^2=r^2+(h-R)^2$，所以：

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}[R^2-(h-R)^2]h\\&=\frac{2\pi}{3}Rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)\\&=\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h)\\&\le\frac{1}{3}\pi(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3})^3\\&=\frac{32}{81}\pi R^3.\end{aligned}$$

当且仅当 $\dfrac{h}{2}=2R-h$ 即 $h=\dfrac{4}{3}R$ 时，取得最大值. ♡

例 8.4. *已知圆锥的底面半径为 R，高为 H，求这个圆锥的内接圆柱体积的最大值.*

解. 设内接圆柱的的高为 h，底面半径为 r，如图8.8. 根据相似三角形，这两者之间满足 $\dfrac{H}{R}=\dfrac{H-h}{r}$，即 $r=R-\dfrac{hR}{H}$，所以

$$\begin{aligned}V&=\pi r^2\cdot\frac{H}{R}(R-r)=\frac{\pi H}{R}\cdot r^2(R-r)\\&=\frac{4\pi H}{R}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}(R-r)\\&\le\frac{4\pi H}{R}\cdot(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+R-r}{3})^3=\frac{4\pi H}{27R}.\end{aligned}$$

♡

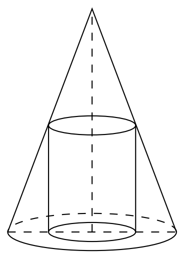


图 8.8: 圆锥内接圆柱

除了旋转体外，另一类重要的基本空间图形是**多面体**. 一般地，由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体，围成多面体的各个多边形称为多面体的**面**，两个面的公共边称为多面体的**棱**，棱的公共点称为多面体的**顶点**.

棱柱、**棱锥**和**棱台**都是特殊的多面体.

棱柱：有两个面相互平行，其余各面都是公共边互相平行的四边形，由这些面围成的多面体称为棱柱. 其中，两个互相平行的面称为棱柱的**底面**，其余的各面都叫做棱柱的**侧面**，显然它们应当都是平行四边形. 相邻侧面的公共边叫做棱柱的**侧棱**，侧面与底面的公共顶点称为棱柱的**顶点**.

棱柱可以用各顶点的字母来表示，比如图中的三棱柱可以记为 $ABC-A'B'C'$，棱柱的底面可以是 n 边形，我们把这些棱柱相应地称为三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

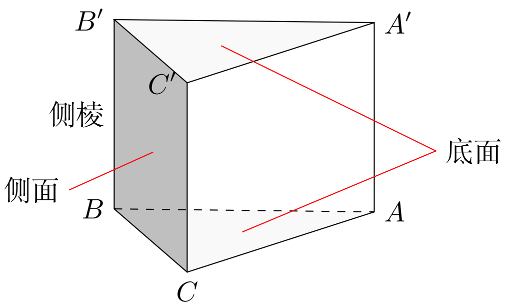


图 8.9: 三棱柱

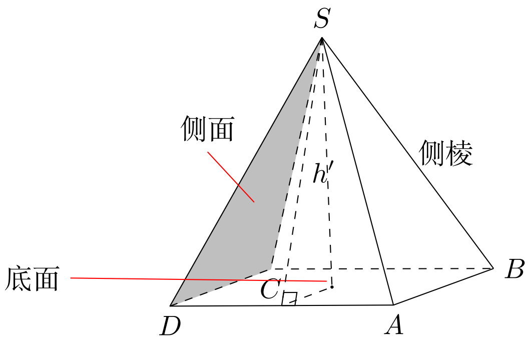


图 8.10: 四棱锥

如果棱柱的侧棱与底面垂直，我们就把这样的棱柱称为**直棱柱**，与之相应地，侧棱与底面不垂直的棱柱称为**斜棱柱**，更特殊地，如果一个直棱柱的底面是正多边形，那么这样的直棱柱称为**正棱柱**.

底面为平行四边形的四棱柱也叫做**平行六面体**.

有一个面是多边形，其余各面都是共顶点的三角形，由这些面围成的多面体叫做**棱锥**，这个多边形面叫做棱锥的**底面**，有公共顶点的各各三角形面叫做棱锥的**侧面**，相邻侧面的公共边称为棱锥的**侧棱**，各侧面的公共顶点称为棱锥的**顶点**，如图8.10所示. 棱锥可以用顶点和底面各顶点对应的字母来表示，如图8.10中的棱柱可以表示记为棱锥 $S-ABCD$，棱锥的底面可以是 n 边形，我们把这些棱锥相应地称为三棱锥、四棱锥、五棱锥等. 如果棱锥的底面是正多边形，且顶点在底面上的投影恰好落在底面正多边形的中心，这样的棱锥称为**正棱锥**.

六条棱长度都相等的四面体称为正四面体，三棱锥和**四面体**是相同的概念，但正三棱锥和正四面体并不是一回事.

用平行于底面的平面截一棱锥，截面与棱锥底面之间的那部分多面体叫做**棱台**，原棱锥的底面称为棱台的**下底面**，截面称为棱台的**上底面**. 棱台也有侧面、侧棱和顶点的概念. 棱台可以用底面各顶点的字母表示，如图8.11 所示的棱台记为棱台 $ABCD-A'B'C'D'$.

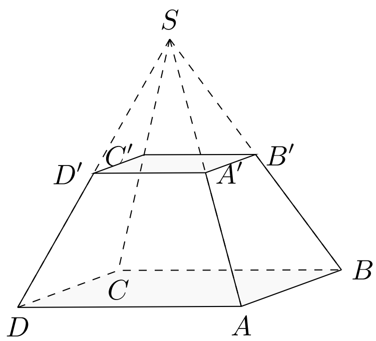


图 8.11: 棱台

棱柱的体积公式为 $V=Sh$，其中 S 为底面积，h 为棱柱的高，棱锥的体积公式为 $V=\dfrac{1}{3}Sh$，其中 S 为底面积，h 为棱锥的高.

棱台的体积可以用大棱锥减去小棱锥来计算,由相似比可知 $\dfrac{H-h}{H}=\sqrt{\dfrac{S_{上}}{S_{下}}}$(其中 H 为原大棱柱的高),所以 $H=\dfrac{\sqrt{S_{下}}}{\sqrt{S_{下}}-\sqrt{S_{上}}}h$,所以

$$V=\frac{1}{3}S_{下}\cdot\frac{\sqrt{S_{下}}}{\sqrt{S_{下}}-\sqrt{S_{上}}}h-\frac{1}{3}S_{上}\left(\frac{\sqrt{S_{下}}}{\sqrt{S_{下}}-\sqrt{S_{上}}}h-h\right)=\frac{1}{3}S_{上}h+\frac{1}{3}\sqrt{S_{上}S_{下}}h+\frac{1}{3}S_{下}h.$$

对于直棱柱而言,其侧面积的公式为 $S_{直棱柱}=ch$,其中 c 为底面周长.

对于正棱锥,其侧面积公式为 $S_{直棱锥}=\dfrac{1}{2}ch'$,其中 c 为底面周长,h' 为侧面三角形的高,称为正棱锥的**斜高**,如图8.10 所示. 斜高可以用勾股定理计算得到.

多面体中最特殊的一类是**正多面体**. 正多面体的所有棱长相等、所有面都是全等的正多边形、所有顶点处的 " 多面角" 都全等,如图8.12 所示.

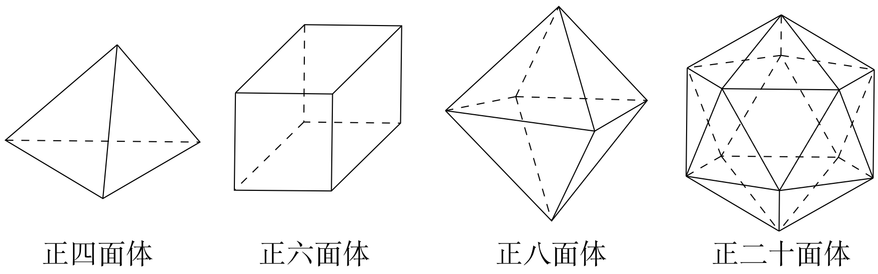


图 8.12: 正多面体

8.1.2 空间图形的直观图和三视图

直观图指的是观察者站在某一点观察一个空间几何体获得的图形,画立体图形的直观图实际上是把不完全在同一平面内的点的集合用同一平面内的点来表示,因此直观图往往不同于立体图形的真实形状. 在立体几何中立体图形的直观图通常是平行投影下得到的平面图形.

利用平行投影,人们获得了画直观图的**斜二测画法**,利用斜二测画法可以画出在空间中水平放置的平面图形的直观图,其步骤为:

(1) 轴间角改变:在已知图形中取相互垂直的 x 轴和 y 轴,画直观图时把它们化成对应的 x' 轴和 y' 轴,且 $\angle x'O'y'=45°$,它们确定的平面表示水平面;

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段;

(3) 比例调整:已知图形中平行于 x 轴的线段在直观图中长度不变,平行于 y 轴的线段在直观图中长度变为原来的一半.

如图8.13所示,在斜二测画法下,已知图形中的平行关系在直观图中同样成立,但已知图形中的垂直关系在直观图中却一般不成立;另外还可以看出,直观图中图形的面积 S' 与已知图形的面积 S 之间的关系为 $S'=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S$.

以上是用斜二测画法绘制平面图形的直观图的方法,如果要画几何体的直观图,只需要在此基础上多画一个与 x 轴和 y 轴都垂直的 z 轴,并且使平行于 z 轴的线段平行关系和长度都不变.

斜二测画法的基本原则可以简记为:**平行依旧垂改斜,横等纵半竖不变**.

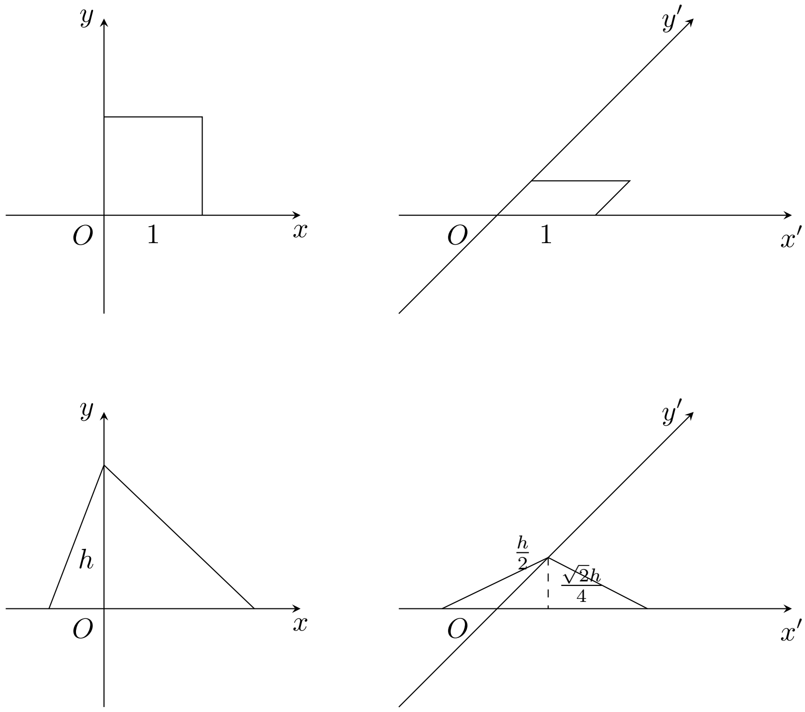
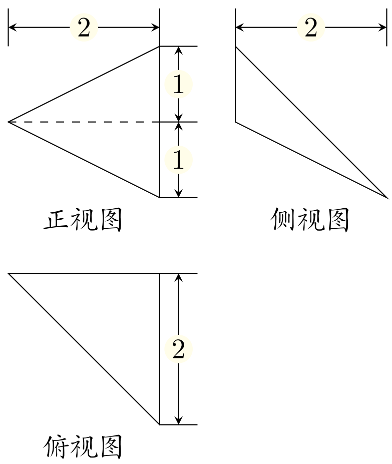


图 8.13: 斜二测画法

在初中阶段我们已经学习过了空间图形的三**视图**，三视图是观察者从三个不同的位置观察同一个几何体得到的图形. 一般地，正视图即从正面往投影面看所得到的图；侧视图即从左面往投影面看所得到的图；俯视图即从上面往投影面看所得到的图. 其中，能看到的轮廓线和棱用实线表示，被“挡住了”而不能看见的用虚线表示.

例 8.5. (1) 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的所有棱中最长的棱长为 (　　　　　).

(A) 3　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) $2\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{5}$



(2) 以图 ① 为正视图，在图 ② ③ ④ ⑤ 中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，那么所选的侧视图和俯视图的编号依次为__________________.(写出符合要求的一组答案即可).

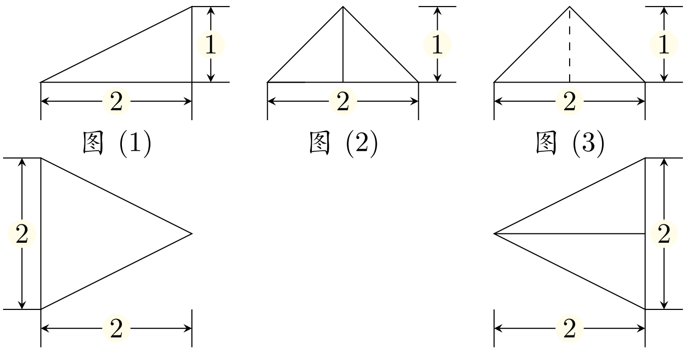


图 (1) 图 (2) 图 (3)

图 (4) 图 (5)

解. (1) 由三视图还原为直观图，如图8.14所示. 一个小技巧是：在一个长方体“模型”的基础上通过尝试“割”出相应的几何体，使其符合三视图.

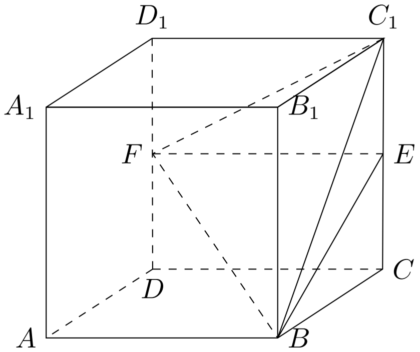


图 8.14:

这是一个棱长为 2 的正方体，E 和 F 分别是 CC_1 和 DD_1 的中点，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2 可知 $C_1E=1$，$EF=2$，$BC_1=2\sqrt{2}$，$C_1F=BE=\sqrt{5}$，$BF=3$，所以该几何体的最长棱长为 3.

(2) 与本题第一小问思路类似，依然是用“割”的方法，这里的模型是一个 $2\times2\times1$ 的长方体.

如果选择 ② 作为侧视图，那么 ⑤ 是满足条件的俯视图，满足条件的几何体如图8.15所示.

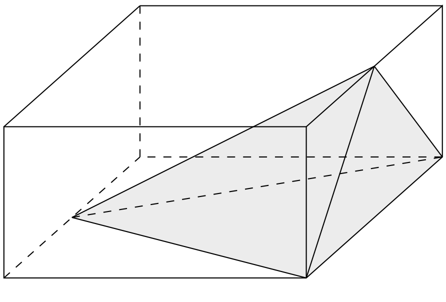


图 8.15:

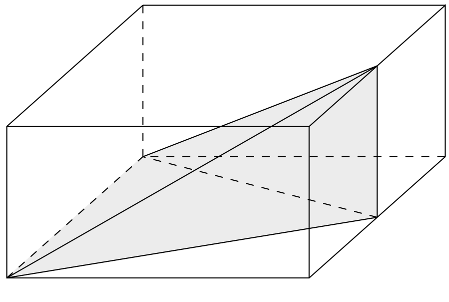


图 8.16:

如果选择 ③ 作为侧视图，那么 ④ 是满足条件的俯视图，满足条件的几何体如图8.16所示.♡

8.1.3 空间图形的基本关系和公理

正画出直线的一部分以表示直线一样，我们也可以画出**平面**的一部分来表示平面. 我们常用矩形的直观图即平行四边形来表示平面.

我们常用希腊字母 α,β,γ 等来表示平面，如平面 α，平面 β 等.

关于平面的基本性质，有一些非常自然的公理：

公理 1. 不共线三点可以确定一个平面.

在生活中我们可以看到自行车用一个脚架和两个车轮着地可以 “停稳”，三脚架三脚着地可以支撑起摄像机，等等，这些事实和其他类似的经验可以总结出这个公理.

推论 直线和直线外一点，或两条相交直线，或两条平行直线都可以确定一个平面.

证明. 因为直线和直线外一点、两条相交直线或两条平行直线都可以确定不共线三点，所以它们都可以确定一个平面. □

公理 2. 如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内.

或：$A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow AB\subsetneqq\alpha$.

因为直线、平面都是由点组成的集合，所以我们可以借用表示元素与集合、集合与集合之间的关系的那套符号来表示点、直线、平面三者之间的相互关系. 比如 $A\in\alpha$ 表示点 A 在平面 α 内，$AB\subsetneqq\alpha$ 表示直线 AB 在平面 α 内.

公理2是判定直线是否在平面内的最基本方法.

公理 3. 如果两个平面（不重合）有公共点，那么它们有且仅有一条通过该点的公共直线，即这两个平面相交于过这个公共点的一条直线.

或：$P\in\alpha$ 且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l,$且$P\in l$.

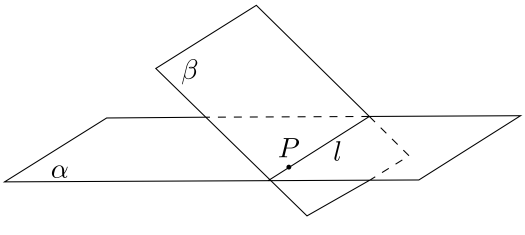


图 8.17: 公理 3

公理 4 (平行公理). 如果 $a//b$，$b//c$，那么 $a//c$.

实际上公理4 是一个在初中阶段已经学习过的公理，这个公理是可推广的，即在三维空间中公理也成立.

我们知道，同一平面内的两条直线有平行和相交两种位置关系. 我们将不同在任何一个平面内的两条直线称为**异面直线**. 显然，两条异面直线没有公共点，于是空间中两条直线的关系实际上有三

种:

$$\begin{cases} \textbf{共面直线} \begin{cases} \textbf{相交直线}\text{：在同一平面内，有且仅有一个公共点；} \\ \textbf{平行直线}\text{：在同一平面内，没有公共点；} \end{cases} \\ \textbf{异面直线}\text{：不同在任何一个平面内，没有公共点.} \end{cases}$$

在平面内，两条直线相交形成 4 个角，其中不大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角称为这两条直线所称的角 (即夹角)，夹角的大小可以刻画一条直线相对于另一条直线的倾斜程度，类似地，我们也可以用“ 异面直线所成的角来刻画两条异面直线的位置关系.

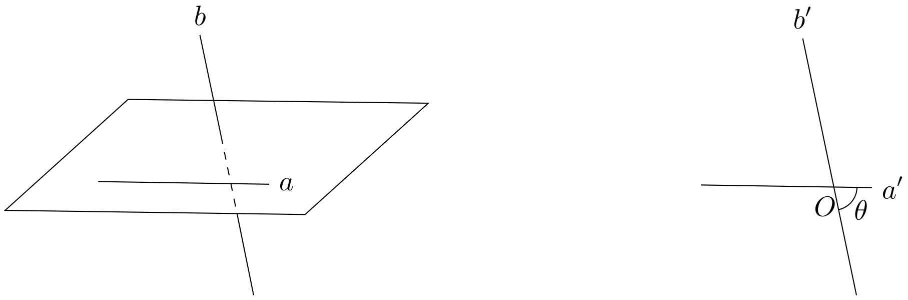


图 8.18: 异面直线所成的角

如图8.18，已知两条异面直线 a 和 b，过空间中任一点 O 分别作直线 $a'//a$，$b'//b$，即将 a 和 b 平移使得平移后得到的直线 a' 和 b' 交于点 O，那么 a' 与 b' 的夹角就是**异面直线 a 和 b 所成的角**.

异面直线所成的角范围是 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$. 如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们说这两条异面直线相互**垂直**，记为 $a \perp b$. 因此在空间中两条直线的垂直关系分为**异面垂直**和**相交垂直**两种. 这两种垂直都要求两条直线所成的角是直角，不同的是异面垂直的两条直线没有公共点，而相交垂直的两条直线有 1 个公共点.

关于异面直线所成的角，我们还有如下定理:

定理 8.1.2 (等角定理). *如果 $AO//A'O'$，$BO//B'O'$，那么 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$ 相等或互为补角.*

例 8.6. *已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，M,N 分别为 AB,PC 的中点，若 $MN = BC = 4$，$PA = 4\sqrt{3}$，则异面直线 PA 和 MN 所成的角为________________.*

解. 取 AC 的中点 D，连接 DM 和 DN，因为 $DN//PA$，根据定义，异面直线 PA 和 MN 所成的角就是 $\angle MND$.

在 $\triangle NMD$ 中，$MN = 4$，$MD = \dfrac{1}{2}BC = 2$，$DN = \dfrac{1}{2}PA = 2\sqrt{3}$，由余弦定理可得:

$$\cos\angle MND = \frac{MN^2 + DN^2 - MD^2}{2MN \cdot DN} = \frac{4^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\angle MND = \dfrac{\pi}{3}$，即 PA 和 MN 所成的角是 $\dfrac{\pi}{3}$. ♡

8.1.4 长方体，正方体，三棱柱和四面体

长方体有 8 个顶点，12 条棱，6 个面，且每个面的形状都是矩形.

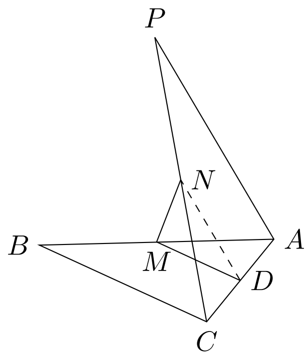


图 8.19:

显然，长方体的棱长有三种，设为 a,b,c. 长方体的面对角线长度有三种，分别为 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ 和 $\sqrt{c^2+a^2}$. 长方体的体对角线长为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

长方体的表面积为 $S=2(ab+bc+ca)$，体积为 $V=abc$.

长方体的外接球 (即长方体的 8 个顶点都在该球面上) 直径恰等于长方体的体对角线长度，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

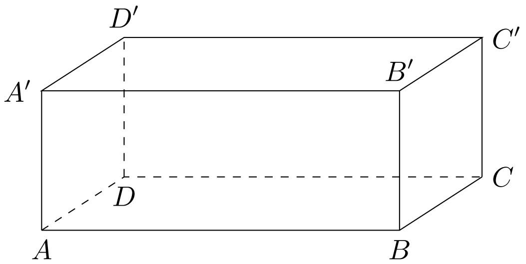


图 8.20: 长方体

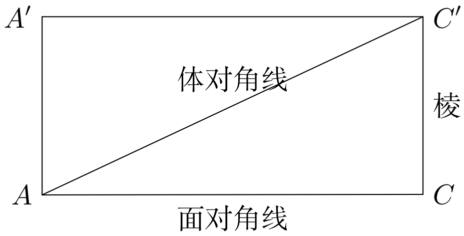


图 8.21:

长方体有三种对角面，例如面 $AA'C'C$. 在对角面中可以看出棱、面对角线和体对角线三者的关系，如图8.21 所示.

正方体可以看成是特殊的长方体，其 6 条棱的长度都相等，即每个面都是正方形.

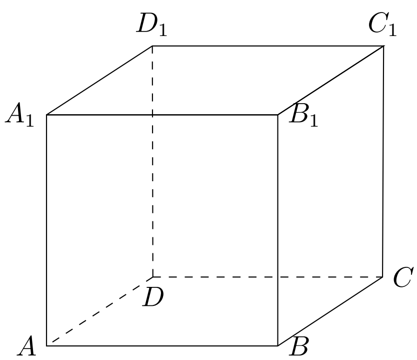


图 8.22: 正方体

设正方体的棱长为 a，则其面对角线长为 $\sqrt{2}a$，体对角线长为 $\sqrt{3}a$，表面积为 $S_{表}=6a^2$，体积

为 $V = a^3$.

正方体的外接球直径等于体对角线长，即 $2R = \sqrt{3}a$，即 $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

除外接球外，正方体还有内切球 (即正方体的 6 个面都与球面相切)，显然内切球的直径等于正方体的棱长，即 $2r = a$，$r = \dfrac{1}{2}a$.

球面与正方体的 12 条棱都相切的球称为正方体的**棱切球**. 棱切球的直径恰好等于面对角线的长度，即 $2R' = \sqrt{2}a$，$R' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

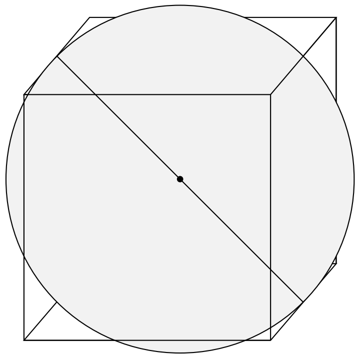


图 8.23: 正方体的棱切球

例 8.7. 有一棱长为 a 的正方体框架，其内放置一个气球并使其充气且尽可能地膨胀 (假设仍保持球的形状)，那么气球表面积的最大值为 (　　　　　　).

(A) πa^2　　(B) $2\pi a^2$　　(C) $3\pi a^2$　　(D) $4\pi a^2$

解. 气球膨胀的最大限度是称为正方体的棱切球，所以气球表面积的最大值为 $S = 4\pi R'^2 = 4\pi \cdot (\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = 2\pi a^2$. ♡

根据正棱柱的定义，**正三棱柱**是上、下底面都是正三角形的直棱柱，设其底面边长为 a，高为 h.

任何正三棱柱都有外接球，其半径可以在直角三角形中计算，$R = \sqrt{(\dfrac{h}{2})^2 + (\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}$.

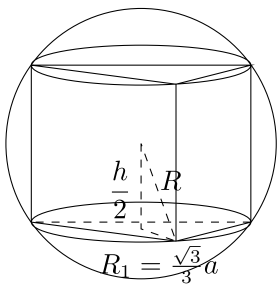


图 8.24: 正三棱柱外接球

正三棱柱若有内切球，则必满足 $h = 2r$，且内切球半径恰好等于三棱柱底面正三角形内切圆的半径，即 $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$. 因此有内切球的三棱柱的高和底面边长之间满足 $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

正四面体有 4 个顶点，4 个面，6 条棱，且 6 条棱长度都相等，显然正四面体的四个面都是全等的正三角形. 设正四面体的棱长为 a，则立刻得到其表面积 $S_{表} = \sqrt{3}a^2$.

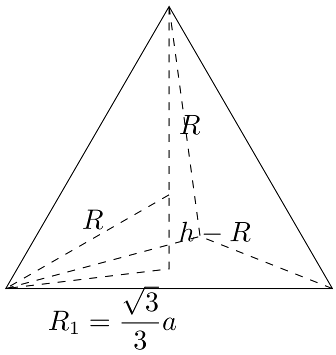


图 8.25: 正四面体中的几何量

正四面体的体积可以按照棱锥的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$ 来计算，因此我们可以先计算正四面体的高，如图所示，取底面的中心，由勾股定理可得 $h=\sqrt{a^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

所以 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

正四面体的外接球半径也可以用截面法计算，外接球半径 R 满足方程

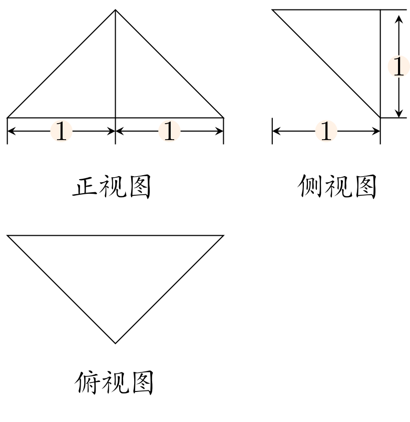
$$R_1^2+(h-R)^2=R^2.$$

这看上去是一个二次方程，但是方程两边的二次项系数抵消掉了，因此实际上这是一个一次方程，解得 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

关于一般正三棱锥 (或者其他的特殊的棱锥，只要能确定某个底面的外接圆半径) 的外接球问题，都可以用**截面法**计算外接球的半径.

例 8.8. 如图所示是一个三棱锥的三视图，那么这个三棱锥的外接球体积为 ( ).

(A) $\dfrac{4\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (C) $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi$ (D) $\sqrt{6}\pi$



解. 由三视图还原几何体，如图8.26. 几何体为 $2\times1\times1$ 长方体之内的三棱锥 $P-ABC$. 取 AC 的中点 N, $A'C'$ 的中点 M, 则 N 就是底面 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，考虑截面 $PBNM$, 则球心就是 MN 的中点 O, 半径 $R=OB=\sqrt{ON^2+BN^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，此三棱锥外接球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi$，所以选 (C). ♡

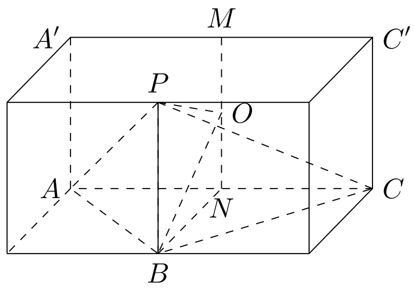


图 8.26:

对于正四面体的内切球，考虑到内切球球心与四个顶点的连线将正四面体分成四个完全相同的小三棱锥，每个三棱锥的底面都是正四面体的面，高恰好等于内切球半径，根据等体积法，正四面体的体积等于四个小三棱锥的体积之和，即：

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = 4 \times (\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 r) = \frac{1}{3}S_{表}r$$

解得 $r = \frac{3V}{S_{表}} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

另一方面，从图8.25中可以看出 $h - R$ 就是正四面体的中心到底面的距离即内切球半径，因此在正四面体中有 $r + R = h$.

实际上正四面体可以放在正方体里去研究，如图8.27所示，正四面体的 6 条棱恰好是正方体 6 个面的面对角线. 设正四面体的棱长为 a，则对应正方体的棱长是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

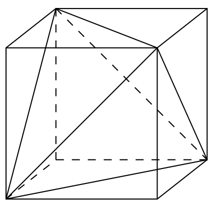


图 8.27: 从正方体里割出正四面体

从这个图出发可以很方便地得到很多结果，比如正四面体的外接球问题，考虑到正四面体的外接球同时也是正方体的外接球立刻得到 $R = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$，这和利用截面法得到的结果是一致的.

同时我们可以注意到，正方体的内切球同时也是正四面体的棱切球，所以正四面体的棱切球半径 $R' = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

最后，在这种看法下，正四面体可以看成是正方体切去四个相同的三棱锥后剩下的几何体，这是四个三棱锥的底面积是正方形面积的一半，高则等于正方体的棱长，所以这样的三棱锥体积为 $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$，所以正四面体的体积为 $V = (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. 即正四面体的体积是对应正方体体积的 $\frac{1}{3}$.

这种将正四面体放进正方体中研究的方法称为**模型法**.

关于正四面体中的几何量可以总结如下表：

表 8.1: **正四面体中的几何量**

	正四面体	对应的正方体
棱长	a	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
体积	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$
外接球半径 R	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$
内切球半径 r	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$
高 h	$\frac{\sqrt{6}}{3}a$	
棱切球半径 R'	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{2}a$

对棱相等的四面体称为**等腰四面体**，根据 "矩形的对角线长度相等" 这一事实，等腰四面体可以放进长方体中来研究，换句话说可以从长方体中割出一个等腰四面体，如图所示.

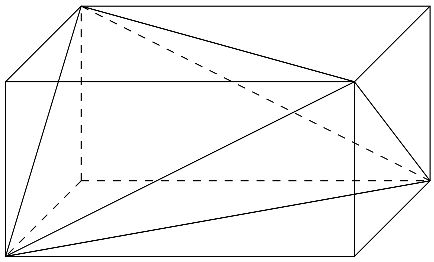


图 8.28: 等腰四面体

从图中可以直接看出等腰四面体具有如下性质:

1° 等腰四面体的各面都是全等的锐角三角形. 设三角形的三条边 (即等腰四面体三组对棱的长度) 为 x,y,z，对应的长方体的长宽高为 a,b,c，那么 $x=\sqrt{a^2+b^2}, y=\sqrt{b^2+c^2}, z=\sqrt{c^2+a^2}$.

2° 对棱中点的连线相互垂直平分.

3° $V_{\text{等腰四面体}}=\frac{1}{3}V_{\text{长方体}}$，因为等腰四面体可以看成长方体切去四个三棱锥 (实际上是垂直四面体，稍后会提及) 剩下的几何体，而这 4 个三棱锥的体积均等于长方体体积的 $\frac{1}{6}$.

4° 等腰四面体的外接球恰好就是对应长方体的外接球，所以外接球半径等于长方体体对角线的一半，即 $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

另外，任何三棱锥的内切球都可以用等体积法计算，即按照公式 $r=\frac{3V}{S_{\text{表}}}$ 计算.

例 8.9. 已知三角形的三边长为 $8,10,12$，现沿该三角形的三条中位线将这个三角形折叠成一个四面体，求这个四面体的体积.

解. 根据题意得，这个四面体是三组对棱分别为 $4,5,6$ 的等腰四面体，将它放在一个长方体内，设

长方体的长宽高分别为 a,b,c，则：

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b^2+c^2=36, \\ c^2+a^2=16, \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}, b=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}, c=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. 根据性质 3，四面体体积 $V=\dfrac{1}{3}abc=\dfrac{15\sqrt{6}}{4}$. ♡

三条侧棱两两垂直的四面体称为**垂直四面体**，垂直四面体有 3 个面是直角三角形，剩下的一个 "斜的" 面是锐角三角形. 对于垂直四面体，有如下事实：三个直角三角形面面积的平方和，等于第 4 个面 (斜面) 的平方，即：

$$S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2.$$

这个结果可以用后面将会讨论到的面积射影定理很方便地得到.

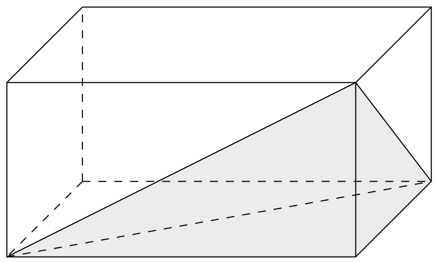


图 8.29: 垂直四面体

垂直四面体也可以放进长方体，用模型法来研究. 设垂直四面体两两垂直的三条棱长度分别为 a,b,c，那么另外三条棱的长度恰好为长方体的三条体对角线长 $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{c^2+a^2}$.

结合模型法，立刻得到垂直四面体具有如下性质：

1° 体积 $V=\dfrac{1}{6}abc$，等于对应长方体体积的 $\dfrac{1}{6}$.

2° 对棱中点的连线相互垂直平分.

3° 等腰四面体的外接球恰好就是对应长方体的外接球，所以外接球半径等于长方体体对角线的一半，即 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

内切球半径 $r=\dfrac{3V}{S_{表}}$.

四个面都是直角三角形的四面体称为**鳖臑**(biē nào). 鳖臑可以放进长方体中研究，如图8.30 所示. 此外, 鳖臑还可以用如下方式生成: 考虑一个以 AB 为直径的圆, 圆所在的平面为 α, 作 $PA\perp\alpha$, 并取圆上异于 A,B 的任意一点 C，那么三棱锥 $P-ABC$ 就是一个鳖臑，如图8.31 所示.

根据模型法，我们可以得到鳖臑具有如下性质：

1° 外接球半径 $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，内切球半径 $r=\dfrac{3V}{S_{表}}$.

2° 体积 $V=\dfrac{1}{6}abc$.

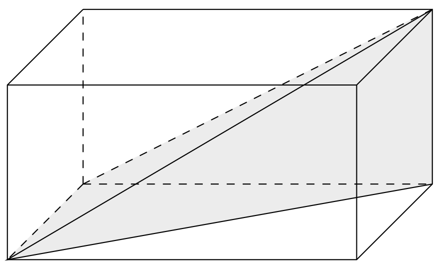


图 8.30: 鳖臑

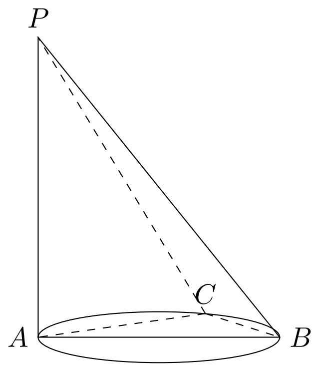


图 8.31: 鳖臑

鳖臑的概念最初见于《九章算术 · 商功》:“斜解立方，得两堑堵. 斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑.” 其中“堑堵”指的是底面为直角三角形的直三棱柱，取一长方体沿对角面一分为二可以得到两个相同的堑堵.“阳马”指的是底面为长方形，且其中一条侧棱与底面垂直的四棱锥，按图8.32 所示方法分割堑堵，可以得到一个阳马和一个鳖臑.

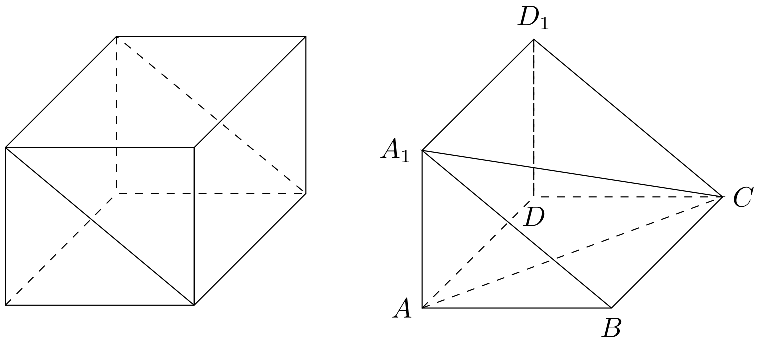


图 8.32: 右边的图中，三棱锥 A_1-ABC 是鳖臑，四棱锥 $C-ADD_1A_1$ 是阳马

习题 8.1

1. 已知正四面体内切球的半径是 1，则该四面体的体积为______.

2. 一个棱长为 6 的正四面体纸盒内放一个小正四面体，若小正四面体可以在纸盒内任意转动，则小正四面体棱长的最大值为______.

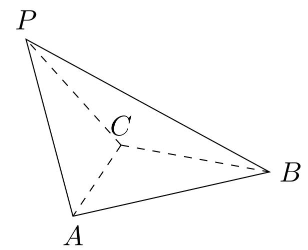
3. 四面体 $P-ABC$，$PA=BC=\sqrt{6}$，$PB=AC=\sqrt{8}$，$PC=AB=\sqrt{10}$，则该四面体外接球的半径为______.

4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，三条棱 PA、PB、PC 两两垂直，且 $PA=1$，$PB=2$，$PC=2$，若点 Q 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球面上任一点，则 Q 到面 ABC 距离的最大值为______.

5. 已知空间四点 A,B,C,D 满足 $AB\perp AC, AB\perp AD, AC\perp AD$，且 $AB=AC=AD=1$，Q 是三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球面上的一个动点，则点 Q 到平面 BCD 的最大距离是______.

6. 顶点为 P 的圆锥的轴截面是等腰直角三角形，A 是底面圆周上的点，B 是底面圆内的点，O 为底面圆圆心，$AB\perp OB$，垂足为 B，$OH\perp HB$，垂足为 H，且 $PA=4$，C 为 PA 的中点，则当三棱锥 $O-HPC$ 的体积最大时，OB 的长为______.

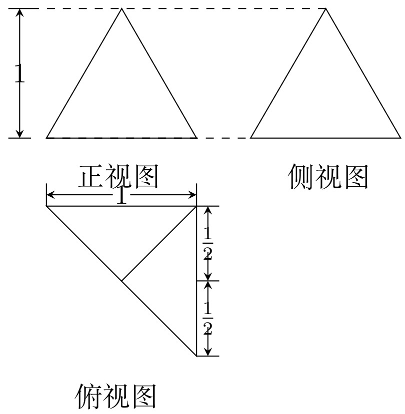
7. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAC,\triangle ABC$ 都是边长为 6 的等边三角形, 若二面角 $P-AC-B$ 的大小为 120°，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的面积为______.



8. 已知四面体 $ABCD$ 内接于球，且 AD 是球直径，若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 1 的等边三角形，则四面体 $ABCD$ 的体积为______.

9. 三棱锥 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，$PA=3,PB=4,PC=5$，则此三棱锥 $P-ABC$ 的体积为______.

10. 一个三棱锥的三视图如图所示，其中正视图和侧视图是全等的等腰三角形，则此三棱锥外接球的表面积为______.



11. 三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，$PB=PC=\sqrt{5}$，且二面角 $P-BC-A$ 的大小为 45°，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为______.

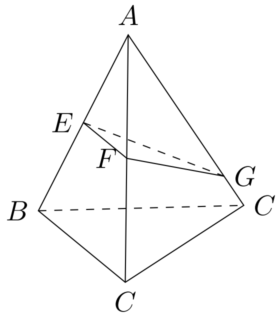
12. 四面体 $ABCD$ 中，已知 $AB=2,AD=\dfrac{11}{2},BC=8,CD=\dfrac{19}{2}$，则异面直线 AC 与 BD 所成角的正弦值是______.

13. 体积为 1 的正四面体被放置于一个正方体中，则此正方体体积的最小值是______.

14. 已知四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=5,AD=BC=\sqrt{34},AC=BD=\sqrt{41}$，则该四面体的体积为______.

15. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点，并且 PA, PB, PC 两两垂直，$PH\perp$ 面 ABC 于 H. 若 $PA=\frac{1}{3}, PB=\frac{1}{4}, PC=\frac{1}{5}$，则 $PH=$______.

16. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $a(a>3)$ 如图如示, 点 E, F, G 分别在棱 AB, AC, AD 上. 则满足 $EF=EG=3, FG=2$ 的 $\triangle EFG$ 的个数共有______.

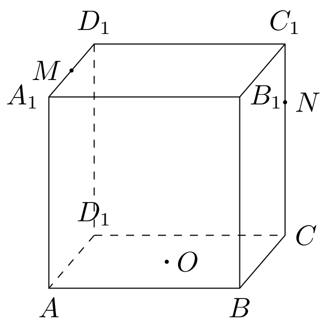


17. 已知棱长为 1 的正四面体 $P-ABC$，PC 的中点为 D，动点 E 在线段 AD 上，则直线 BE 与平面 ABC 所成的角的取值范围为______.

18. 已知点 P 为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 上底面 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心, 作平面 $BCD\perp AP$，与棱 AA_1 交于 D，若 $AA_1=2AB=2$，则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为______.

19. 将半径为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高的最小值为______.

20. 如图所示的单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，点 M, N 分别在棱
A_1D_1, CC_1 上，$A_1M=\frac{1}{2}$，$CN=\frac{2}{3}$，则四面体 $OMNB_1$ 的体积等于______.



21. 已知正三棱锥的侧面是面积为 1 的直角三角形，则该正三棱锥的体积为______.

22. 正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $9\sqrt{3}$, 侧面 PAB 与底面 ABC 所成二面角的平面角为 $60°$, 点 D 是线段 AB 上一点，$AD=\frac{1}{6}AB$, 点 E 是线段 AC 上一点，$AE=\frac{1}{6}AC$, F 是线段 PC 的中点, 平面 DEF 交线段 PB 于点 G, 求四边形 $DEFG$ 的面积.

23. 已知 A, B, C, D 是某球面上不共面的四点，且 $AB=BC=AD=1, BD=AC=\sqrt{2}, BC\perp AD$, 此球的体积等于______.

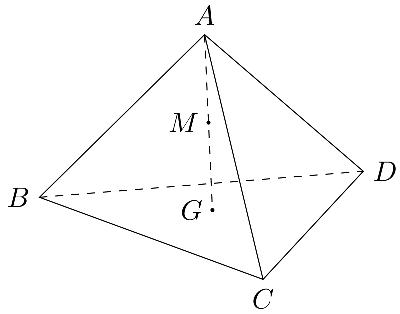
24. 与正四面体 4 个顶点距离之比为 $1:1:1:2$ 的平面共有______ 个.

25. 四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是一个正三角形，$AD=BD=2$ ，$AD\perp BD$ ，$AD\perp CD$，则 D 到面 ABC 的距离为______.

26. 四面体 $ABCD$ 中，有一条棱长为 3，其余 5 条棱长皆为 2，则其外接球的半径为______.

27. 已知四面体的一条棱长为 6，其余棱长均为 5，则这个四面体的外接球的半径为______.

28. 如图，在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，G 为 $\triangle BCD$ 的重心，M 是线段 AG 的中点，则三棱锥 $M-BCD$ 的外接球的表面积为______.



29. 已知四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2, AD=AC=BC=BD=3$ ，M,N 分别为 AB,CD 上的动点，则 MN 的最小值为______.

30. 在半径为 R 的球面上有 A,B,C,D 四点，$AB=BC=CA=3$, 若四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 。则此球的表面积为______.

31. 已知线段 AB 是半径为 2 的球 O 的直径，C,D 两点在球 O 的球面上，$CD=2$，$AB\perp CD$，$45^\circ\le\angle AOC\le 135^\circ$，则四面体 $ABCD$ 的体积的取值范围是______.

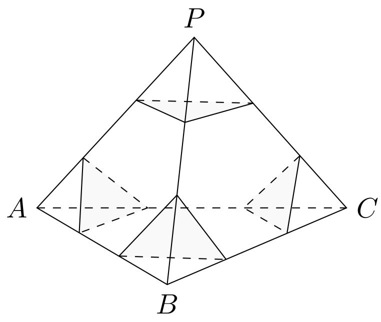
32. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA=4$，$SB\ge 7$，$SC\ge 9$，$AB=5$，$BC\le 6$，$AC\le 8$，则三棱锥的体积的最大值为______.

33. 正四面体的棱长为 $2\sqrt{6}$，以其中心 O 为球心作球，球面与正四面体四个面相交所成曲线的总长度为 4π，则球 O 的半径是______.

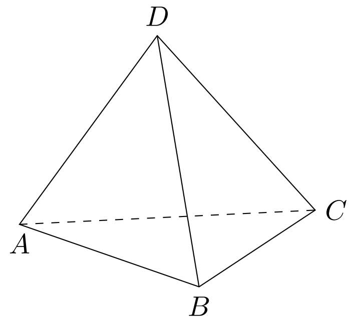
34. 棱长为 6 的正方体内有一个棱长为 x 的正四面体，且该四面体可以在正方体内任意转动，则 x 的最大值为______.

35. 已知正四面体可容纳 10 个半径为 1 的小球，则正四面体棱长的最小值为______.

36. 如图所示，分别作正四面体 $P-ABC$ 的平行于四个面的截面，使得 $P-ABC$ 的四个面都被截成正六边形，截去 4 个小四面体后得到的多面体记为 G，则四面体 $P-ABC$ 与多面体 G 的表面积比为______，体积比为______.

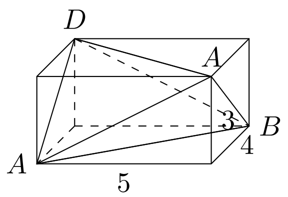


37. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$DA=DB=DC=2$，$DA\perp DB$，$DA\perp DC$，且 DA 与平面 ABC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则该四面体外接球半径 $R=$______.



38. 在四面体 $ABCD$ 内部有一点 O，满足 $OA=OB=OC=4$，$OD=1$，求四面体 $ABCD$ 体积的最大值.

39. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=5$，$AC=BD=\sqrt{34}$，$AD=BC=\sqrt{41}$，则 $ABCD$ 外接球的表面积是______.



40. 在直角四面体 $ABCD$ 中，若六条棱长的和为 6，则其体积的最大值为______.

41. 在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=2$，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$DA\perp AB$，$\angle CDA=60°$. 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为______.

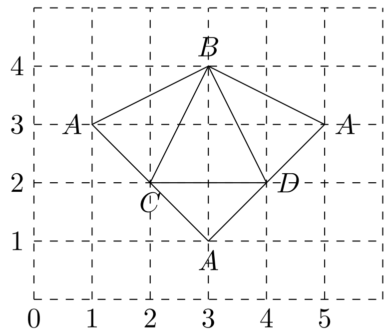
42. 棱长为 1 的正四面体的四个面的中心所组成的小四面体的外接球的体积为______.

43. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=3$，$BD=BC=4$，$BD\perp$ 面 ABC，则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为______.

44. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面是边长为 $4\sqrt{2}$ 的正三角形，$PA=3$，$PB=4$，$PC=5$. 若 O 为 $\triangle ABC$ 的中心，则 PO 的长为______.

45. 已知正三棱锥 $P-ABC$，点 A、B、C 均在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上．若 PA、PB、PC 两两互相垂直，则球心到截面 ABC 的距离为______．

46. 已知四面体 $ABCD$ 的侧面展开图如下图所示，则其体积为______．



47. 已知正四面体 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$，其外接球的球心为 O，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB}$=______．

8.2 空间中的平行关系与垂直关系

8.2.1 平行关系的判定和性质

空间中的平行关系包括直线与直线的平行、直线与平面的平行以及平面与平面的平行．

观察 如图8.33所示，空间中直线与平面的位置关系可分为三种：

(1) **直线在平面内**即 $a \subsetneqq \alpha$——直线与平面有无数个公共点，事实上，根据公理2，此时直线上所有点都在平面内；

(2) **直线与平面相交**即 $a \cap \alpha = A$——直线与平面有且仅有一个公共点；

(3) **直线与平面平行**即 $a//\alpha$——直线与平面没有公共点．

当直线与平面相交或平行时，**直线不在平面内**，或者也可以说**直线在平面外**．

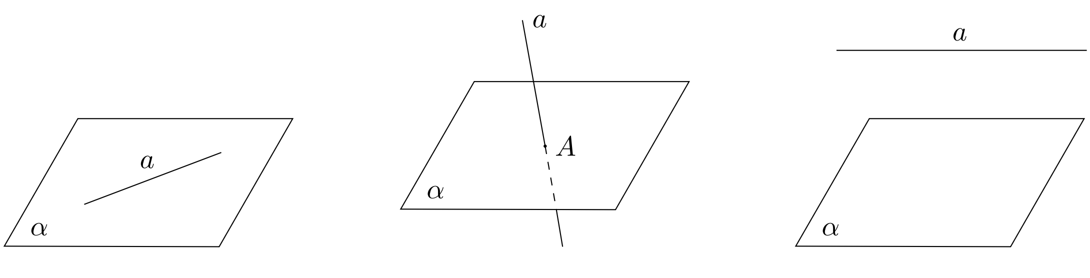


图 8.33: 直线与平面的位置关系

空间中平面与平面的位置关系可分为两种：

(1) **两个平面平行**——两个平面没有公共点；

(2) **两个平面相交**——两个平面有一条公共直线．

平面 α 和平面 β 平行记作 $\alpha//\beta$．

根据定义，若要判定直线和平面平行，需要保证直线和平面没有公共点，但是直线是无限延伸的，平面是无限延展的，直接用定义判定直线与平面平行比较困难.

一般地，我们有直线与平面平行的判定定理：

定理 8.2.1 (线面平行的判定定理). 如果平面外一条直线与平面内一条直线平行，那么该直线与平面平行.

用符号语言表示如下：

$$a \not\subseteq \alpha, b \subsetneqq \alpha \text{且} a//b \Rightarrow a//\alpha.$$

运用定理判定线面平行需要三个条件："线在面外"、"线在面内" 和 " 线线平行"，三者缺一不可.

有了线面平行的判定定理，证明线面平行问题就转化成了证明线线平行的问题，这个定理是证明线面平行的最常用方法.

在证明具体的线面平行问题时，常用的两个小技巧是构造平行四边形或三角形的中位线，从而构造线线平行.

定理8.2.1为我们提供了利用平面内的直线和平面外的直线平行来判定平面外的直线与此平面平行的方法，即得到了平面外一条直线与平面平行的充分条件. 反过来，如果一条直线和一个平面平行，能推出什么结论呢？直觉告诉我们，这应当也是一个有关线线平行的结论.

定理 8.2.2 (线面平行的性质定理). 设一条直线与一个平面平行，如果过该直线的平面与此平面相交，那么该直线与交线平行.

用符号语言表示如下：

$$a//\alpha, a \subsetneqq \beta, \alpha \cap \beta = b \Rightarrow a//b.$$

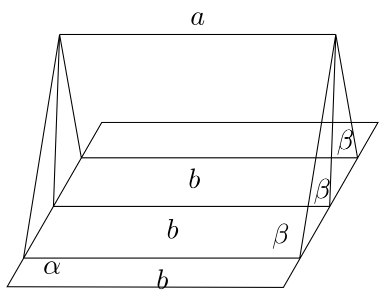


图 8.34: 线面平行的性质定理

证明. 因为 $\alpha \cap \beta = b$,

所以 $b \subsetneqq \alpha$,

又因为 $a//\alpha$,

所以 a 与 b 无公共点.

又因为 $a \subsetneqq \beta$，$b \subsetneqq \beta$,

所以 $a//b$. □

接下来我们讨论平面与平面平行的判定问题. 如果要用定义直接判定平面与平面平行，需要保证平面与平面没有公共点，这是一个比较困难的问题. 类似于研究线面平行的判定，我们自然希望能够将面面平行问题转化为线面平行问题.

根据面面平行的定义可以进一步发现：因为两个平面没有公共点，所以平面内的任意直线和另一个平面都没有公共点，根据线面平行的定义，这也就是说：

命题 8.1. 两个平面平行，等价于平面内的任意一条直线都与另一个平面平行.

这个事实可以由线面平行和面面平行的定义直接得到，即它给出了面面平行的充要条件. 所以可以想到，如果一个平面内任意一条直线和另一平面都平行，那么这两个平面平行.

要保证一个平面内的任意一条直线与另一平面平行依然是困难的，有没有简便的方法呢?

事实上，我们有如下的面面平行的判定定理;

定理 8.2.3 (面面平行的判定定理). 如果一个平面内的两条相交直线与另一平面平行，那么这两个平面平行.

用符号语言表示如下：

$$a \subsetneqq \beta, b \subsetneqq \beta, a \cap b = P, a//\alpha, b//\alpha \Rightarrow \beta//\alpha.$$

有这个定理可以看出，要判定面面平行，只要证明一个平面内有两条相交直线与另一平面平行就足够了.

在使用面面平行的判定定理判定两个平面平行时需要五个条件，即：“两个线在面内”、“两个线面平行”和“两线相交”，五个条件缺一不可，读者可以自己试着举出反例说明.

下面我们研究面面平行的必要条件 (即性质定理)，也就是以面面平行为已知条件，探究可以推出哪些结论.

首先根据定义可知，面面平行等价于平面内任意一条直线都与另一个平面平行，因此由面面平行可以直接推出线面平行的有关结论.

下面探究两个平行平面内的直线具有什么位置关系. 显然，因为平行平面没有公共点，所以平行平面内的直线也没有公共点，因此，分别位于两个平行平面内的两条直线要么是异面直线，要么是平行直线.

那么,分别位于两个平行平面内的两条直线什么时候平行呢?我们可以做如下分析:设 $\alpha//\beta, a \subsetneqq \alpha, b \subsetneqq \beta$，要使得 $a//b$，只需 a, b 同在一个平面 γ 内，这样，我们可以把 a, b 看成平面 γ 与 α,β 的交线.

事实上，我们由如下定理：

定理 8.2.4 (面面平行的性质定理). 两个平面平行，如果另一个平面与这两个平面相交，那么两条交线平行.

用符号语言表示如下：

$$\alpha//\beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b \Rightarrow a//b.$$

这个定理告诉我们由面面平行可推出线线平行.

这个定理是解决有关**截面的问题**的重要基础.

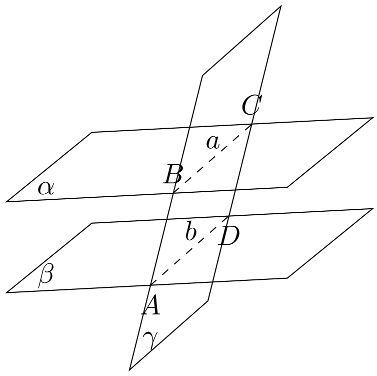


图 8.35: 面面平行的性质定理

推论 1　夹在两平行平面之间的平行线段长度相等.

证明. 如图8.35所示，设 $AB//CD$. 根据定理8.2.4 可知 $a//b$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$. □

推论 2　平行平面截割线段成比例，如图8.39 所示，$\alpha//\beta//\gamma$，则 $\dfrac{AA_1}{A_1A_2}=\dfrac{BB_1}{B_1B_2}$.

证明. 过点 A 作直线 BB_2 的平行线，由推论 1 可知 $AC_1=BB_1, C_1C_2=B_1B_2$，由此可得证. □

空间中平行关系的相互转化可以总结为下图：

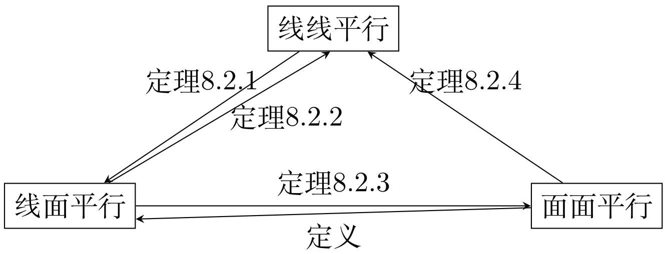


图 8.36:

最后以正方体的截面问题为例，展示一下定理8.2.4在解决截面问题中的应用.

例 8.10 (正方体的截面). (1) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 在棱 BC 上，点 Q 为棱 CC_1 的中点，若过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面为五边形，则 BP 的取值范围为______.

(2) 已知正方体的棱长为 1，平面 α 与平面 B_1CD_1 平行或重合，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 (　　　　　).

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解. (1) 如图8.37所示，由定理8.2.4 可知 $AD_1//PQ$. 当 P 恰好为 BC 中点时，截面是四边形 $APQD_1$. 从而：

当 $BP < \dfrac{1}{2}$ 时，截面是四边形；当 $BP > \dfrac{1}{2}$ 时，截面为五边形.

所以，BP 的取值范围是 $(\dfrac{1}{2}, 1)$.

(2) 由定理8.2.4可知，平面 α 截此正方体的截面是正三角形或六边形. 当截面是正三角形时，最大面积等于 $S_{\triangle B_1CD_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

当截面是六边形时，如图8.38所示. 根据定理8.2.4 可知 $EJ//GH, EF//IH, FG//JI$，由此可知 $GH + EJ = \sqrt{2}$，$EF = IJ = GH, EJ = IH = FG$. 设 $EJ = x(0 < x < \sqrt{2})$，则 $S_{六边形} = S_{梯形EJIF} + S_{梯形HGFI}$.$S_{梯形EJIF} = \dfrac{1}{2}[x+\sqrt{2}]\cdot[(\sqrt{2}-x)\sin 60^\circ] = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2-x^2)$，$S_{梯形HGFI} = \dfrac{1}{2}[\sqrt{2}+\sqrt{2}-x]\cdot x\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x(2\sqrt{2}-x)$，所以 $S_{六边形} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(-2x^2+2\sqrt{2}x+2)$. 当 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$S_{六边形}$ 有最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

此时，E, F, G, H, I, J 分别是所在棱的中点，六边形 $EFGHIJ$ 是一个正六边形. ♡

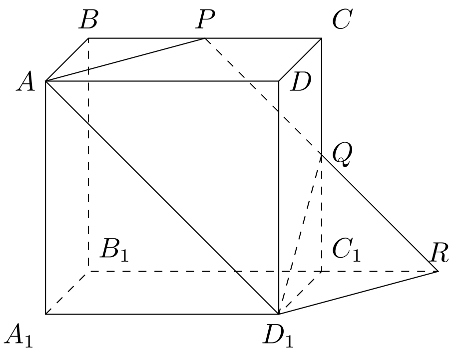


图 8.37:

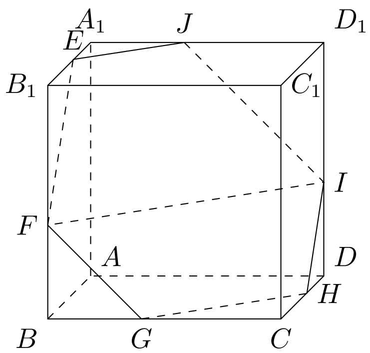


图 8.38:

评注 8.10.1. 任意平面截正方形，得到的截面可能是三角形，平行四边形，梯形（不是直角梯形），五边形或六边形.

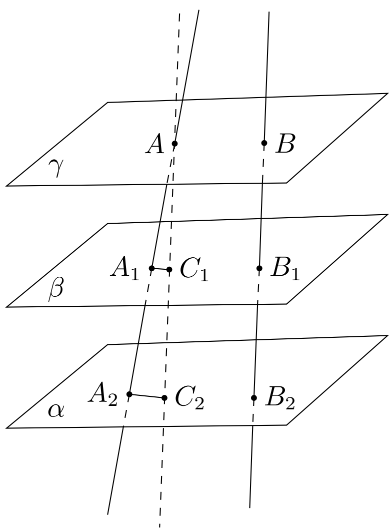


图 8.39:

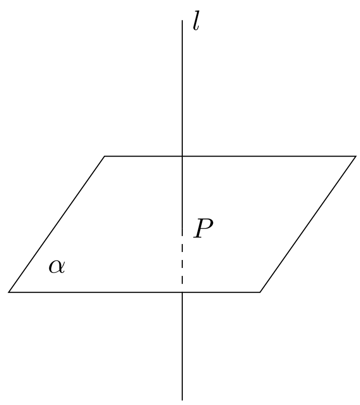


图 8.40: 线面垂直

8.2.2 垂直关系的判定和性质，线面角与二面角

空间中线线垂直分为相交垂直和异面垂两种情况. 对于异面直线，如果异面直线所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，我们就说这两条异面直线相互垂直.

一般地，如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 垂直，记作 $l \perp \alpha$，直线 l 称为平面 α 的垂线，平面 α 称为直线 l 的垂面，直线与平面垂直时，它们的唯一公共点 P 称为垂足.

可以发现，**过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条**，因此，过一点可以唯一地作出垂直于已知平面的直线，我们称该点与垂足之间的线段为这个点到该平面的**垂线段**，垂线段的长度就是**这个点到该平面的距离**.

下面我们研究线面垂直的判定定理，即直线与平面垂直的充分条件.

根据定义，要判定直线与平面垂直，需要验证这条直线与平面内的所有直线都垂直，这是很难做到的，那么有没有可行的方法?

一般地，我们有如下定理:

定理 8.2.5 (线面垂直的判定定理). *如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么该直线与平面垂直.*

用符号语言表示如下:

$$a \subsetneqq \alpha, b \subsetneqq \alpha, l \perp a, l \perp b, a \cap b = P \Rightarrow l \perp \alpha.$$

运用这个定理判定线面垂直需要五个条件，即两个线面垂直、两个线在面内以及两线相交.

定理体现了线面垂直与线线垂直的相互转化.

下面我们研究直线与平面垂直的性质，即探究直线 a 和平面 α 垂直的条件下，能推出哪些结论.

根据已有的经验，我们可以探究直线 a 与平面 α 内直线的关系，但是根据定义，a 与 α 内的所有直线都垂直，研究这个问题没什么意思，所以我们将目光转向探究 a,α 与其他直线或平面的关系.

事实上，我们有如下定理:

定理 8.2.6 (线面垂直的性质定理). *垂直于同一平面的两条直线相互平行.*

用符号语言表示:

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a // b.$$

可见，由线面垂直可导出线线平行的结论.

证明. 用反证法，假设 a 和 b 不平行，且 $b \cap \alpha = O$，$O \notin a$. 在直线 a 和点 O 确定的平面内作 $b' // a$，则直线 b' 和 b 可以确定平面 β，设 $\alpha \cap \beta = c$，根据公理3可知 $O \in c$，因为 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$，所以 $a \perp c$，$b \perp c$，又因为 $b' // a$，所以 $b' \perp c$，这样在平面 β 内经过直线上同一点 c 有两条直线 b 和 b' 与 c 垂直，这显然不可能，所以 $b // a$. □

我们在之前的讨论中引入了线线角 (相交直线或异面直线所成的角) 的概念来定量地刻画两条直线的位置关系，对于直线和平面也可以类似地引入线面角的概念.

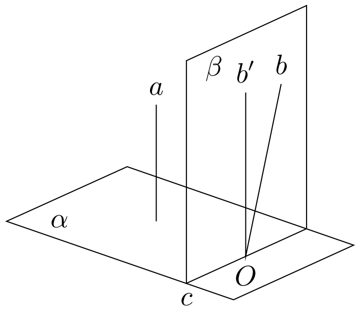


图 8.41:

如图所示，一条直线 l 与平面 α 相交但不垂直 ("斜线")，过斜线上除斜足以外的一点 P 向 α 引垂线 PO，则过斜足 A 和垂足 O 的直线就是斜线 l 在平面 α 上的投影，平面的一条斜线和它的平面上的投影所成的角，称为这条直线与这个平面所成的角. 特别地，如果一条直线垂直于平面，我们说它们所称的角是 $\dfrac{\pi}{2}$，如果一条直线与平面平行或者直线在平面内，我们说它们所称的角是 0.

直线与平面所成的角 θ 的范围是 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

像研究直线与平面垂直一样，要研究平面和平面的垂直，首先应当给出平面与平面垂直的定义.

我们首先需要引入**二面角**的概念，用以刻画两个相交平面的位置关系，进而研究两个平面互相垂直.

如图，从一条直线出发的两个 "半平面" 组成的图形叫做**二面角**. 这条直线叫做**二面角的棱**，这两个半平面称为**二面角的面**，以 α 和 β 为面，以 AB 为棱的二面角记作二面角 $\alpha - AB - \beta$. 有时为了方便也可以在 α 和 β 内（棱以外的半平面部分）分别取点 P 和 Q，将这个二面角记为二面角 $P - AB - Q$，如果将棱记为 l，那么二面角也可以类似地记为二面角 $\alpha - l - \beta$ 或二面角 $P - l - Q$.

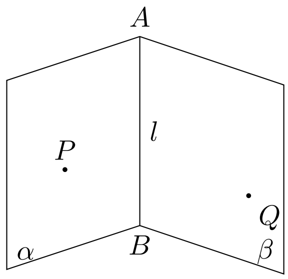


图 8.42: 二面角

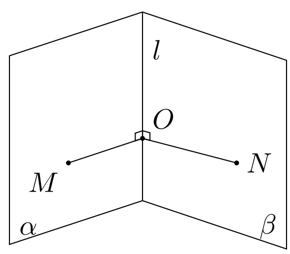


图 8.43: 二面角的平面角

过棱 l 上任意一点 O 在两个半平面内分别作 l 的垂线 OM 和 ON，则射线 OM 和射线 ON 构成的 $\angle MON$ 称为**二面角的平面角**. 显然，对于给定的二面角，其平面角的大小是确定的，而与 O 点的选取无关.

平面角是用来度量二面角大小的几何量，平面角是直角的二面角叫做直二面角，二面角的平面角 α 的范围是 $0 \leq \alpha \leq \pi$.

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直. 平面 α 和平面 β 垂直记作 $\alpha \perp \beta$.

在明确了两个平面互相垂直的定义的基础上，我们可以给出面面垂直的判定：

定理 8.2.7 (面面垂直的判定定理). 如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面垂直.

用符号语言表示如下：

$$l \perp \beta, l \subsetneqq \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta.$$

这个定理说明，可以由"线面垂直"和"线在面内"证明面面垂直.

在两个平面相互垂直的条件下，我们可以研究其中一个平面内的直线与另一个平面的位置关系. 设 $\alpha \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = a$，对于 $b \subsetneqq \beta$ 且 $b \perp a$，设 b 和 a 的交点为 A，过点 A 在 α 内作直线 $c \perp a$，根据二面角的平面角的定义以及面面垂直的定义立刻得到 $b \perp c$，这时 b 垂直于 a 和 c，而 a 和 c 又是 α 内的相交直线，所以我们可以推出 $b \perp \alpha$ 即"线面垂直". 一般地，我们有：

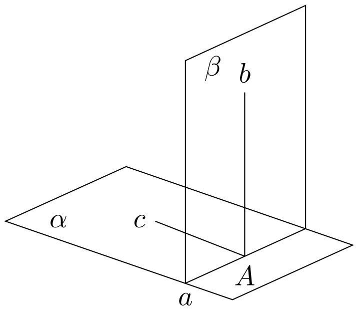


图 8.44:

定理 8.2.8 (面面垂直的性质定理). 两个平面垂直，如果一个平面内一直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直.

用符号语言表示，如下：

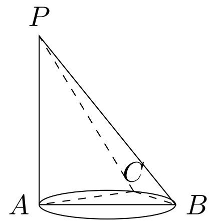
$$\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = a, b \perp a \Rightarrow b \perp \alpha.$$

例 8.11 (鳖臑再研究). 如图所示，AB 是圆 O 的一条直径，点 C 是圆 O 上一点，$PA \perp$ 平面 ABC.

(1) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 PBC；

(2) 证明三棱锥 $P-ABC$ 的四个面都是直角三角形；

(3) 设 $PA = \sqrt{3}, AC = 1$，求点 A 到平面 PBC 的距离.



(1)(分析：要证明面面垂直，只需在其中一个平面找到直线垂直于使其与另一个平面垂直. 观察图形特征，显然有 $BC \perp AC$，只需证明 $BC \perp PC$. 又根据 $PA \perp$ 平面 ABC 注意到 $PA \perp BC$ 以及 $AC \perp BC$，由此可知 $BC \perp$ 平面 PAC，根据线面垂直由定义可得 $BC \perp PC$.)

证明. 因为 $PA \perp$ 平面 ABC，$CB \subsetneqq$ 平面 ABC，

所以 $PA \perp BC$.

因为 C 为圆 O 上一点，AB 为直径，

所以 $BC \perp AC$.

又因为 $AC \cap PA = A$，$AC \subsetneqq$ 平面 PAC，$PA \subsetneqq$ 平面 PAC，

所以 $BC \perp$ 平面 PAC.

又因为 $PC \subsetneqq$ 平面 PAC，

所以 $BC \perp PC$，

因为 $PC \subsetneqq$ 平面 PCB，

所以平面 $PCB \perp$ 平面 PAC. □

(2)

证明. 因为 $AC \perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

因为 $PA \perp$ 平面 ABC，$AB \subsetneqq$ 平面 $ABC, AC \subsetneqq$ 平面 ABC，

所以 $PA \perp AB$，$PA \perp AC$，

所以 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PAB$ 都是直角三角形.

由 (1) 知 $BC \perp PC$，所以 $\triangle PCB$ 是直角三角形.

综上所述，鳖臑的四个面都是直角三角形. □

(3)(分析：由 (1) 知，平面 $PAC \perp$ 平面 PBC，由面面垂直的性质定理可知 A 到交线 PC 的垂线段长度就是 A 与平面 PBC 的距离.)

解. 过点 A 作 $AD \perp PC$，垂足为点 O.

由 (1) 知，平面 $PAC \perp$ 平面 PBC，又因为平面 $PAC \cap$ 平面 $PBC = PC$，$AD \subsetneqq$ 平面 PAC，

所以 $AD \perp$ 平面 PCB.

在直角三角形 PAC 中，$\angle PAC = \dfrac{\pi}{2}$，$PA = \sqrt{3}$，$AC = 1$，$PC = 2$，

所以 $AD = \dfrac{PA \cdot AC}{PC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即点 A 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ♡

例 8.12 (证明垂直四面体直角顶点在斜面上的投影是垂心). 在垂直四面体 $P-ABC$ 中，$PA \perp PC$，$PB \perp PC$，$PB \perp PA$，由 P 点向平面 ABC 引垂线，垂足为 P'.

证明：P' 是三角形 ABC 的垂心.

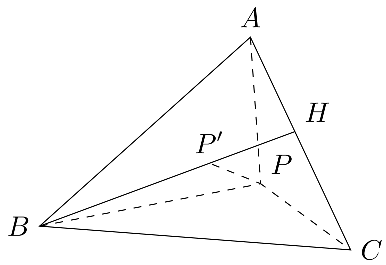


图 8.45:

(分析：实际上 P' 是 P 在底面上的投影，要证明 P' 是三角形 ABC 的垂心，只需证明 $BP' \perp AC$ 即可，注意到 $BP \perp AC$，$PP' \perp AC$，所以 $AC \perp$ 平面 BPP'，由此得证)

证明. 因为 $PP' \perp$ 平面 ABC，$AC \subsetneqq$ 平面 ABC，

所以 $PP' \perp AC$.

又因为 $BP \perp PC, BP \perp PA, PA \cap PC = P, PA \subsetneqq$ 平面 $PAC, PC \subsetneqq$ 平面 PAC，

所以 $BP \perp$ 平面 PAC，

又因为 $AC \subsetneqq$ 平面 PAC，

所以 $AC \perp BP$，

又因为 $BP \cap PP' = P$，$BP \subsetneqq$ 平面 BPP'，$PP' \subsetneqq$ 平面 BPP'，

所以 $AC \perp$ 平面 BPP'，

又因为 $BP' \subsetneqq$ 平面 BPP'，

所以 $BP' \perp AC$.

同理可得，$CP' \perp AB$，$AP' \perp BC$，即 P' 是三角形 ABC 的垂心. □

最后，我们将空间中垂直关系的相互转化总结为下图：

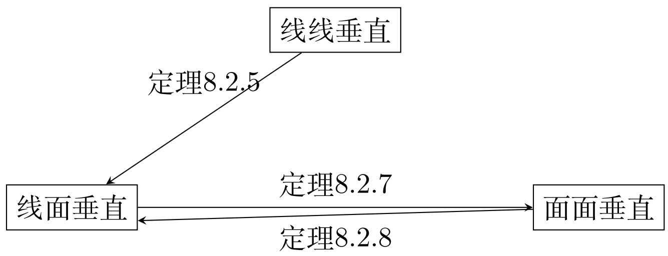


图 8.46:

将平行关系和垂直关系整合起来，还可以总结成这样一张图：

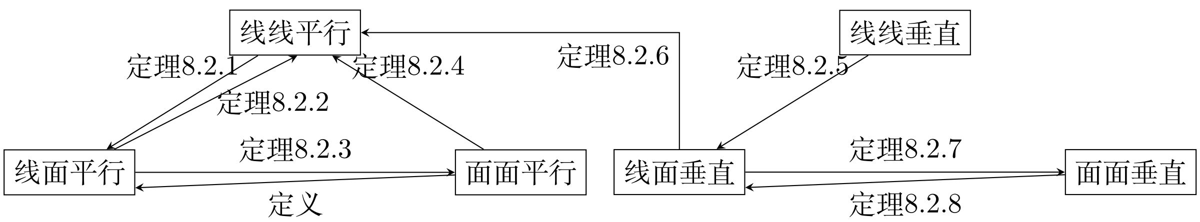


图 8.47:

8.2.3 三垂线定理和最小角定理

在这一节中我们将进一步深入地研究垂直关系以及线线角、线面角和二面角的有关问题.

观察 回顾例题8.12，我们根据 $PP' \perp AC$ 和 $BP \perp AC$，通过先证明线面垂直，推出了 BP 在平面 ABC 内的投影 BP' 与直线 AC 垂直. 一般地，这样一个事实及其逆定理可以归结为如下定理：

定理 8.2.9 (**三垂线定理**). *若平面外一条直线与平面内的一条直线垂直，则平面外的直线在平面内的投影与平面内该直线也垂直，反之也成立.*

如图 8.48 所示，l 在 α 内的投影是 l'，$m \subsetneqq \alpha$，那么 $l \perp m \Leftrightarrow l' \perp m$.

在这个图形中涉及到三组线线垂直：$AD \perp BC$，$A'D \perp BC$ 和 $AA' \perp BC$，已知其中任意两组垂直关系都可以推出第三组垂直关系，我们称这个定理及其逆定理为三垂线定理.

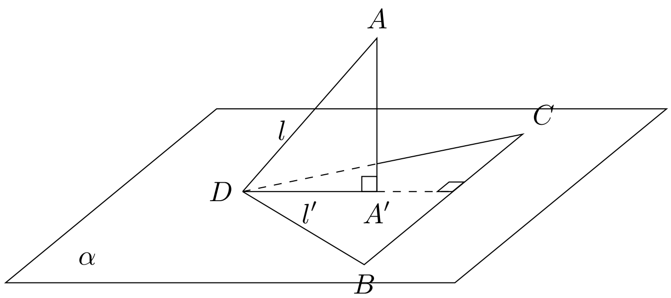


图 8.48: 三垂线定理

特别地，如果 $l \perp m$，且 A' 是 $\triangle BCD$ 的垂心，根据三垂线定理我们得到 $AD \perp BC, AC \perp BD, AB \perp CD$，即四面体 $ABCD$ 的对棱垂直.

例 8.13. 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=1, AD=2$，求二面角 $A-BD-A'$ 的余弦值.

(分析：注意到这里 A 恰好是 A' 在平面 BCD 内的投影，根据三垂线定理，如果我们作 $AH \perp BD$，那么自然有 $A'H \perp BD$，这样就找到了二面角的平面角.)

解. 在平面 ABD 内作 $AH \perp BD$，垂足为 H，连接 $A'H$，如图8.49所示.

因为 $AA' \perp$ 平面 ABD，$BD \subsetneqq$ 平面 ABD，

所以 $AA' \perp BD$.

又因为 $AH \subsetneqq$ 平面 $AA'H$，$AA' \subsetneqq$ 平面 $AA'H$，$AH \perp BD$，$AA' \cap AH = A$，

所以 $BD \perp$ 平面 $AA'H$.

又因为 $A'H \subsetneqq$ 平面 $AA'H$，

所以 $BD \perp A'H$，即 $\angle AHA'$ 就是二面角 $A-BD-A'$ 的平面角.

在直角三角形 ABD 内，$AH = \dfrac{1 \times 2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，在直角三角形 $AA'H$ 中，$AA'=2$，

所以 $\tan \angle AHA' = \sqrt{5}$，

所以 $\cos \angle AHA' = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即二面角 $A-BD-A'$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ♡

评注 8.13.1. 三垂线定理的一个重要应用就是找二面角的平面角，一般地，找二面角 $A-BC-D$ 的平面角的步骤可以总结如下：

1° 转化：$A-BC-D$ 转化为 $A'-BC-D$，并使 $A'D \perp BC$（使得 D 成为 A' 在平面 BCD 内的投影）.

2° 作 $A'H \perp BC$ 于 H，连接 DH.

3° 由三垂线定理及二面角平面角的定义，$\angle DHA'$ 就是二面角 $A-BC-D$ 的平面角.

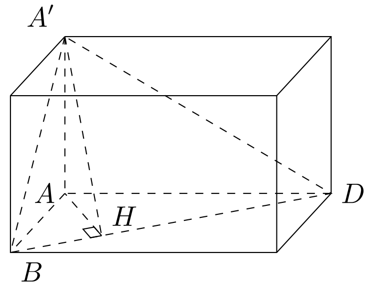


图 8.49:

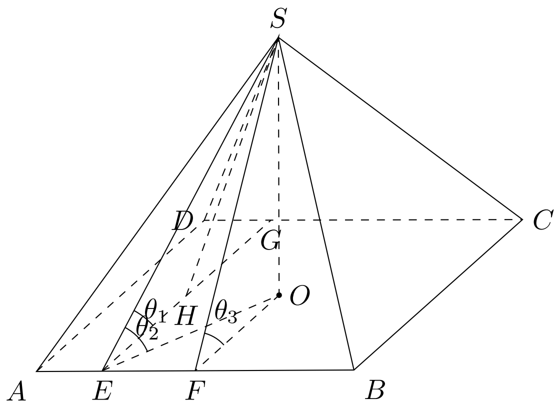


图 8.50:

例 8.14. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点（不包含端点）. 设 SE 和 BC 所成的角为 θ_1，SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2，二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3，则 (　　　　　).

(A) $\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$　　(B) $\theta_3 \le \theta_2 \le \theta_1$

(C) $\theta_1 \le \theta_3 \le \theta_2$　　(D) $\theta_2 \le \theta_3 \le \theta_1$

解. 如图8.50由题意得，四棱锥 $S-ABCD$ 是正四棱锥，设 O 是底面中心，则 $SO \perp$ 平面 $ABCD$，过点 E 作 $EG//BC$ 交 CD 于点 G, 则 $\angle SEG=\theta_1$, 显然 $SE=SG$, 取 EG 中点 H, 则 $SH \perp EG$，所以 $\tan\theta_1=\dfrac{SH}{EH}$. 取 AB 的中点 F，连接 OF,SF，因为 $SF \perp AB$，$OF \perp AB$，所以 $\angle SFO$ 是二面角 $S-AB-C$ 的平面角，所以 $\angle SFO=\theta_3$，$\tan\theta_3=\dfrac{SO}{OF}$，因为 $OF=EH$，而 $SO<SH$，所以 $\tan\theta_1>\tan\theta_3$，所以 $\theta_1>\theta_3$

因为 $SO \perp ABCD$，所以 $\angle SEO$ 就是 SE 与平面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle SEO=\theta_2$，$\tan\theta_2=\dfrac{SO}{OE}$.

因为 $OE>EF$，所以 $\tan\theta_3>\tan\theta_2$，所以 $\theta_3>\theta_2$.

所以 $\theta_1>\theta_3>\theta_2$，当且仅当 E 是 AB 中点时 $\theta_1=\theta_3=\theta_2$. ♡

事实上，我们有如下两个定理：

定理 8.2.10 (最小角定理). 对于 $l \not\subseteq \alpha$，$a \subsetneqq \alpha$，当直线 a 是 l 在平面 α 内的投影 l' 时，a 与 l 所成的角最小，用一句话概括为：线面角是最小的线线角. 这个结论通常称为**最小角定理**.

证明. 如图8.51, 设 A 是直线 l 上一点, 直线 l 与平面 α 交于点 O, l' 上的点 B 是 A 在平面 α 内的投影, 过点 B 作 $BC \perp a$ 交直线 a 于点 C, 由三垂线定理可知 $AC \perp OC$.(事实上四面体 $A-BOC$ 是一个鳖臑)

$\sin\theta_1=\dfrac{AB}{AO},\sin\theta=\dfrac{AC}{AO}$,

又因为 $AC \ge AB$，当且仅当 a 是 l' 时取到等号，因此 $\sin\theta \ge \sin\theta_1$，$\theta \ge \theta_1$. 这样我们就证明了线面角是最小的线线角.

由最小角定理可以立刻判断出例8.14中 $\theta_1 \ge \theta_2$. □

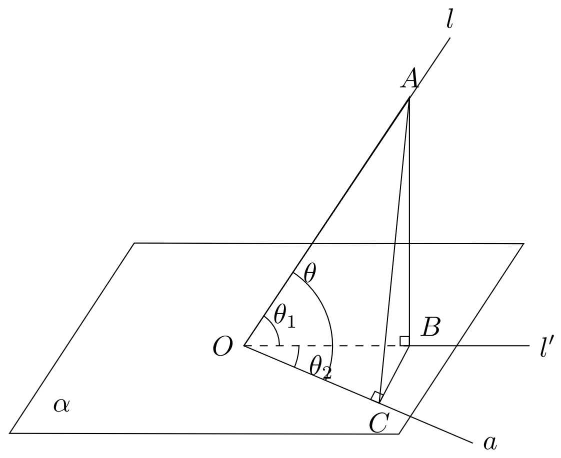


图 8.51: 最小角定理

事实上，线面角和线线角之间具有某些定量关系. 因为 $\cos\theta_1 = \dfrac{OB}{OA}, \cos\theta_2 = \dfrac{OC}{OB}, \cos\theta = \dfrac{OC}{OA}$，所以 $\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2$. 一般地，我们有如下结论：

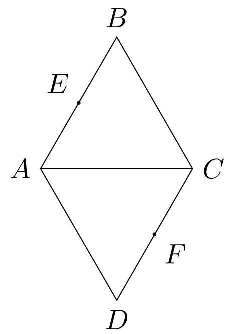
定理 8.2.11 (三余弦公式). 对于 $l \not\subseteq \alpha$(但不垂直),$a \subsetneqq \alpha$，设 l 在平面 α 内的投影是直线 l' (l' 与 a 不重合)，设 l 与 l'，l' 与 a，a 与 l 所成的角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta$，则三者满足

$$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2.$$

在上面的这个式子中 $\cos\theta_2 \in (0,1)$，所以当 l' 和 a 不重合时，$\cos\theta < \cos\theta_1$，所以当 l' 和 a 不重合时 $\theta > \theta_1$，这和最小角定理时一致的.

例 8.15. 如图所示，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 60^\circ$，E 和 F 分别为边 AB，AD 的中点，现将 $\triangle ABC$ 沿着对角线 AC 翻折，则在翻折的过程中直线 EF 和平面 ACD 所成角的正切值的最大值为 (　　　　　).

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(分析：首先要作出线面角，即找到点 E 在平面 ACD 中上的投影. 如果取 AD 的中点 M，连接 EM，可注意到 $EM \perp FM$，此时只需作 $MN \perp FM$，再作 $EH \perp MN$ 于点 H，则根据三垂线定理 H 就是点 E 在平面 $ABCD$ 上投影.)

解. 如图8.52取 AD 中点 M，连接 EM，在平面 ACD 内作 $MN \perp AC$ 交 AC 于点 N，再过作 $EH \perp MN$ 于点 H，下面证明 H 就是 E 在平面 ACD 内的投影：

连接 EN，则 $EN \perp AC$，因为 $AC//FM$，$MN \perp FM$，所以 $EN \perp FM$，$MN \perp FM$，进一步得到 $FM \perp$ 平面 EMN，所以 $FM \perp EH$.

又因为 $EH \perp MN$，所以 $EH \perp$ 平面 ACD，即 H 是 E 在平面 ACD 内的投影. 事实上四面体 $EMHF$ 是一个鳖臑.

下面计算 $\angle EFH$，根据三余弦公式可知 $\cos\angle EFH = \dfrac{\cos\angle EFM}{\cos\angle HFM}$.

不妨设菱形的边长是 2，设 $EM = x(0 < x < \sqrt{3})$，在直角三角形 EFM 中 $\cos\angle EFM = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

在三角形 EMN 中，MH 满足 $x^2 - MH^2 = (\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\dfrac{\sqrt{3}}{2} - MH)^2$，解这个关于 MH 的一次方程得 $MH = \dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.

在直角三角形 FMH 中，$\cos\angle HFM = \dfrac{1}{HF} = \dfrac{1}{\sqrt{1+MH^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{3}}}$.

所以 $\cos\angle EFH = \sqrt{\dfrac{3+x^4}{3+3x^2}}$，当 $\cos\angle EFH$ 取最小值时，$\tan\angle EFH$ 取最大值.

这是一个关于 x^2 的二次比一次的分式函数：

$$\cos\angle EFH = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2+1+\frac{4}{x^2+1}-2)} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

当且仅当 $x^2+1=2$ 即 $x=1$ 时取得等号，此时

$\tan\angle EFH = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\angle EFH}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ♡

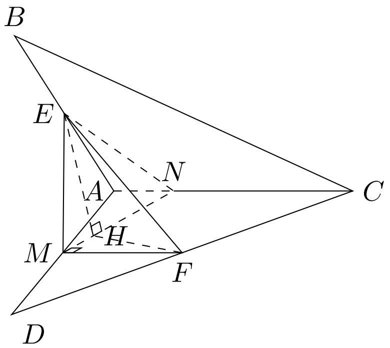


图 8.52:

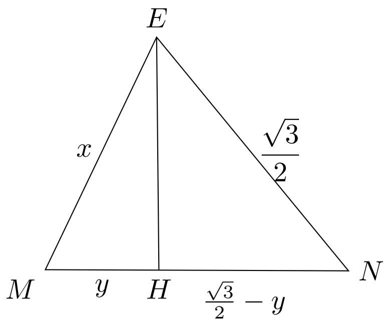


图 8.53: 平面 EMN

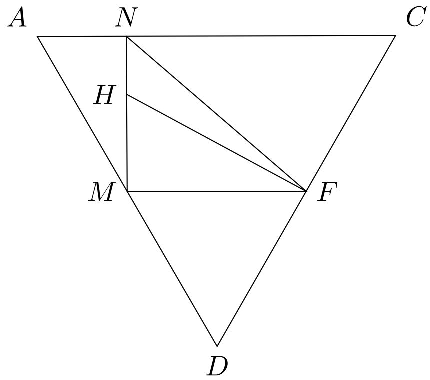


图 8.54: 平面 ACD

定理 8.2.12 (最大角定理). *设平面 α 与平面 β 相交但不垂直，则平面 α 内的任意一条直线 l 与平面 β 所成的角，一定不大于 α 和 β 所成的锐二面角. 即“二面角是最大的线面角”.*

证明. 如图8.55所示 P 是平面 α 内任意一点，$PP' \perp \beta$，O 为 α 和 β 交线上一点且 PO 与交线垂直，设直线 l 与交线交于点 S，显然 $\angle POP'$ 就是锐二面角 $\alpha - OS - \beta$ 的平面角.

则 $\sin\angle PSP' = \dfrac{PP'}{PS}$，$\sin\angle POP' = \dfrac{PP'}{PO}$.

因为 $PO \perp SO$，所以 $PS \geq PO$，所以 $\sin\angle PSP' \leq \sin\angle POP'$，所以 $\angle PSP' \leq \angle POP'$，当且仅当 S 与 O 重合时取到等号，即二面角是最大的线面角. □

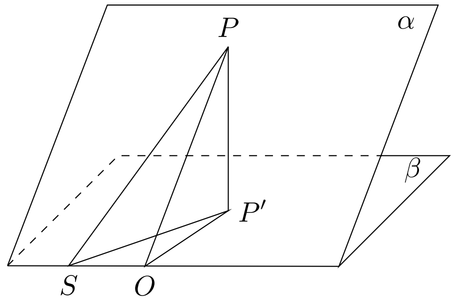


图 8.55: 最大角定理

习题 8.2

1. 在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内部有一个小球, 该小球与正方体的对角线段 AC_1 相切, 则小球半径的最大值 =______.

2. 在半径为 R 的球内作内接圆柱，则内接圆柱全面积的最大值是______.

3. 在圆锥内部放有一个球, 它与圆锥的底面和侧面都相切, 则球的表面积与圆锥表面积之比的最大值为______.

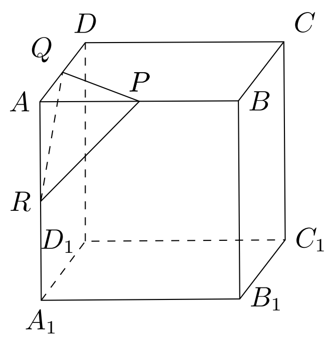
4. 已知棱长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内部有一圆柱，此圆柱恰好以直线 AC_1 为轴，则该圆柱体积的最大值为______.

5. 半径分别为 6, 6, 6, 7 的四个球两两外切. 它们都内切于一个大球, 则大球的半径是______.

6. 已知长方体的表面积为 $\dfrac{45}{2}$，所有棱长的总和为 24，则长方体的体对角线与棱所成的角的最大值为______.

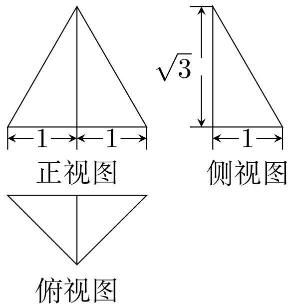
7. 在棱长为 1 的正方体 C 内，作一个内切大球 O_1，再作一个小球 O_2，使它与球 O_1 外切，且与正方体的三个面相切，则球 O_2 的表面积为______.

8. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P, Q, R 分别是棱 AB, AD, AA_1 的中点，以 $\triangle PQR$ 为底面作一个直三棱柱，使其另一个底面的三个顶点也都在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上，则这个直三棱柱的体积为______.

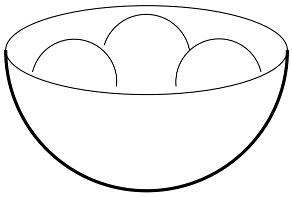


9. 已知 $\triangle PAD$ 所在平面与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AP = PD = AB = 2, \angle APD = 60^\circ$，若点 P, A, B, C, D 都在同一个球面上，则此球的表面积为______.

10. 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是一个正三角形，则这个几何体的表面积、体积、外接球半径分别为______.

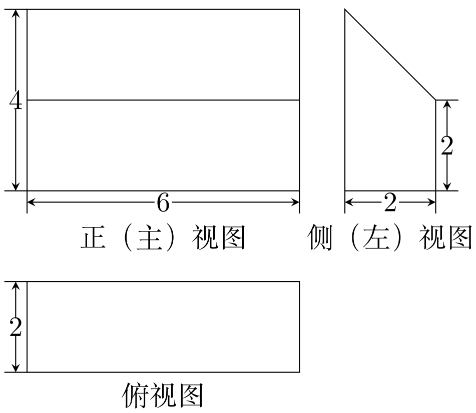


11. 如右图所示, 三个半径为 r 的汤圆 (球体) 装入半径为 $6cm$ 的半球面碗中, 三个汤圆的顶端恰与碗口共面, 则汤圆半径 $r =$______cm.

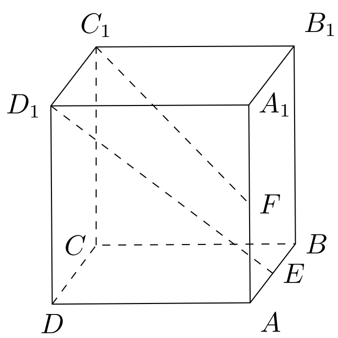


12. 过三棱柱任意两个定点的直线共 15 条，其中异面直线有______对.

13. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为______.



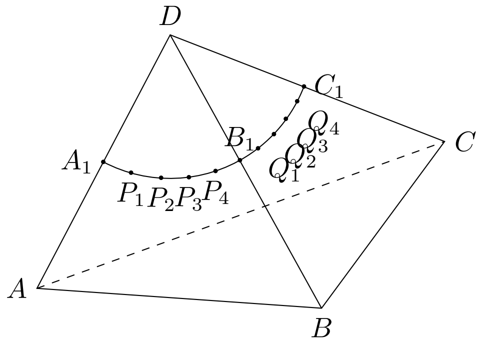
14. 如图，已知点 E、F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB、AA_1 的中点，点 M、N 分别是线段 D_1E 与 C_1F 上的点. 则满足与平面 $ABCD$ 平行的直线 MN 有______ 条.



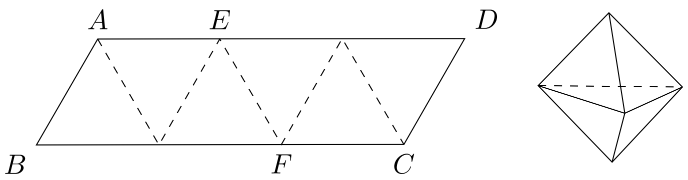
15. 如图，在正三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$AB=2$，$A_1A=2\sqrt{3}$，D，F 分别是棱 AB ，A_1A 的中点，E 为棱 AC 上的动点，则 $\triangle DEF$ 周长的最小值为______.

16. 已知正三棱锥 $D-ABC$ 的底面边长为 1，侧棱长为 2. 过点 A 作截面与侧棱 BD、CD 分别交于点 E、F. 当 $\triangle AEF$ 的周长最小时，$\triangle AEF$ 的面积为______.

17. 如图，正四面体 $ABCD$ 的各棱长皆为 2，A_1、B_1、C_1 分别是棱 DA、DB、DC 的中点，以 D 为圆心，1 为半径，分别在面 DAB、DBC 内作弧 $\overset{\frown}{A_1B_1}$、$\overset{\frown}{B_1C_1}$，并将两弧各分成五等分，分点顺次为 A_1、P_1、P_2、P_3、P_4、B_1 以及 B_1、Q_1、Q_2、Q_3、Q_4、C_1，一只甲虫欲从点 P_1 出发，沿四面体表面爬行至点 Q_4，则其爬行的最短距离为______.



18. 下面左图的平行四边形 $ABCD$ 是由 6 个正三角形构成的, 将它沿虚线折起来, 可以得到右图所示粽子形状的六面体. 在这个六面体中,AB 与 CD 的夹角的余弦值是______.



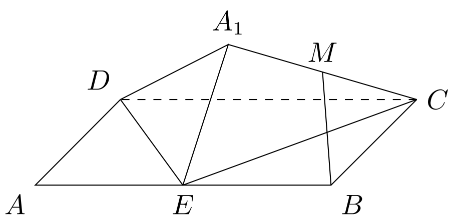
19. 如图矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，E 为边 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$，若 M 为线段 A_1C 的中点，则 $\triangle ADE$ 在翻折过程中，下列命题正确的是______.（写出所有正确命题的编号）

(1) 线段 BM 的长是定值；

(2) 存在某个位置，使 $DE\perp A_1C$；

(3) 点 M 的运动轨迹是一个圆；

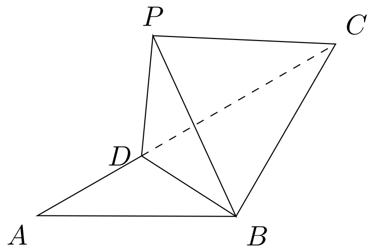
(4) 存在某个位置，使 $MB\perp$ 平面 A_1DE.



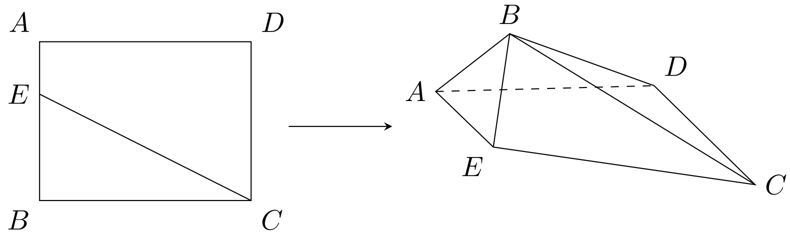
20. 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，现将图形沿线段 EC,ED 折起，使得线段 EA,EB 重合，这样得到一个四面体 $CDEA$（点 B 已重合于点 A)，则此四面体的体积是______.

21. 在 $\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，$B=30^\circ$，$AC=1$，M 为 AB 的中点. 将 $\triangle ACM$ 沿 CM 折起，使 A,B 两点间的距离为 $\sqrt{2}$. 则点 A 到平面 BCM 的距离为______.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=BC=2$. 在 AC 边上取一点 D（不含 A、C)，将 $\triangle ABD$ 沿线段 BD 折起，得到 $\triangle PBD$. 当平面 PBD 垂直平面 ABC 时，则 P 到平面 ABC 距离的最大值为______.

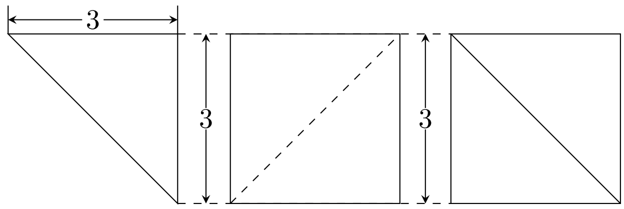


23. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3,AD=4,E$ 为 AB 上一点，$AE=1$, 现将 $\triangle BCE$ 沿 CE 折起，使得点 B 在平面 $AECD$ 上的投影落在 AD 上，则四棱锥 $B-AECD$ 的体积为______.



24. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, 沿 BD 折成直二面角 $A-BD-C$, 且 $4AB^2+2BD^2=1$. 则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为______.

25. 从一个正方体中截去部分几何体，得到一个以原正方体的部分顶点为顶点的凸多面体，其三视图如图, 则该几何体的体积为______.



26. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 在棱 BC 上，点 Q 为棱 CC_1 的中点，若过点 A,P,Q 的平面截该正方体所得的截面为五边形，则 BP 的取值范围为______.

27. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，α 为过直线 BD_1 的平面，则 α 截该正方体的截面面积的取值范围是______.

28. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 2，底面边长为 1，上底面正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 P，过下底边 BC 作平面 $BCD\perp AP$，与棱 AA_1 交于点 D. 则截面 $\triangle BCD$ 的面积为______.

29. 已知正三棱锥 $S-ABC$，底面是边长为 1 的正三角形，侧棱长为 2. 若过直线 AB 的截面，将正三棱锥的体积分成两个相等的部分，则截面与底面所成二面角的平面角的余弦值为______.

30. 过正四面体 $ABCD$ 的顶点 A 作一个形状为等腰三角形的截面，且使截面与底面 BCD 所成的角为 75°. 这样的截面共可作出______ 个.

31. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 侧棱长为 4，$\angle ASB=30^\circ$，过点 A 作截面与侧棱 SB、SC、SD 分别交于 E、F、G，则截面 $AEFG$ 周长的最小值是______.

32. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底棱长为 1，高为 $\sqrt{2}$，内切球的半径为 r，则以内切球的球心为球心，$2r$ 为半径的球截底面三角形 ABC 所得图形的面积是______.

8.3 空间中角与距离的计算

我们先回顾一下空间中各种与角和距离相关的概念，以及计算这些几何量的基本方法.

【一】求距离

1° **点面距**：平面外一点到平面的距离就是该点与平面之间的垂线段长度. 要计算点到直线的距离，只需找到该点在平面内的投影，则该点与其投影之间的线段长度就是点到直线的距离.

除此之外还可以采用等积法，在棱锥的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$ 中，棱锥的高 h 就是棱锥顶点到底面的距离，因此我们有时可以将点到直线的距离理解为棱锥的某一底面上的高，计算出棱锥的体积 V 和该底面的面积 S，从而按照公式 $h=\dfrac{3V}{S}$ 计算点到平面的距离.

2° **线面距**：线面距的概念建立在线面平行的基础上. 一条直线与一个平面平行时，这条直线上任意一点到这个平面的距离叫做 **这条直线到这个平面的距离**. 事实上，若直线 l 平行于平面 α，则直线 l 上各点到平面 α 的距离都相等 (即都等于 l 到 α 的距离).

根据线面距的定义可知，计算线面距都要先转化为点面距，再按照计算点面距的方法进行计算.

3° **面面距**：面面距的概念建立在面面平行的基础上. 如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任意一点到另一个平面的距离都相等，我们把它叫做**两个平行平面之间的距离**. 棱柱和棱台体积公式中的高 h 就是上下底面之间的距离.

计算面面距也要先转化为点面距，再按照计算点面距的方法进行计算.

4° **异面直线的距离**：和两条异面直线都相交垂直的直线叫做两条**异面直线的公垂线**，公垂线与两条异面直线的交点所形成的线段，叫做这两条**异面直线的公垂线段**. 公垂线段的长度叫做两条**异面直线的距离**.

异面直线的距离 (公垂线段长) 是分别连结两条异面直线上两点的线段长度的最小值.

如图8.56所示，线段 AB 的长就是异面直线 a 和 b 之间的距离，我们通常会将异面直线的距离转化为线面距或面面距来计算：

a.(转化为线面距) 过直线 b 作直线 a 的平行平面 β，异面直线 a 和 b 的距离就等于直线 a 到平面 β 的距离.

b.(转化为面面距) 过直线 b 作直线 a 的平行平面 β，再过直线 A 作 β 的平行平面 α，这样我们过异面直线 a 和 b 作出了两个互相平行的平面 α 和 β，α 和 β 之间的距离就是异面直线的距离.

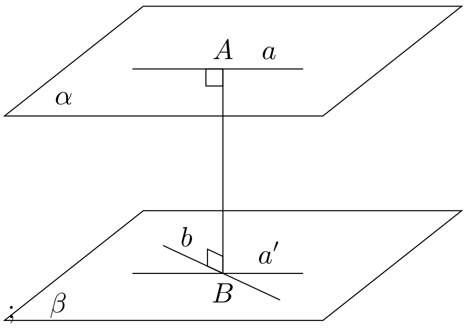


图 8.56: 异面直线的距离

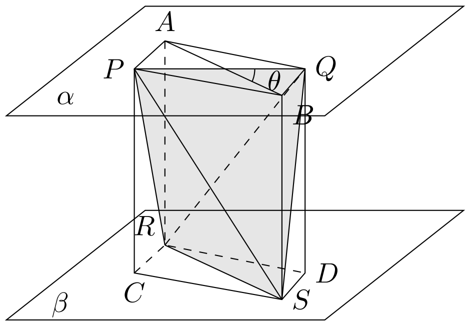


图 8.57: 空间四边形的体积

如图8.57所示，直线 PQ 和直线 RS 异面，设异面直线的距离为 d. 我们以线段 PQ 和线段 RS 为一组对棱构造一个空间四边形 (四面体)$PQRS$. 根据前面的讨论，我们可以作出两个平行平面 α 和 β，并构造出一个平行六面体 $APBQ-RCSD$，此时 d 就是平行六面体的高. 因为底面平行四边形的面积为 $|AB||PQ|\sin\theta$，所以平行六面体的体积为 $|AB||PQ|d\sin\theta$，又因为四面体的体积是对应外接平行六面体的 $\dfrac{1}{6}$，所以我们得到了这样一个体积公式：

$$V=\frac{1}{6}|PQ||RS|d\sin\theta.$$

其中 PQ 和 RS 是四面体的一组对棱，θ 为异面直线 PQ 和 RS 所成的角，d 为异面直线 PQ 和 RS 的距离. 从这个公式中我们可以看出，只要知道了任意四面体的一组对棱的长度、距离和它们所称的角，就能计算出四面体的体积.

【二】求空间角

1° **求异面直线所成的角**：过空间中一点分别作两条异面直线的平行线，则两条平行线的夹角就是异面直线所成的角.

2° **求线面角**：作出斜线在平面内的投影，则斜线和其投影所称的角就是直线与平面所成的角.

3° **求二面角**：作二面角的平面角，分为以下流程：

(1) 转化：$A-BC-D$ 转化为 $A'-BC-D$，并使 $A'D\perp BC$ （D 为 A' 在平面 BCD 内的投影）. (2) 作 $A'H\perp BC$ 于 H，连接 DH. (3) 由三垂线定理及二面角平面角的定义，$\angle DHA'$ 就是二面角 $A-BC-D$ 的平面角.

【三】求体积

1° **直接用体积公式计算**：棱柱的体积公式为 $V = Sh$，棱锥的体积公式为 $V = \frac{1}{3}Sh$，因此只需计算底面积 S 和距离 h 即可.

2° **换顶点**：对于三棱锥，其四个面都可以理解为底面，我们可以选择方便得到底面积和高的那组顶点和底面来计算体积.

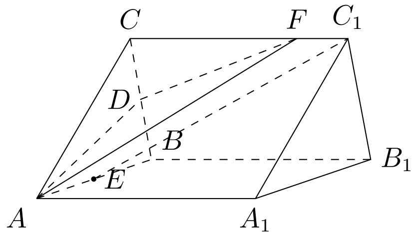
3° **等体积变换**：棱锥的体积公式是由底面积 S 和高 h 决定的，有时可以利用线面平行和面面平行的性质 (距离处处相等) 来变换棱锥的高，从而将棱锥的高转移到易于求解的位置.

另外还可以灵活使用分割等技巧来求解几何体的体积.

例 8.16. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D, E 分别是棱 BC 和 AB 的中点，点 F 在棱 CC_1 上，且 $AB = AC$，$AA_1 = 3$，$BC = CF = 2$.

(1) 证明：$C_1E//$ 平面 ADF；

(2) 若 $AB = 2$，求三棱锥 $A_1 - DEF$ 的体积.



(1)(分析：在平面 ADF 内找到与 CE_1 平行的直线即可.)

证明. 连接 CE 交 AD 于点 P，连接 PF.

因为 D, E 分别是棱 BC 和 AB 的中点，所以 P 是三角形 ABC 的重心，即 $\frac{CP}{CE} = \frac{2}{3}$.

因为在 $\triangle CC_1E$ 中，有 $\frac{CP}{CE} = \frac{CF}{CC_1} = \frac{2}{3}$，

所以 $PF//EC_1$，又因为 $EC_1 \not\subseteq$ 平面 ADF，

所以 $C_1E//$ 平面 ADF. □

(2)(分析：$A_1 - DEF$ 的体积不易直接计算，观察图形特点，作 $FH//AC$ 交 AA_1 于点 H，容易看出 $FH//$ 平面 A_1DE，所以三棱锥 $A_1 - DEF$ 的体积等于三棱锥 $D - A_1EH$ 的体积，三棱锥 $D - A_1EH$ 的底面是“平放”的，底面积和高都很容易计算，比直接计算 $A_1 - DEF$ 的底面积和高友好多了.)

解. 作 $FH//AC$ 交 AA_1 于点 H.

因为 D, E 分别是 CB 和 BA 的中点，所以 $DE//AC$，所以 $FH//DE$，

又因为 $DE \subsetneqq$ 平面 A_1DE，$FH \not\subseteq$ 平面 A_1DE，

所以 $FH//$ 平面 A_1D_E，所以 H 到平面 DEA_1 的距离等于 F 到平面 DEA_1 的距离，所以 $V_{H-A_1DE} = V_{F-A_1DE} = V_{A_1-DEF}$.

所以 $V_{A_1-DEF} = V_{H-A_1DE} = V_{D-A_1HE}$.

而 $S_{\triangle A_1HE} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

另一方面，因为 $AB = AC = BC = 2$，三角形 ABC 是等边三角形，点 D 到平面 AA_1B_1B 的距离等于 $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $V_{A_1-DEF}=V_{D-A_1HE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

即三棱锥 A_1-DEF 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. ♡

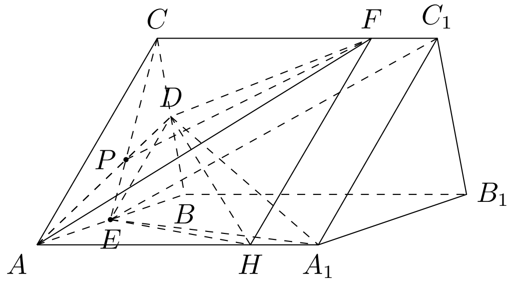


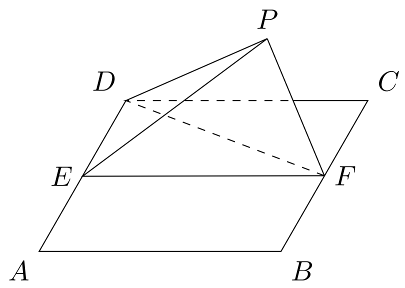
图 8.58:

评注 8.16.1. 这个问题是运用等体积转换包括换顶点这两个技巧求三棱锥体积的典型问题，通常我们会将三棱锥转化为“水平放置”的三棱锥，在这种情况下三棱锥的底面积和高都容易确定.

例 8.17. 如图，在正方形 $ABCD$ 中 E，F 分别为 AD,BC 的中点. 现以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使 C 到达点 P 的位置，且满足 $PF\perp BF$.

(I) 证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$;

(II) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



(1)(因为 $PF\perp BF$，且注意到 $BF\perp EF$ ，根据线面垂直的判定，BF 就是平面 PEF 的垂线，又因为平面 $ABFD$ 经过直线 BF，所以平面 $ABFD$ 与平面 PEF 相互垂直.)

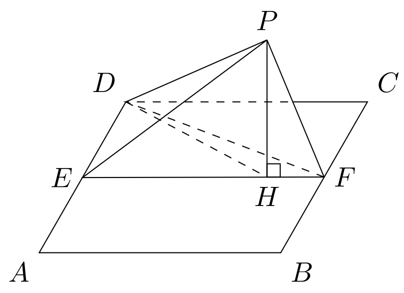


图 8.59:

证明. 因为 $EF\perp BF$，$BF\perp PF$，$PF\subsetneqq$ 平面 PEF，$EF\subsetneqq$ 平面 PEF，$PF\cap EF=F$,

所以 $BF\perp$ 平面 PEF.

又因为 $BF\subsetneqq$ 平面 $ABFD$，所以平面 $ABFD\perp$ 平面 PEF. □

(2)(要作出线面角，即找到过点 P 的平面 $ABCD$ 的垂线，注意到第一问已经证明了平面 PEF 与平面 $ABFD$ 的垂直，根据面面垂直的性质定理可知作 $PH\perp EF$ 交 EF 于点 H，则 $PH\perp$ 平面 $ABCD$.)

解. 在三角形 PEF 内作 $PH\perp EF$ 交 EF 于点 H，由 (1) 得平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$，且平面 $PEF\cap$ 平面 $ABFD=EF$.

又因为 $PH\perp EF$，$PH\subsetneqq$ 平面 PEF，

所以 $PH\perp$ 平面 $ABFD$.

连接 DH，则 $\angle PDH$ 就是直线 PD 与平面 $ABFD$ 所成的角.

不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 2 个单位长度，则 $PF=1$，$EF=2$，

因为 $DE//BF$，而 $BF\perp$ 平面 PEF，所以 $DE\perp$ 平面 PEF，又因为 $PE\subsetneqq$ 平面 PEF，

所以 $DE\perp PE$，

所以 $\triangle DEP$ 是直角三角形，所以 $PE=\sqrt{3}$，

所以在直角三角形 PEF 中，$PH=\dfrac{PE\cdot}{EF}=\dfrac{\sqrt{3}\times 1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

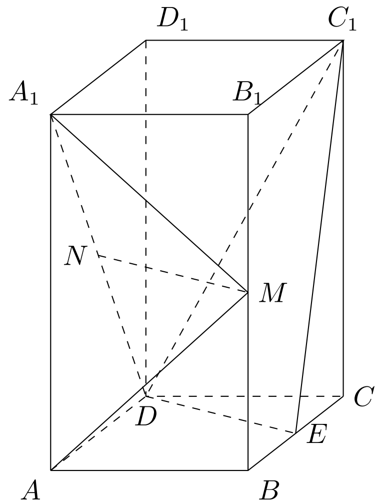
所以 $\sin\angle PDH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ♡

评注 8.17.1. 作出点 P 在平面 $ABFD$ 内的投影，关键是利用面面平行的性质得到 $PH\perp$ 平面 $ABFD$.

例 8.18. 如图所示，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点.

(1) 证明：$MN//$ 平面 C_1DE；

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



(1)(分析：只需证明 $MN//DE$，可构造平行四边形来证明.)

证明. 取 AD 的中点 G，连接 NG,BG，因为 N 是 A_1D 的中点，所以在三角形 A_1DA 中 $NG\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}\dfrac{1}{2}A_1A$.

又因为 $A_1A\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}B_1B$，$M$ 是 B_1B 的中点，

所以 $NG\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}MB$，所以四边形 $NGBM$ 是平行四边形，

所以 $NM//BG$.

又因为 $GD=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=BE$，且 $GD//BE$，

所以四边形 $GDEB$ 是平行四边形，所以 $DE//BG$，

所以 $NM//DE$，又因为 $NM \not\subseteq$ 平面 C_1DE，$DE \subsetneqq$ 平面 C_1DE，

所以 $MN//$ 平面 C_1DE. □

评注 8.18.1. 本题也可以证明 $MNDE$ 是平行四边形，进而直接得到 $NM//DE$.

(2)(分析：注意到 $A_1M \perp AM$，考虑在平面 A_1MN 中过点 M 作 A_1M 的垂线交 A_1D 于点 H，根据定义 $\angle HMA$ 就是二面角的平面角.$\triangle HMA$ 的三条边中 AM 和 AH 容易计算，因此只要再计算出 HM 即可解出 $\angle HMA$.)

解. 因为 $DE \perp AD$，平面 $ADD_1A_1 \perp$ 平面 ADE，$DE \subsetneqq$ 平面 ADE，所以 $DE \perp$ 平面 A_1ADD_1.

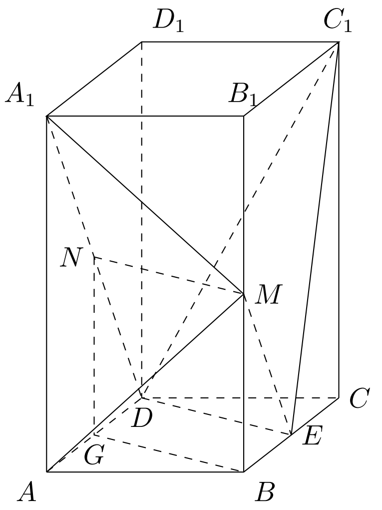


图 8.60:

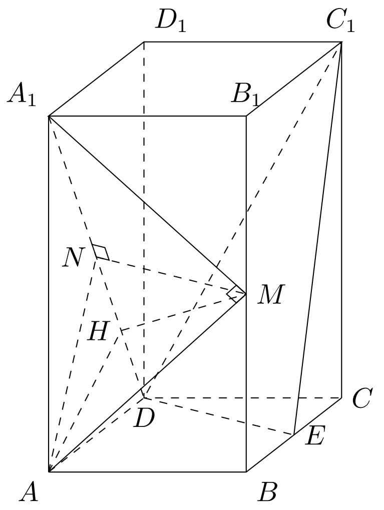


图 8.61:

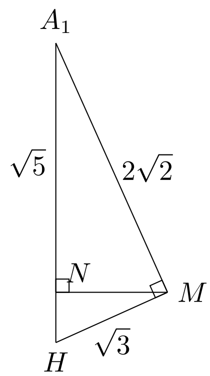


图 8.62:

又因为 $A_1N \subsetneqq$ 平面 A_1ADD_1，所以 $DE \perp A_1N$，

又因为 $MN//DE$，所以 $MN \perp A_1N$.

(也可以计算 $A_1N = \sqrt{5}, A_1M = 2\sqrt{2}, MN = \sqrt{3}$，从而 $A_1N^2 + MN^2 = A_1M^2$，得到 $\angle A_1NM = 90°$.)

在平面 A_1DM 中过点 M 作 $MH \perp A_1M$ 交 A_1D 于点 H，在直角三角形 A_1HM 中 $MN \perp A_1N$，所以

$HM = \dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{30}}{5}$，$A_1H = \dfrac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

又因为在三角形 A_1AH 中 $\cos\angle AA_1H = \dfrac{AA_1}{DA_1} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以

$$AH = \sqrt{AA_1^2 + A_1H^2 - 2AA_1 \cdot A_1H \cos\angle AA_1H} = \sqrt{16 + \frac{64}{5} - 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times 4} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

在三角形 AHM 中 $\cos\angle HMA = \dfrac{AH^2 + MN^2 - AM^2}{2AH \cdot HM} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 $\sin\angle HMA = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ♡

例 8.19. (1) 四面体 $ABCD$ 六条棱的长度分别为 $6,6,6,6,6,9$，求四面体 $ABCD$ 的外接球半径.
(2) 四面体 $ABCD$ 六条棱的长度分别为 $3,3,3,3,4,5$，求四面体 $ABCD$ 的外接球半径.

事实上，我们有如下事实：

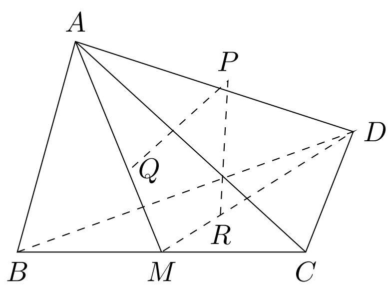
定理 8.3.1. 球心与任意截面的圆心的连线垂直于截面.

证明显然. 根据这一事实我们知道，过两个截面圆圆心分别作两个截面的垂线，其交点就是球心. 特别地，对于多面体的外接圆而言，多面体任意一个表面多边形的外接圆都是其外接球的一个截面，此时截面圆的圆心就是多边形的外心. 在确定外接球球心位置时，只需选取多面体的某两个表面(通常选择外心位置容易确定的)，分别过其外心作该平面的垂线，两条垂线的交点就是多面体外接球的球心.

这种确定外接球球心的方式通常称为**垂线交点法**.

下面我们来解例题8.19.

(1) 解. 显然四面体 $ABCD$ 有两个等边三角形面，如图所示，不妨设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 是等边三角形面，取 BC 的中点 M，在平面 ABC 和平面 DBC 中，Q,R 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 的外心，分别过 Q,R 作平面 ABC 和平面 DBC 的垂线 PQ,PR，则 P 就是外接球球心. 显然 P 在平面 AMD 内，如图所示：



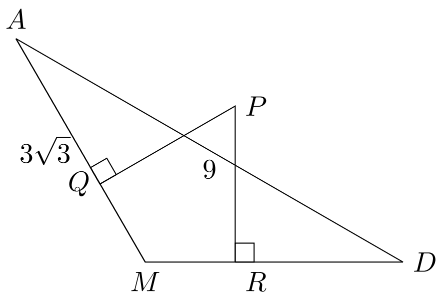


图 8.63:

因为 Q,R 分别是外心，所以 $MQ=\dfrac{1}{3}AM=\sqrt{3}$，$MR=\dfrac{1}{3}MD=\sqrt{3}$，因为 $\angle AMD=120^\circ$，所以 $MP=2\sqrt{3}$，所以 $PR=3$，所以外接圆半径 $R=PD=\sqrt{RD^2+PR^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$.
♡

(2) 解. 注意到这个四面体有一个等边三角形面和一个直角三角形面，考虑用垂线交点法确定外心位置，如图所示，$BD=DC=DB=3$，$AB=4,AC=5$，N,M 分别是 BC 和 AC 的中点，P 是等边三角形 BCD 的外心. 注意到 $DA=DB=3$，取 AB 的中点 E，则 $ME\perp AB$，$DE\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 DME，所以 $DM\perp AB$，同理可得 $DM\perp BC$，所以 DM 是平面 ABC 的垂线，根据垂线交点法，过 P 点作 $PO\perp DN$ 交 DM 于点 O，则 O 就是外接球球心.

在直角三角形 DMN 中，$DN=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$MN=\dfrac{1}{2}AB=2$，所以 $DP=\dfrac{2}{3}DN=\sqrt{3}$，$DM=\sqrt{DN^2-MN^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，$\cos\angle MDN=\dfrac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}=\dfrac{\sqrt{33}}{9}$.

所以 $R=OD=\dfrac{DP}{\cos\angle MDN}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{33}}{9}}=\dfrac{9\sqrt{11}}{11}$. ♡

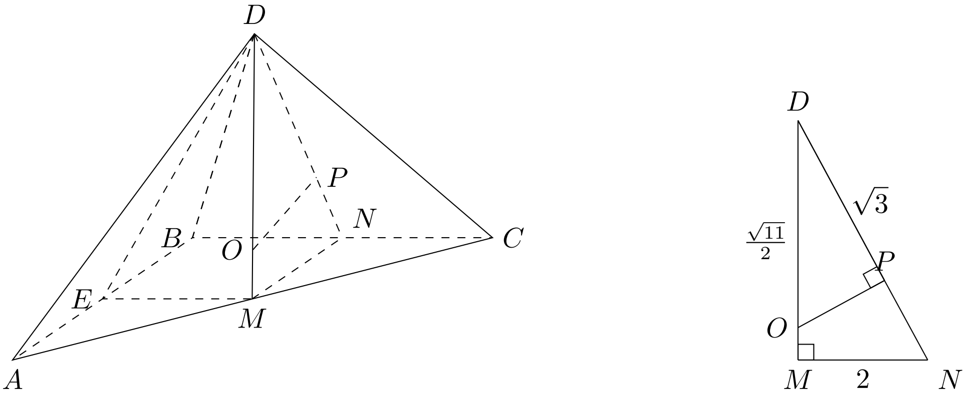


图 8.64:

习题 8.3

1. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 中点，F 为 CC_1 中点，异面直线 EF 与 AC_1 所成角的余弦值是______.

2. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是一个顶角为 60° 的菱形，每个侧面与底面的夹角都是 60°，棱锥内有一点 M 到底面及各侧面的距离皆为 1，则棱锥的体积为______.

3. 正八面体的边长是 1，则其两个平行表面之间的距离是______.

4. 正四棱锥的底面边长是 2017, 侧棱长为 2000, 则侧棱与底面所成的角与______$(30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ)$ 的差的绝对值最小.

5. 在空间直角坐标系中，已知 $O(0,0,0)$ ，$A(1,0,0)$ ，$B(0,1,0)$ ，$C(0,0,1)$ ，则到面 OAB 、面 OBC、面 OAC、面 ABC 的距离相等的点的个数是______.

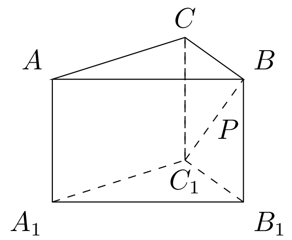
6. 若边长为 6 的正 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离分别为 $1,2,3$，则 $\triangle ABC$ 的重心 G 到平面 α 的距离为______.

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设顶点 A 关于平面 C_1BD 和直线 B_1D 的对称点分别为 P,Q，则直线 PQ 与平面 A_1BD 所成角的正弦值为______.

8. 设 P 为立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 AB 上的动点，则平面 PDB_1 与平面 ADD_1A_1 所成二面角的最小值为______.

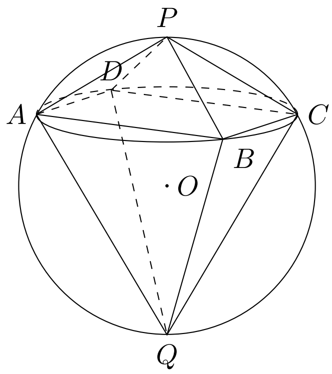
9. 单位正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的侧面 $AA'B'B$ 内有一点 M 到两直线 $AB, B'C'$ 的距离相等. 那么点 M 的轨迹上的点到点 C' 的距离的最小值为______.

10. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^\circ, BC=CC_1=2, AC=4\sqrt{2}$，$P$ 是 BC_1 上一点，则 $CP+PA_1$ 的最小值为______.



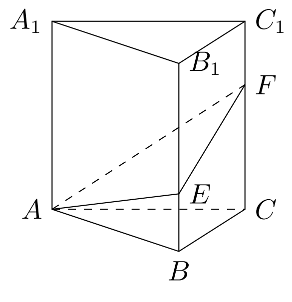
11. 过半径为 5 的球面上一点作 3 条两两互相垂直的弦 PA, PB 和 PC，使得 $PA = 2PB$，则 $PA + PB + PC$ 的最大值为______.

12. 如图，球 O 的内接八面体 $PABCDQ$ 中，顶点 P, Q 分别在平面 $ABCD$ 两侧，且四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥. 设二面角 $P-AB-Q$ 的平面角的大小为 θ，则 $\tan\theta$ 的取值范围是______.



13. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在空间坐标系 $O-xyz$ 中运动，其中顶点 A 保持在 z 轴上，顶点 B_1 保持在平面 xOy 上，则 OC 长度的最小值是______.

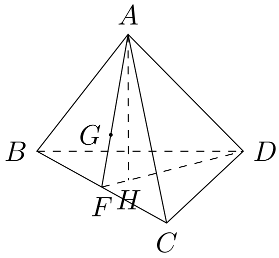
14. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D, E 分别是侧棱 BB_1, CC_1 上的点，$EC = BC = 2BD$，则截面 ADE 与底面 ABC 所成的二面角的大小是______.



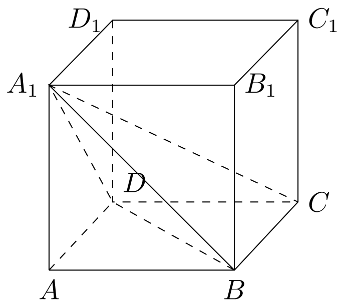
15. 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 $50°$，P 为空间内一定点，则过点 P 且与 a, b 所成角都是 $52°$ 的直线有且仅有______ 条.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，在对角线 A_1D 上取点 M，在 CD_1 上取点 N，使得线段 MN 平行于对角面 A_1ACC_1，则 $|MN|$ 的最小值为______.

17. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，面 ABC 与面 BCD 所成的二面角为 $60°$，顶点 A 在面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 上的垂心 H，$\triangle ABC$ 的重心是 G，若 $AH = 4$，$AB = AC$，则 $GH =$______.



18. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $B - A_1C - D$ 的大小为______.



19. 已知 $\alpha - l - \beta$ 是大小为 $45°$ 的二面角，C 为二面角内一定点，且到半平面 α 和 β 的距离分别为 $\sqrt{2}cm$ 和 $6cm$，A, B 分别是 α, β 所在平面内的动点，则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为______.

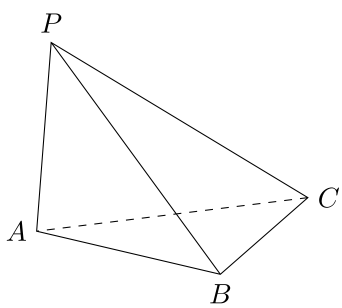
20. 在正三棱锥 $S - ABCD$ 中，已知二面角 $A - SB - D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则异面直线 SA 与 BC 所成的角为______.

21. 已知正三角形 $\triangle ABC$ 在平面 α 内的射影是边长为 $2, 3, 2\sqrt{3}$ 的三角形，则正三角形 $\triangle ABC$ 的边长是______.

22. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD = 1$，$AB = 2$，$AA_1 = 3$，点 P 为平面 A_1BD 内的一点，则 AP 长度的最小值为______.

23. 已知长方体的三条面对角线的长度分别为 $6, 4, x$，则 x 的取值范围是______.

24. 如图，在三棱锥 $P - ABC$ 中，$PA \perp$ 平面 ABC，$\angle ABC = 120°$，$PA = 4$. 若三棱锥 $P - ABC$ 外接球的半径为 $2\sqrt{2}$，则直线 PC 与平面 ABC 所成角的正切值为______.



25. 已知正三棱锥侧面与底面所成二面角的余弦值为 $\dfrac{1}{6}$，则此三棱锥的高 h 与其内切球半径 r 之比是______.

26. 若半径 $R = 2 + \sqrt{6}cm$ 的空心球内部装有四个半径为 r 的实心球，则 r 所能取得的最大值为______cm.

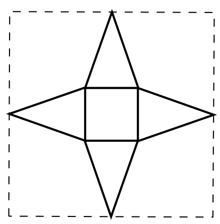
27. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA = PB = PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E、F 分别是 AC、BC 的中点，$\angle EPF = 60°$，则球 O 的表面积为______.

28. P 是正四棱锥 $V-ABCD$ 的高 VH 的中点，若点 P 到侧面的距离为 3，到底面的距离为 5，则该正四棱锥的体积为______.

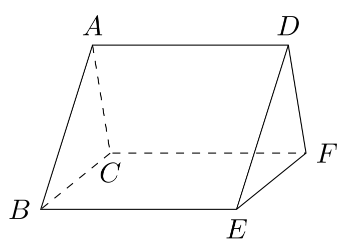
29. 空间有四个点 A、B、C、D，满足 $AB = BC = CD$. 若 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 36°$，那么直线 AC 与直线 BD 所成角的大小是______.

30. 已知正四棱锥 Γ 的高为 3，侧面与底面所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$. 先在 Γ 内放入一个内切球 O_1，然后依次放入球 O_2，O_3，O_4，$\cdots$，使得放入的各球均与前一个球及 Γ 的四个侧面均相切，则放入所有球的体积之和为______.

31. 边长为 2 的正方形，经如图所示的方式裁剪后，可以围成一个正四棱锥，则此正四棱锥的体积最大值为______.



32. 在如图所示的多面体 $ABCDEF$ 中，已知 AD、BE、CF 都与平面 ABC 垂直. 设 $AD = a$，$BE = b$，$CF = c$，$AB = AC = BC = 1$. 求四面体 $ABCE$ 与 $BDEF$ 公共部分的体积（用 a、b、c 表示）.



33. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，四个侧面均为等边三角形，设该四棱锥的侧面与底面所成的二面角的大小为 θ，则 $\tan\theta$=______.

34. 已知 $\triangle ABC$ 等腰直角三角形，其中 $\angle C$ 为直角，$AC = BC = 1$，过点 B 作平面 ABC 的垂线 DB，使得 $DB = 1$，在 DA、DC 上分别取点 E、F，则 $\triangle BEF$ 周长的最小值为______.

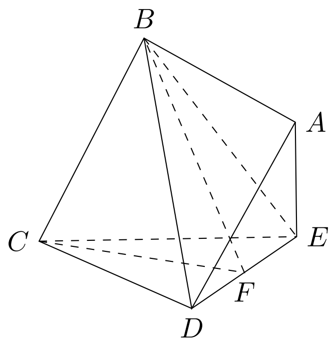
35. 现有一个能容纳 10 个半径为 1 的小球的封闭的正四面体容器，则该容器棱长最小值为______.

36. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AA_1=1$，$AD=2$，则异面直线 A_1D 与 B_1D_1 间的距离为______.

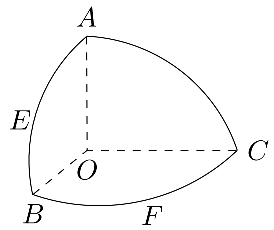
37. 在立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M、N 分别在线段 AB、BB_1 上（不包括线段的端点），并且 $AM=B_1N$，则 A_1M 与 C_1N 所成角的取值范围是______.

38. 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 2 的正方形，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $SD=AB$，则四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球的表面积为______.

39. 如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AE\perp$ 平面 CDE，已知 $AE=DE=3$，F 为线段 DE 上的一点，二面角 $E-BC-F$ 与二面角 $F-BC-D$ 的大小相等，则 DF 的长为______.



40. 如图，O 是半径为 1 的球的球心，点 A、B、C 在球面上，OA、OB、OC 两两垂直，E、F 分别是圆弧 AB、AC 的中点，则点 E、F 在该球面上的球面距离是______.



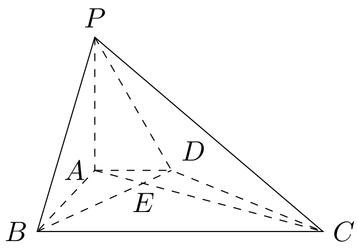
41. 已知点 P 是棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $ABCD$ 内的任意一点，它到四个面的距离分别是 d_1、d_2、d_3、d_4，则 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ 的最小值为______.

42. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面的边长为 6, 侧棱长为 $\sqrt{21}$, 则该三棱锥的内切球的半径为______.

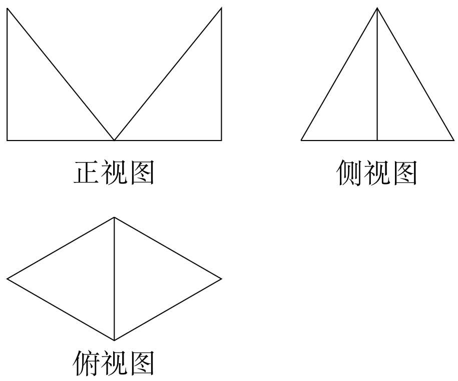
43. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是正三角形，该正三棱锥的外接球球心为 O 满足:$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，则二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为______.

44. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=AC$，$SB=SC$，则直线 SA 与 BC 所成角的大小为______.

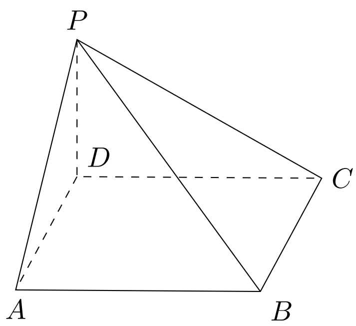
45. 如图，在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=3$，$AD=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=6$. 则二面角 $P-BD-A$ 的大小为______.



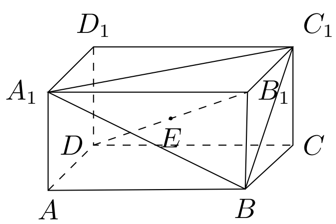
46. 某几何体的三视图如图所示，其侧视图是一个边长为 1 的等边三角形，俯视图是两个正三角形拼成的菱形，则这个几何体的体积为______.



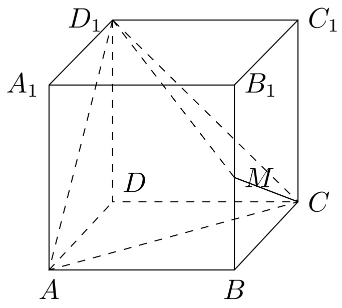
47. 如图所示棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，边长为 a，$PD=a$，$PA=PC=\sqrt{2}a$，这个四棱锥中放入一个球，则球的最大半径为______.



48. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 B_1D 与平面 A_1BC_1 交于 E 点. 记四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 V_1，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V_2，则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是______.



49. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 BB_1 的中点，则二面角 $M-CD_1-A$ 的余弦值为______.



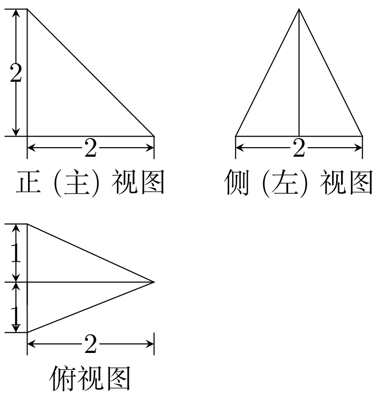
50. 半径为 R 的球的内部装有 4 个有相同半径 r 的小球，则小球半径 r 可能的最大值是______.

51. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 1，点 P 到底面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$. 则该三棱锥的内切球的半径为______.

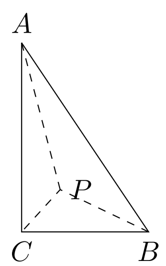
52. 圆柱的底面半径为 r，高为 h，体积为 2，表面积为 24，则 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{h}$ 的值是______.

53. 设直线 l 与球 O 有且只有一个公共点，从直线 l 出发的两个半平面 α、β 截球 O 的两个截面圆的半径分别为 1 和 $\sqrt{3}$，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $\dfrac{5\pi}{6}$，则球 O 的半径为______.

54. 下图是一个几何体的三视图，则该几何体的体积为______.



55. 如图，已知 $Rt\triangle ABC$ 的两条直角边 $AC=2$，$BC=3$，P 为斜边 AB 上一点，沿 CP 将此三角形折成直二面角 $A-CP-B$，当 $AB=\sqrt{7}$ 时，则二面角 $P-AC-B$ 的值为______.

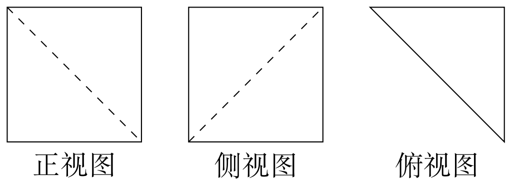


56. 半径为 6 的球，则该球内接正三棱锥的体积的最大值是______.

57. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 大小为 60°，点 P 到平面 α 的距离为 3，到平面 β 的距离为 5，若 $A\in\alpha$，$B\in\beta$，则 $\triangle PAB$ 周长的最小值是______.

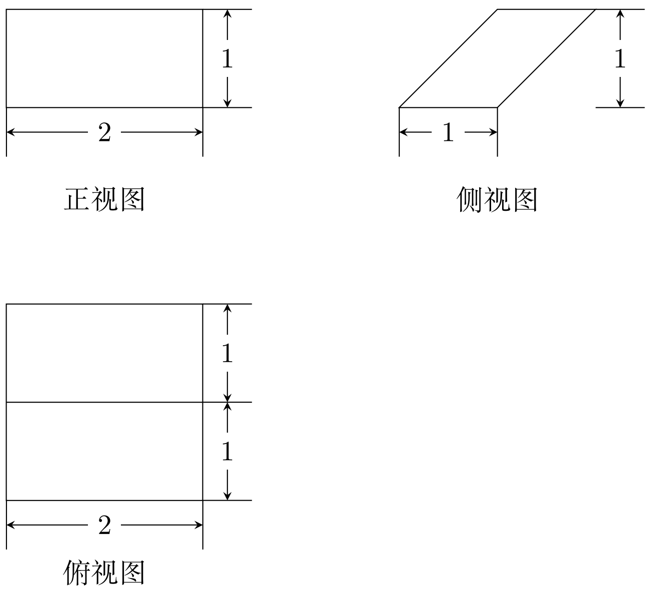
58. 圆锥的轴截面 SAB 是边长为 2 的等边三角形，O 为底面中心，M 为 SO 的中点，动点 P 在圆锥底面内（包括圆周）．若 $AM \perp MP$，则 P 点形成的轨迹的长度为______.

59. 下图为某几何体的三视图，其中正视图是正方形，俯视图是腰长为 2 的等腰直角三角形，则该几何体的体积为______.

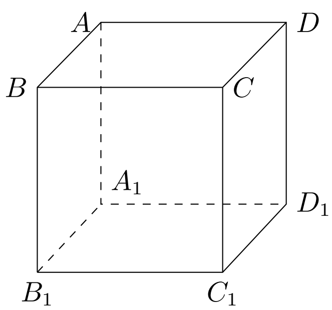


60. 桌面上放着 3 个半径为 2014 的球，两两相切，在它上方的空隙里放入一个球使其顶点（最高处）恰巧和 3 个球的顶点在同一个平面上，则该球的半径等于______.

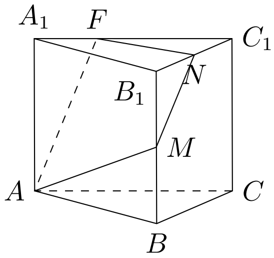
61. 若某立体的三视图如下，则该立体的体积为______.



62. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱．已知 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正切值为 a，则二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的正切值为______.



63. 在如图所示的三棱柱中，点 A、BB_1 的中点 M 以及 B_1C_1 的中点 N 所决定的平面把三棱柱割成体积不同的两部分，则较小部分的体积和原三棱柱的体积之比为______.



8.4 空间向量及其应用

8.4.1 空间向量基本定理与空间直角坐标系

类似平面向量基本定理，在三维空间中我们有空间 (三维) 向量基本定理.

定理 8.4.1 (空间向量基本定理). 如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对于任意一个三维向量 $\vec{p}$，存在唯一的三元有序实数组 (λ,μ,k)，使得 $\vec{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+k\vec{c}$，即 $\vec{p}$ 能够唯一地用 $\vec{a},\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 线性表出.

由此可知如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么所有空间向量组成的集合就是 $\{\vec{p}|\vec{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+k\vec{c},\lambda,\mu,k\in\mathbb{R}\}$，这个集合可以看成是由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 生成的，我们将 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 成为三维空间的一组**基**或**基底**，三维空间中任意三个不共面的向量都可以作为空三维空间的一组基.

特别地，如果空间中的一组基底中的三个基向量两两垂直，且都是单位向量 (模为 1)。那么这组基成为单位正交基，常用 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 表示，根据空间向量基本定理自然有：对于三维空间中一个任意的向量 $\vec{\alpha}$ 均可以唯一地写成 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 三者的线性组合，即存在唯一的三元有序实数组 (x,y,z) 使得 $\vec{\alpha}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 像这样把空间向量分解为三个两两垂直的向量称做空间向量的正交分解.

我们知道，二维直角坐标系可以由平面内一点 O 和平面的一组单位正交基 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 生成，即以 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 的方向为正方向，以它们的模为单位长度建立两条数轴：x 轴和 y 轴. 类似地，空间内选定一点 O 和一组单位正交基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 也可以生成三维的坐标系，显然三维直角坐标系需要三个坐标轴：x 轴，y 轴和 z 轴，且它们两两正交.

坐标平面指的是通过每两个坐标轴的平面，分别是 Oxy 平面，Oyz 平面，Ozx 平面，它们把空间分为八个部分 (**卦限**).

在空间直角坐标系中，让右手的拇指指向 x 轴正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果这时候中指指向的是 z 轴正方向，那么这个坐标系是**右手直角坐标系**[1]，反之是左手直角坐标系. 我们习惯使用右手系，在本书中建立的坐标系都是右手系，对于初学者而言我们可以在讨论问题的过程中渐渐熟悉右手系，并养成使用右手系的习惯.

与二维情形完全类似：三维坐标系中的任意一点 A 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 一一对应，另一方面根据空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x,y,z) 使得 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，在单位正交基下的向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序是数组 (x,y,z) 就是点 A 的**坐标**，其中分量 x 叫做点 A 的**横坐标**，分量 y 叫做点 A 的**纵坐标**，分量 z 叫做点 A 的**竖坐标**. 事实上，从几何直观上看 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的分量点 A 在三个坐标轴上的射影在各自数轴上的坐标.

[1] 右手系的定向也可以用如下法则确定，即用右手的的四指从 x 轴正向握向 y 轴正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向.

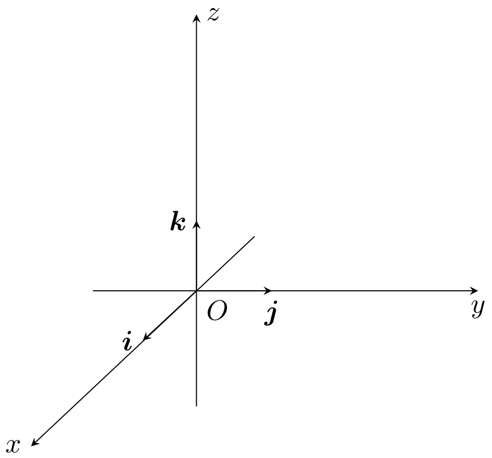


图 8.65: 三维直角坐标系

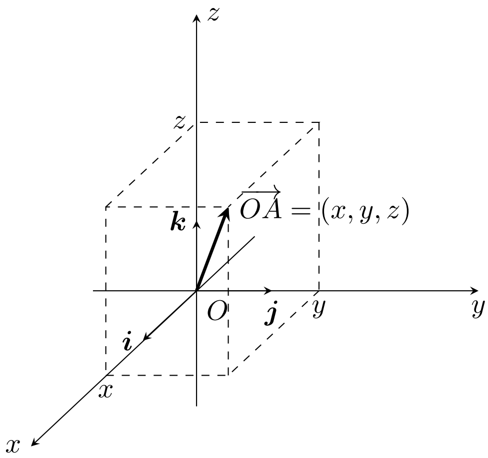


图 8.66: 三维坐标系中的点、空间向量和三元有序实数组的一一对应

我们可以统一地用三元有序实数组来表示三维向量和三维坐标系中的点，例如 $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$，这就是空间向量的坐标表示.

根据空间向量的正交分解形式，结合向量的线性运算法则和内积运算法则，我们立刻得到空间向量的坐标运算，和二维情况是完全一致的：

设 $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$，那么我们有：

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2),$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

我们还可以得到：

$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2, \lambda \in \mathbb{R}$;

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$;

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$;

$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$;

由模长公式可得空间中两点间的距离公式，设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点，则由 P_1 到 P_2 的有向线段对应的向量等于终点 P_2 的坐标减去起点 P_1 的坐标 (方向指向被减向量)，得：

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

所以

$$P_1 P_2 = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间中两点间的距离公式.

将空间向量与其坐标表示结合起来，能使得夹角、距离的计算和一些其他问题变得简单，我们将在下一节中具体介绍空间向量在解决立体几何问题中的应用.

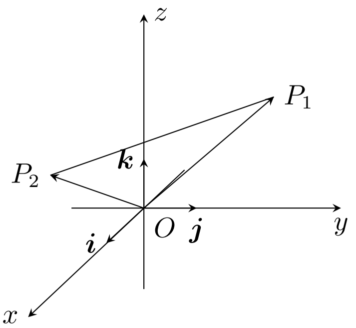


图 8.67: 两点间的距离公式

8.4.2 空间向量的应用

在这一节中我们将建立空间向量与空间中几何量之间的联系，从而用空间向量来解决立体几何问题，主要是立体几何中有关直线、平面的位置关系和度量问题.

与直线 l 平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 称为直线 l 的**方向向量**. 在空间中我们可以利用直线上一点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 和直线 l 的**方向向量** $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ 来表示直线 l. 事实上，根据向量共线的充分必要条件可知，对于直线 l 上的任意一点 $P(x, y, z)$，存在实数 t 使得 $\overrightarrow{AP} = t\boldsymbol{a}$. 写成坐标形式，可知

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc), t \in (-\infty, +\infty).$$

这个方程可以作为空间中直线的参数方程，即由这个方程组决定的 (x, y, z) 必在过 A 点且以 $\boldsymbol{a}$ 为方向向量的直线上.

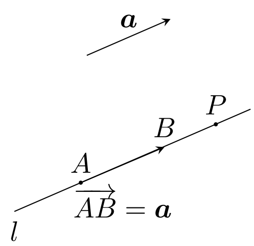


图 8.68: 直线的方向向量

根据上述讨论可知，空间中任意直线可以由直线上一点和直线的方向向量唯一确定.

给定空间中一点 A 和一条直线 l，则经过点 A 且垂直于直线 l 的平面是唯一确定的. 由此得到启发，我们可以用点 A 和直线 l 的方向向量来确定平面.

如图所示，直线 $l \perp \alpha$，取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{n}$，我们称向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)(A, B, C$ 不全为零) 为平面 α 的**法向量**. 给定一个点 A 和一个向量 $\boldsymbol{n}$，那么过点 $A(x_0, y_0, z_0)$，且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面可以表示为 $\{P| \cdot \overrightarrow{AP} = 0$，即平面上任意一点 $P(x, y, z)$ 都使得 $\overrightarrow{AP}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 正交. 用坐标表示为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

这个方程是由一个平面的法向量和平面内一个给定的已知点确定下来的，通常可以称为平面的

点法式方程. 这个方程可以进一步化成

$$Ax + By + Cz = D.$$

的形式，这里常数 x, y, z 的系数 A, B, C 依次是平面法向量的三个坐标分量.

我们知道，两条相交直线可以唯一地确定一个平面，因此已知平面内两个不共线的向量即可求出平面的法向量. 例如已知平面内的两条相交直线，其方向向量分别为 $\boldsymbol{a} = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (A_2, B_2, C_2)$，则平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ 满足：

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0. \end{cases}$$

这个方程组有无数组解，通过赋值我们可以求出该平面的其中一个法向量.

例 8.20. 用空间向量法证明三余弦公式（定理 8.2.11）.

证明. 如图8.69所示，在 OC 方向上取单位向量 $\boldsymbol{m}$，则 $\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{m} = 0$.

又因为 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$，所以

$$\overrightarrow{OA} \cdot \boldsymbol{m} - \overrightarrow{OB} \cdot \boldsymbol{m} = 0.$$

即

$$|\overrightarrow{OA}||\boldsymbol{m}| \cos\theta = |\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{m}| \cos\theta_2.$$

又因为 $\cos\theta_1 = \dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}$,

所以 $\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2$. □

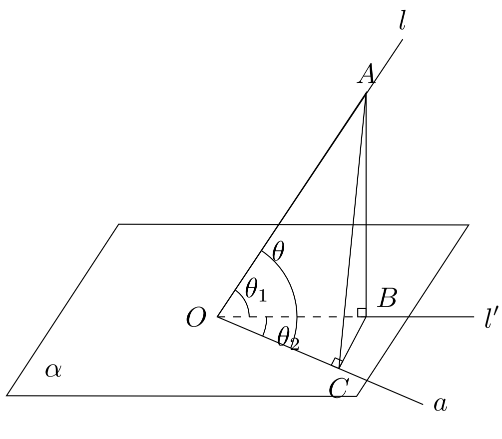


图 8.69:

一般地，设 $\boldsymbol{u_1}$ 和 $\boldsymbol{u_2}$ 分别是 l_1 和 l_2 的方向向量，那么：

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_1} // \boldsymbol{u_2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{使} \boldsymbol{u_1} = \lambda \boldsymbol{u_2}.$$

这就是线线平行的向量表示.

类似地，设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，则

$$l//\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

设 $\boldsymbol{n_1}$ 和 $\boldsymbol{n_2}$ 分别是平面 α 和平面 β 的法向量，则

$$\alpha//\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n_1}//\boldsymbol{n_2} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}使\boldsymbol{n_1}=\lambda\boldsymbol{n_2}.$$

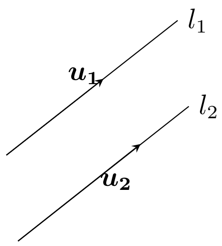


图 8.70:

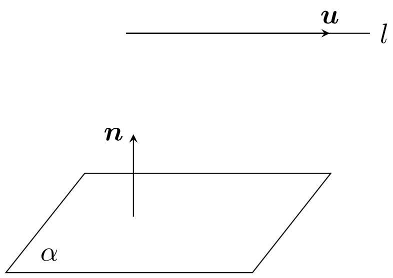


图 8.71:

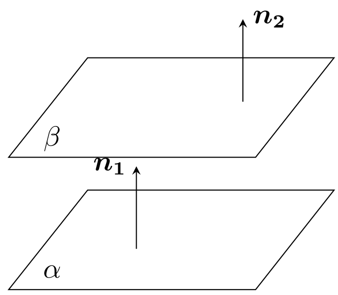


图 8.72:

一般地，直线与直线的垂直就是方向向量垂直；直线与平面垂直就是直线的方向向量垂直于平面的法向量；平面和平面的垂直，就是两平面的法向量垂直. 即：

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{u_1}\perp\boldsymbol{u_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{u_2}=0.$$

$$l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u}//\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}使\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{n}.$$

$$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{n_1}//\boldsymbol{n_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}=0.$$

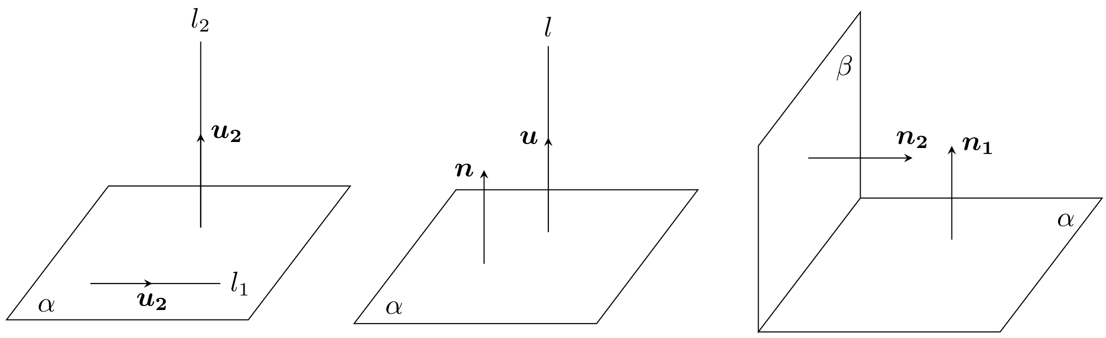


图 8.73:

下面我们用向量方法来研究距离问题. 如图8.74所示，向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ}$. 设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，则根据内积的定义：

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{|\boldsymbol{u}|^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

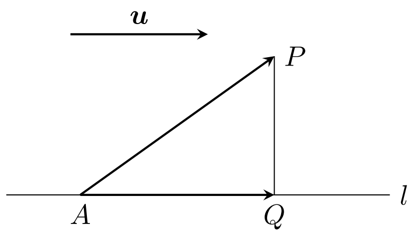


图 8.74:

在 Rt$\triangle APQ$ 中，根据勾股定理，得

$$d = PQ = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - (\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|})^2}.$$

我们再来看点面距，如图8.75所示，设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，P 是 α 外一点，A 是平面 α 内一点，那么 P 到 α 的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 向量在法向量 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度，因此

$$d = PQ = |\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}| = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

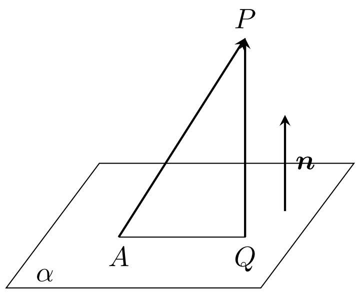


图 8.75:

除距离问题之外，向量法还可以解决空间中的夹角问题.

一般地，两条异面直线所成的角，可以转化为其方向向量之间的夹角，一般地，异面直线所成的角和方向向量之间的夹角相等或互补，另一方面，考虑到异面直线所成的角范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$，所以异面直线所成角的余弦值等于方向向量夹角的余弦值取绝对值后的结果. 也就是说，设异面直线 l_1, l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，则

$$\cos\theta = |\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

类似地，直线与平面所成的角可以转化为直线方向向量和平面法向量的夹角. 如图8.76所示，设直线的 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，设 l 与 α 所成的角为 $\theta(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$，那么 θ 与 $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle$ 或其补角互余，即

$$\sin\theta = |\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}.$$

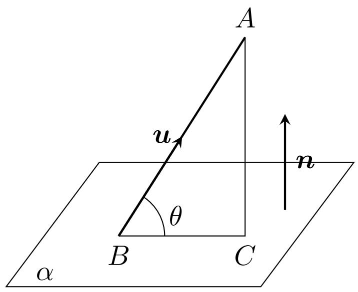


图 8.76:

如图8.77所示，平面 α 和平面 β 相交形成四个二面角，α 和 β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n_1}$ 和 $\boldsymbol{n_2}$，则平面 α 和平面 β 形成的二面角的平面角就是 $\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$ 或其补角，设一个二面角的平面角是 θ，则

$$\cos\theta = \begin{cases} |\cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}|}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}, \text{锐二面角}, \\ -|\cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle| = -\dfrac{|\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}|}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}, \text{钝二面角}. \end{cases}$$

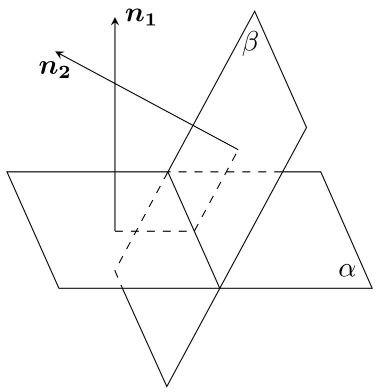


图 8.77:

但是，在有些情况下难以直接判断二面角是锐二面角还是钝二面角，这时我们可以通过考虑法向量的指向来判断 θ 和 $\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$ 之间的关系，如图所示.

可以看出，如果法向量同时穿入或穿出二面角，则 θ 是 $\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$ 的补角，此时 $\cos\theta = \cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$；如果两个法向量“一进一出”，则此时 θ 就是 $\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$，此时 $\cos\theta = -\cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \rangle$.

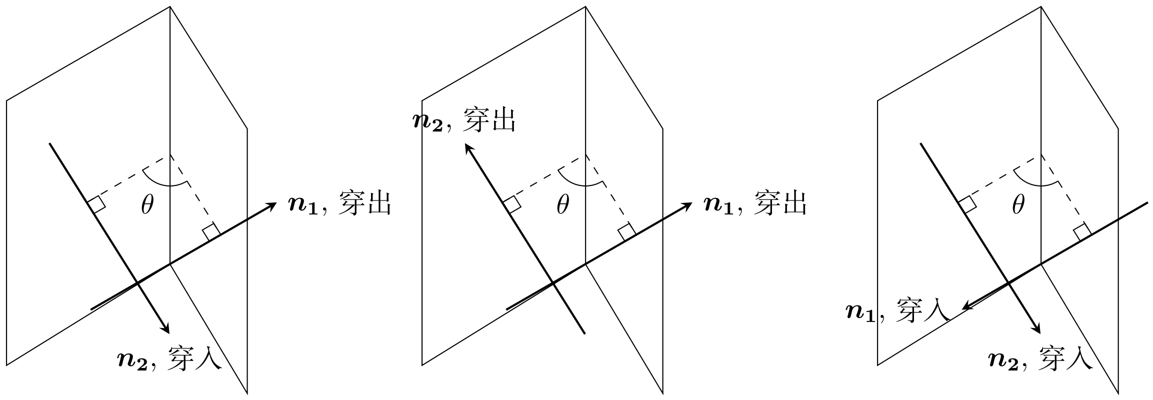
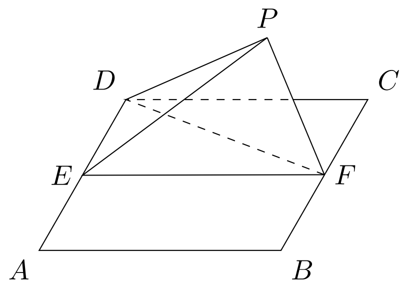


图 8.78:

例 8.21. 如图，在正方形 $ABCD$ 中 E，F 分别为 AD, BC 的中点. 现以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使 C 到达点 P 的位置，且满足 $PF \perp BF$.

(II) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.(参见例 8.17)



解. 这里我们用空间向量解答这个问题，因为 $DA \perp DC$，故以 DA, DC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，以过点 D 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

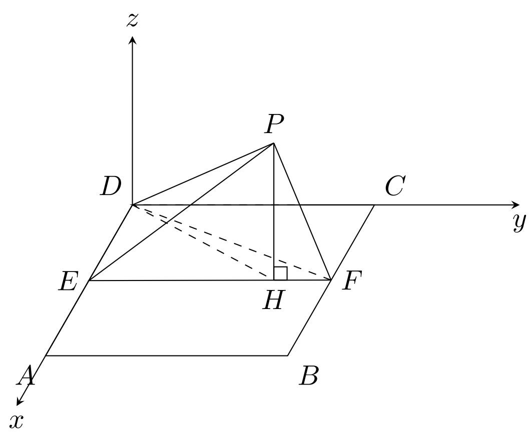


图 8.79:

由第 (I) 问的结果可知，$DE \perp PE$，又因为 $DP = 2, DE = 1$，所以 $PE = \sqrt{3}$.

又因为 $PF = 1, EF = 2$, 所以 $PE^2 + PF^2 = EF^2$, 所以 $PE \perp PF$, 所以 $PH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $EH = \dfrac{3}{2}$.

所以 $\overrightarrow{DP}=(1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

又因为平面 $ABFD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$，设直线 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角为 θ，则

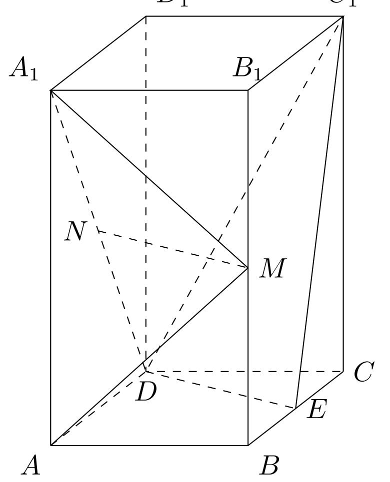
$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DP}|\cdot|\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

♡

评注 8.21.1. 一般而言，与几何法（参见例 8.17）相比，使用向量法解题的思维过程较少，而主要精力放在了计算上，因此向量法常常使很多问题变得简单，我们鼓励读者使用空间向量来解立体几何问题.

例 8.22. 如图所示，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点.

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



解. 由已知得，$DA\perp DE$，而 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，以 DA,DE,DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系：

由题意得 $A(2,0,0),A_1(2,0,4),B(1,\sqrt{3},0),B_1(1,\sqrt{3},4),M(1,\sqrt{3},2),N(1,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2),\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$.

设 $\boldsymbol{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 AA_1M 的一个法向量，则:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=4z_1=0,\\ \boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=-x_1+\sqrt{3}y_1-2z_1=0.\end{cases}$$

取 $y_1=1$，则 $x_1=\sqrt{3},z_1=0$，所以 $\boldsymbol{n_1}=(\sqrt{3},1,0)$.

设 $\boldsymbol{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 MNA_1 的一个法向量，则:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n_2}\cdot\overrightarrow{MN}=-\sqrt{3}y_2=0,\\ \boldsymbol{n_2}\cdot\overrightarrow{A_1M}=-x_2+\sqrt{3}y_2-2z_2=0.\end{cases}$$

取 $z_2=1$，则 $x_2=-2,y_2=0$，则 $\boldsymbol{n_2}=(-2,0,1)$.

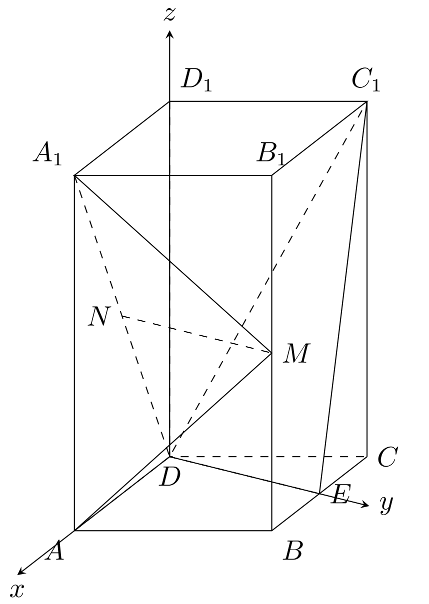


图 8.80:

观察可知二面角 $A-MA_1-N$ 是锐二面角 (或考虑到 $\boldsymbol{n_1}$ 穿出二面角，$\boldsymbol{n_2}$ 也穿出二面角，所以二面角 $A-MA_1-N$ 的平面角与 $\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}\rangle$ 互补)，设二面角 $A-MA_1-N$ 的平面角为 θ，则

$$\cos\theta = |\cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}\rangle| = |\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|}| = |\frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}| = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$(\text{或} \cos\theta = -\cos\langle \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}\rangle = -\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\boldsymbol{n_2}}{|\boldsymbol{n_1}||\boldsymbol{n_2}|} = -\frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.)$$

♡

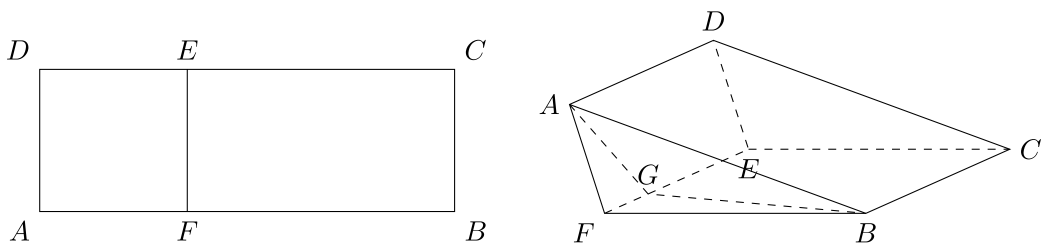
习题 8.4

1. 如图，矩形 $ABCD$ 沿平行于 AD 的线段 EF 向上翻折（E 点在线段 AB 上运动，F 点在线段 CD 上运动）得到三棱柱 $ABE-CDF$，已知 $AB=5$,$AC=\sqrt{34}$.

   (1) 若 $\triangle ABG$ 是直角三角形，这里 G 是线段 EF 上的点，试求线段 EG 的长度 x 的取值范围;

   (2) 若（1）中的 EG 长度为取值范围内的最大整数，且线段 AB 的长度取得最小值，求二面角 $C-EF-D$ 的值;

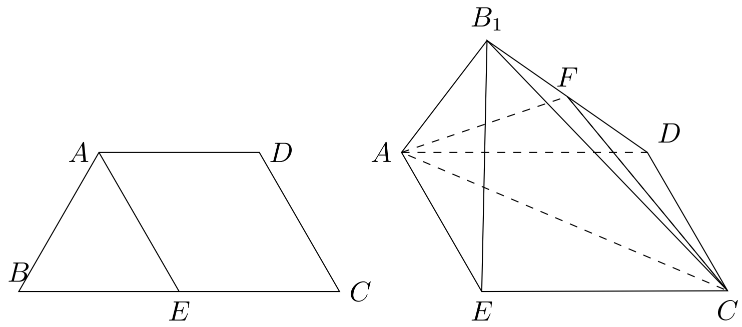
   (2) 在（1）与（2）的条件都满足的情况下，求三棱锥的 $A-BFG$ 体积.



2. 已知四边形 $ABCD$ 满足 $AD//BC$, $BA=AD=DC=\dfrac{1}{2}BC=a$, E 是 BC 的中点, 将 $\triangle BAE$ 沿着 AE 翻折成 $\triangle B_1AE$, 使面 $B_1AE\perp$ 面 $AECD$, F 为 B_1D 的中点.

(1) 求四棱锥 B_1-AECD 的体积;

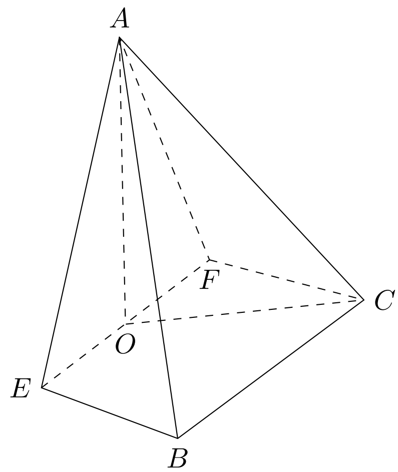
(2) 求平面 ADB_1 与平面 ECB_1 所成角的正弦值.



3. 如图, 将边长为 4 的等边三角形 ABC 沿与边 BC 平行的直线 EF 折起, 使得平面 $AEF\perp$ 平面 $BCFE$, O 为 EF 的中点.

(1) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值;

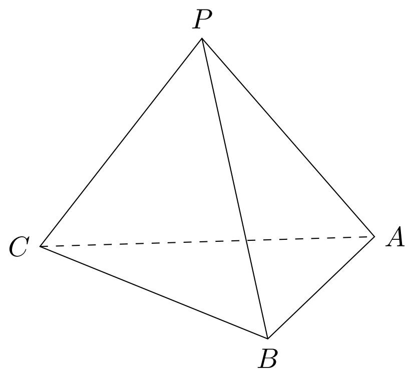
(2) 若 $BE\perp$ 平面 AOC, 试求折痕 EF 的长.

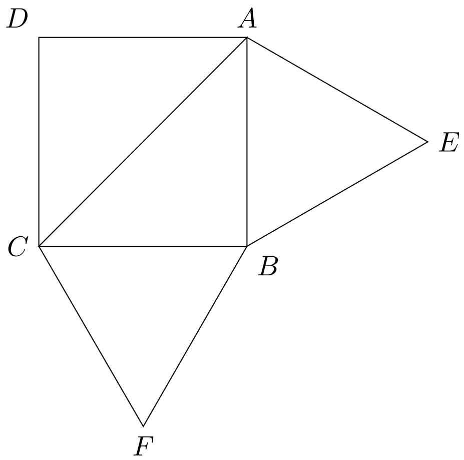


4. 已知三棱锥 $P-ABC$（如图 1）的平面展开图（如图 2）中, 四边形 $ABCD$ 为边长等于 $2\sqrt{2}$ 的正方形, $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形, 在三棱锥 $P-ABC$ 中:

(1) 证明: 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC;

(2) 若点 M 为棱 PA 上一点且 $\dfrac{PM}{MA}=\dfrac{1}{2}$, 求二面角 $P-BC-M$ 的余弦值.



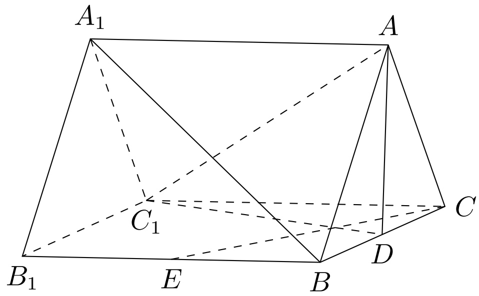


5. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=5$，D,E 分别为 BC,BB_1 的中点，四边形 B_1BCC_1 是边长为 6 的正方形.

(1) 求证：$A_1B//$ 平面 AC_1D;

(2) 求证：$CE\perp$ 平面 AC_1D;

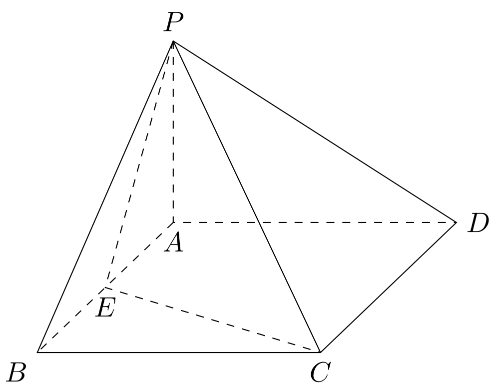
(2) 求二面角 $C-AC_1-D$ 的余弦值.



6. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，E 为 AB 的中点，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，PC 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

(1) 在棱 PD 上求一点 F，使得 $AF//$ 平面 PEC；

(2) 求二面角 $D-PE-A$ 的余弦值.

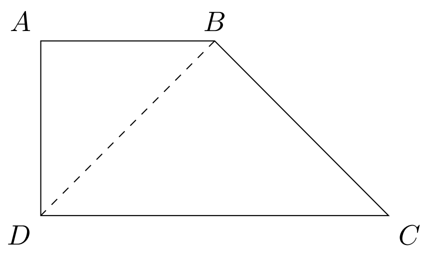


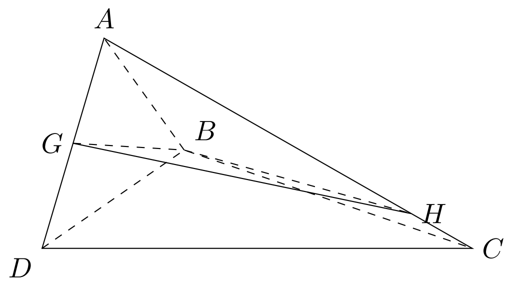
7. 如图 1，直角梯形 $ABCD$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}DC=1$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起来，使平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，如图 2，设 G 为 AD 的中点，$AH=2HC$ ，BD 的中点为 O.

(1) 求证：$AO\perp$ 平面 BCD；

(2) 求平面 GHB 与平面 BCD 所成锐二面角的余弦值；

(3) 在线段 BC 上是否存在点 E，使得 $DE//$ 平面 GBH，若存在确定点 E 的位置，若不存在，说明理由.



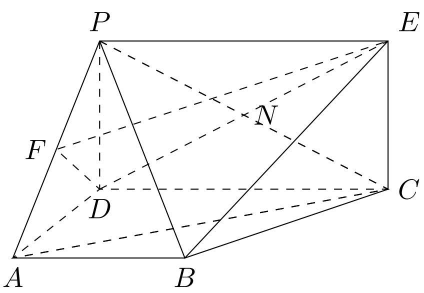


8. 如图，PD 垂直于梯形 $ABCD$ 所在的平面，$\angle ADC=\angle BAD=90^\circ$，$F$ 为 PA 中点，$PD=\sqrt{2}$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}CD=1$，四边形 $PDCE$ 为矩形，线段 PC 交 DE 于点 N.

(1) 求证：$AC//$ 平面 DEF；

(2) 求二面角 $A-BC-P$ 的大小；

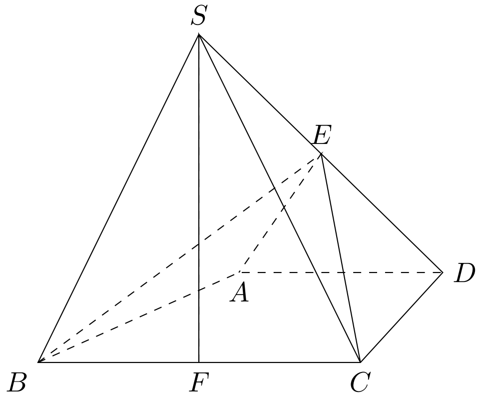
(2) 在线段 EF 上是否存在一点 Q，使得 BQ 与平面 BCP 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$？若存在，请求出 FQ 的长；若不存在，请说明理由.



9. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，$AD//BC$，$BC\perp CD$，$\angle SDA=\angle SDC=60^\circ$，$AD=DC=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}SD$，$E$ 在棱 SD 上，F 为 BC 的中点.

(1) 若 $SF//$ 面 AEC，求证：$CE\perp$ 平面 ABE；

(2) 在 (1) 的条件下，求 BC 与平面 CDE 所成角的余弦值.

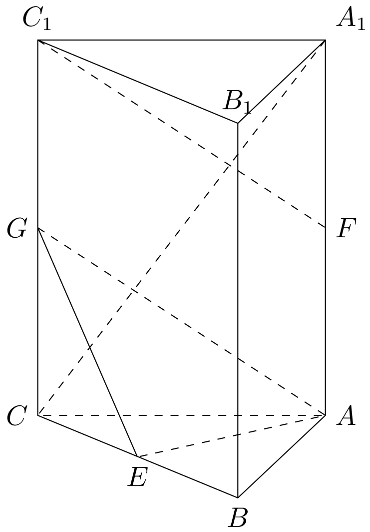


10. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$AB\perp AC$，$AC=AB=AA_1$，E、F 分别为棱 BC、AA_1 的中点，G 为棱 CC_1 上的一点，且 $C_1F//$ 平面 AEG.

(1) 求 $\dfrac{CG}{CC_1}$ 的值；

(2) 求证：$EG\perp A_1C$；

(3) 求二面角 A_1-AG-E 的余弦值.



第九章　直线与圆/解析几何 I

> Nothing takes place in the world whose meaning is not that of some maximum or minimum.
>
> ——Leonhard Euler

解析几何的基本内涵是通过坐标系，把几何点与代数中的有序数组对应起来，在此基础上建立曲线的方程，从而用代数方法解决几何上的问题. 解析几何的优势在于为解决某些几何问题提供了较为规范和固定的方法，将许多几何问题转化为与几个变量相关的计算问题.

本章将在平面直角坐标系中探索确定直线位置的几何要素，建立直线的方程，进而解决与直线有关的位置关系、距离、夹角等问题. 类似地，我们也可以建立圆的方程，再通过圆的方程研究与圆有关的问题.

9.1 直线与直线的方程

9.1.1　倾斜角与斜率

除了两点确定一条直线外，给定一个点和一个方向也可以确定一条直线. 设 A, B 为直线上两点，则 $\overrightarrow{AB}$ 是直线的方向向量，所以两点确定一条直线其实也可以归结为一个点和一个方向确定一条直线.

有了平面直角坐标系，我们还可以用其他量来刻画直线的方向. 我们注意到不同的直线相对于 x 轴的倾斜程度不同，也就是说它们与 x 轴所成的角不同. 设直线 l 与 x 轴相交，则我们称 x 轴的正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 为直线 l 的**倾斜角**，如图所示. 特别地，当直线 l 与 x 轴平行或重合时我们规定直线 l 的倾斜角为 0，所以 α 的范围是 $[0, \pi)$.

这样，我们可以用倾斜角来表示坐标系中一条直线的倾斜程度，也就表示了直线的方向.

设直线 l 的倾斜角为 α，则 $k = \tan\alpha$ 称为直线的**斜率**. 当 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时，我们说直线 l 的斜率不存在.

引入斜率后，我们可以定量地刻画直线上任意两点的坐标与直线方向两者之间相互决定的关系. 一般地，如果直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，且 $x_1 \neq x_2$，那么直线的方向向量为 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$，根据正切函数的定义，有

$$k = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

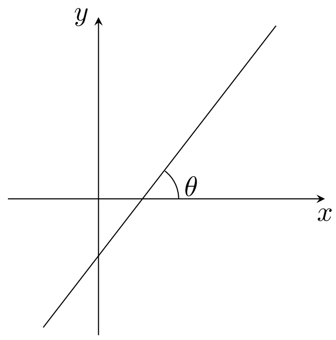


图 9.1:

当 $x_1 = x_2$ 时，直线的斜率不存在，此时直线是一条 “竖线”(与 x 轴垂直)，即倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线斜率不存在. 另一方面，倾斜角为 0 的直线斜率为 0，倾斜角为锐角的直线的斜率 $k > 0$，倾斜角为钝角的直线的斜率 $k < 0$. 结合正切函数的图像和性质可知，斜率 k 的绝对值越大，其倾斜角越接近 $\frac{\pi}{2}$，相应地，直线也越 “ 陡”.

9.1.2 直线的方程

根据上一节的讨论，给定一点和一个方向可以确定一条直线. 这样，在平面直角坐标系中给定点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k 就能唯一地确定一条直线. 下面我们将给出直线的方程，即直线上任意一点的坐标满足的关系式. 根据给定条件的不同，直线方程可有多种不同形式，常见的有：**点斜式**、**斜截式**、**两点式**、**截距式**、**点法式**和**一般式**，下面我们将逐一介绍这些形式的直线方程.

设直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 且斜率为 k，设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，则根据斜率公式：

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

即

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

又因为点 $P_0(x_0, y_0)$ 的坐标也满足上面的关系式，所以坐标满足以上关系的点一定在直线 l 上，反过来，直线 l 上任意一点的坐标一定满足以上关系式，因此以上关系式就是过点 P_0 且斜率为 k 的直线的方程.

方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 是由直线上一个定点 (x_0, y_0) 以及该直线的斜率 k 确定的，故通常称之为直线的**点斜式方程**.

特别地，如果倾斜角为 0，则此时 $k = 0$，点斜式方程的形式变为 $y - y_0 = 0$ 即 $y = y_0$.

如果倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，此时直线的斜率不存在，不能用点斜式来表示. 事实上，此时直线上每一点的横坐标都等于 x_0，直线的方程为 $x = x_0(y \in \mathbb{R})$. 所以，点斜式不能表示 “竖线”.

我们还可以将直线的方程写成如下形式：

$$x - x_0 = t(y - y_0).$$

其中 t 的定义为 $t=\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\cot\alpha(\alpha\neq 0)$. 当 $\alpha=0$ 时 $\cot\alpha$ 无定义，因此倾斜角为 0 的直线不存在 t，也就是说以上方程可以表示 “ 竖线” 但不能表示 “横线”. 因为 $\cot\alpha$ 在 $[0,\pi)$ 是单调递减的，所以随着倾斜角逐渐变大，t 是单调递减的.

例 9.1. (1) 设斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0,b)$（纵截距为 b），求直线的方程.
(2) 设直线 m 的倾斜角 α 满足 $t=\cot\alpha$，且直线 m 过点 $P_0(a,0)$ （横截距为 a），求直线的方程.

解. (1) 这是直线点斜式的一种特殊情形，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点. 代入直线的点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0).$$

即

$$y=kx+b.$$

这样，方程 $y=kx+b$ 由直线的斜率 k 和它在 y 轴上的截距 b 决定，我们把方程 $y=kx+b$ 称为直线的**斜截式方程**，其中 k 式直线的斜率，b 是直线的纵截距. 同样，斜截式方程也不能表示 “竖线”.

(2) 这是方程 $x-x_0=t(y-y_0)$ 的特殊情况，$x-a=t(y-0)$，即

$$x=ty+a.$$

其中 a 为横截距，这个方程不能表示 “横线”.

如果直线 l 是由直线上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$(其中 $x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$) 确定的，那么此时直线 l 的方程具有什么样的形式呢?

设直线 l 上任意一点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1)$，$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

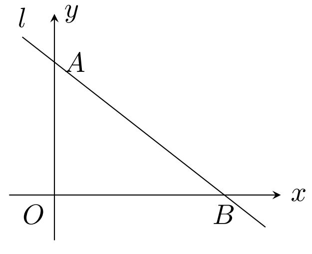
因为 $\overrightarrow{P_1P}//\overrightarrow{P_1P_2}$，根据向量平行的坐标表示：

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1).$$

这就是经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$(其中 $x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$) 的直线的方程，故称为直线的**两点式方程**.

两点式方程既可以表示竖线也可以表示横线，也可以表示竖线，读者可以自己做一做横线和竖线情形下的两点式方程. ♡

例 9.2. 如图所示，已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，其中 $a\neq 0, b\neq 0$. 求直线 l 的方程.



解. 代入两点式方程得

$$(b-0)(x-a)=(0-a)(y-0).$$

整理得 $bx+ay=ab$.

因为 $a\neq 0$, $b\neq 0$, 所以上式可以写成

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

这个方程由直线 l 在两个坐标轴上的截距 a 和 b 决定, 因此方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 叫做直线的**截距式方程**. 截距式不能表示横线, 也不能表示竖线, 因为横线和竖线在某个坐标轴上的截距不存在. 除此之外, 方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 不能表示过原点的直线. ♡

设给定一个直线 l, 其法向量 (即与直线垂直的向量) 为 $\boldsymbol{n}=(A,B)$, 其中 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$, 即 A,B 不同时为 0. 又假定已知该直线上一点 $P_0(x_0,y_0)$, 则直线上任意一点 $P(x,y)$ 都使得 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即满足:

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0.$$

用坐标表示, 也即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.(A,B\text{ 不全为 }0)$$

这个方程是由直线的法向量和直线上一个已知点的坐标决定的, 所以通常称为直线的**点法式方程**. 这个方程可以化成

$$Ax+By+C=0.(A,B\text{ 不全为 }0)$$

的形式, 其中 $C=-Ax_0-By_0$ 是一个常数, 而 x,y 的系数 A,B 分别是法向量在 x 和 y 方向上的分量.

反过来, 如果任意给出一个形如 $Ax+By+C=0$ 的线性方程, 我们很容易找到它的一个解 (x_0,y_0), 这样, $Ax+By+C=0$ 的每一个解都满足方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

因此 $Ax+By+C=0$ 是由点 (x_0,y_0) 及法向量 (A,B) 确定的直线的方程, 以上说明平面直角坐标系中的直线与二元线性方程有一一对应的关系, 所以今后就将 $Ax+By+C=0$ 称为直线的一**般式方程**.

从直线的一般式方程,我们可以直接得到直线的法向量为 (A,B),所以直线的方向向量是 $(B,-A)$. 由此, 我们知道与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线的直线系方程为:

$$Ax+By+\lambda=0,\lambda\in\mathbb{R}.$$

在上式中, 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 该方程所表示的直线都以 (A,B) 为法向量, 反过来, 所有以 (A,B) 为法向量的直线都可以用上述发成表示.

类似地, 我们还有与 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程:

$$Bx-Ay+\lambda=0,\lambda\in\mathbb{R}.$$

该方程表示的直线以 (A,B) 为方向向量，以 $(B,-A)$ 为法向量.

设直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}=(m,n)$，且已知直线 l 上一点 $P_0(x_0,y_0)$，则直线上任意一点 $P(x,y)$ 都使得 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线. 根据向量共线定理，存在唯一的实数 t 使得 $\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，用坐标表示为:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

其中，实数 t 是对应点 P 的**参数**，对于每一个确定的 t 值，根据方程组都可以确定直线 l 上一点 $P(x,y)$，而对于直线 l 上任意一点 $P(x,y)$，存在唯一的实数 t 使方程组成立，我们将上述的方程组称为直线的**参数方程**.

特别地，如果 $\boldsymbol{v}=(m,n)$ 是直线 l 的单位方向向量，那么此时参数 t 具有几何意义. 考虑直线 l 上任意一点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，所以 $|\overrightarrow{P_0P}|=|t\boldsymbol{v}|=|t|$，所以此时点 P 的参数 t 表示点 P 到点 P_0 的有向距离，当 $t>0$ 时，点 P 在 P_0 沿 $\boldsymbol{v}$ 正向的那一侧，当 $t<0$ 时，点 P 在 P_0 沿 $\boldsymbol{v}$ 反向的那一侧.

事实上，若直线的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2})$，则 $\tan\alpha=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{nt}{mt}=\dfrac{n}{m}$，所以此时直线 l 的单位方向向量 $\boldsymbol{v}=(m,n)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，此时直线的参数方程变为:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha. \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

采用直线的参数方程，并将 $\boldsymbol{v}$ 设计成单位方向向量，就可以利用参数 t 的几何意义来解决某些问题，有时可以使得问题变得比较方便.

9.1.3 直线中的位置关系

在平面内，不重合的两条直线 l_1,l_2 有两种位置关系：平行和相交. 我们如何在平面解析几何的意义下刻画两条直线的位置关系呢?

设直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，直线 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，则直线 l_1 和 l_2 平行的必要条件是两者的法向量相互平行，由向量共线的坐标表示可知 $A_1B_2=A_2B_1$. 又因为 l_1 和 l_2 不重合，所以 $B_1C_2\neq B_2C_1$ 或 $A_1C_2\neq A_2C_1$，即:

$$l_1//l_2\Leftrightarrow A_1B_2=A_2B_1 \text{且} A_1C_2\neq A_2C_1(B_1C_2\neq B_2C_1).$$

特别地，l_1 和 l_2 重合，当且仅当两直线的法向量相互平行且 $A_1C_2=A_2C_1,B_1C_2=B_2C_1$，即

$$l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1, \\ A_1C_2=A_2C_1, \\ B_1C_2=B_2C_1. \end{cases}$$

例 9.3. 条件 p：$m=3$，条件 q：两直线 $l_1:mx+3y+2=0$ 和直线 $l_2:x+(m-2)y+m-1=0$ 平行，则 p 是 q 的 (　　　　　) 条件.

(A) 充分不必要　　(B) 必要不充分

(C) 充要　　(D) 既不充分也不必要

解. 若 $l_1//l_2$，则 $m(m-2)-3=0$，解得 $m=3$ 或 $m=-1$(此时验证可知两直线重合，舍去)，所以 $m=3$，必要性成立.

若 $m=3$，则 $k_1=k_2$ 且两直线不重合，充分性成立.

所以 p 是 q 的充要条件，选择 (C) 项. ♡

两直线相交，等价于其法向量不共线，即

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1.$$

特别地两直线垂直，等价于其法向量相互垂直，即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

下面我们考虑用斜率来刻画两条直线的位置关系. 如果直线 l_1 和 l_2 的斜率均存在且分别为 k_1,k_2，则 l_1 和 l_2 的法向量分别为 $(-k_1,1)$ 和 $(-k_2,1)$，于是:

$$l_1//l_2 \Rightarrow k_1=k_2; k_1=k_2 \Rightarrow l_1\text{和}l_2\text{平行或重合};$$

$$l_1\text{与}l_2\text{相交} \Leftrightarrow k_1 \neq k_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

特别地，当直线 l_1 或 l_2 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，若 $l_1 \perp l_2$，则另一条直线的倾斜角为 0，反之也成立.

当 l_1 和 l_2 相交时，设交点为 P，则点 P 既在 l_1 上，也在 l_2 上，所以点 P 的坐标既满足 l_1 的方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$，又满足直线 l_2 的方程 $A_2x+B_2y+C=0$，即点 P 的坐标是方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

的解，解这个方程组就可以得到这两条直线的交点坐标.

接下来我们讨论直线系问题.

1° 过定点 (x_0,y_0) 的直线系:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

即 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的任意线性组合为 0，表示过 (x_0,y_0) 的直线系方程，其中，对于一个特定的方程，其线性组合系数 (A,B) 就是直线的法向量.

2° 与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程:

$$Ax+By+\lambda=0, \lambda \neq C.$$

3° 与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程:

$$Bx-Ay+\lambda=0, \lambda \neq C.$$

4° 过 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点 P 的直线系方程:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

例 9.4. 已知直线: $l_1: 3x-2y+1=0$, $l_2: 5x+2y+1=0$, $l_3: 3x-5y+6=0$, 求过 l_1, l_2 的交点且与 l_3 垂直的直线方程.

解. 根据过两直线交点的直线系方程，可设直线的方程为

$$3x+2y-1+\lambda(5x+2y+1)=0.$$

其中 λ 待定，由方程可知该直线的法向量为 $(5\lambda+3, 2\lambda+2)$，因为该直线与 l_3 垂直，所以

$$3(5\lambda+3)-5(2\lambda+2)=0.$$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$，整理得直线的方程为

$$5x+3y-1=0.$$

另解 解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y-1=0, \\ 5x+2y+1=0. \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \end{cases}$ 所以交点为 $(-1,2)$.

又因为直线与 l_3 垂直，所以该直线的法向量为 $(5,3)$，故直线的点法式方程为

$$5(x+1)+3(y-2)=0.$$

整理得，直线的方程为

$$5x+3y-1=0.$$

♡

例 9.5. 已知直线 $l: (2\lambda+1)x+(4\lambda+3)y+(6\lambda+5)=0, \lambda\in\mathbb{R}$

(1) 证明: 直线 l 过定点，并求定点坐标;

(2) 当直线 l 斜率存在时，求直线 l 斜率的取值范围.

解. (1) 这是一个含参直线，整理得

$$x+3y+5+2\lambda(x+2y+3)=0.$$

要证明直线 l 过定点，即找到一个点 (x,y) 使得上式对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 恒成立，即

$$\begin{cases} x+3y+5=0, \\ x+2y+3=0. \end{cases}$$

解这个方程，得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$ 所以直线 l 过定点 $(1,-2)$.

评注 9.5.1. 解决含参曲线过定点问题的基本方法如下：设有一个含参曲线系方程为 $F(x,y,\lambda)=0$，其中 λ 为参数. 如果能设法将参数与变量分离，即 $F(x,y,\lambda)=G(x,y)+\lambda H(x,y)=0$，则方程组 $\begin{cases} G(x,y)=0, \\ H(x,y)=0. \end{cases}$ 的解就是定点坐标.

(2) 当直线的斜率存在时，$4\lambda+3\neq 0$，设斜率为 k，则 $k=-\dfrac{2\lambda+1}{4\lambda+3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{4\lambda+3}\neq-\dfrac{1}{2}$.

所以斜率 k 的范围是 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(-\dfrac{1}{2},+\infty)$. 即这个方程可以表示过定点 $(1,-2)$ 且斜率不为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线系. ♡

例 9.6. 已知点 $P(-1,1)$，$Q(2,2)$. 若直线 $l: x+my+m=0$ 与线段 PQ（包括端点）有公共点，求 m 和直线斜率 k 的取值范围.

解. 如图9.2所示，因为直线 $l: x+m(y+1)=0$ 过定点 $M(0,-1)$，结合图形可知直线的倾斜角在 MQ 和 MP 两者的倾斜角之间，因为

$$k_{MQ}=\frac{2-(-1)}{2-0}=\frac{3}{2}, k_{MP}=\frac{1-(-1)}{-1-0}=-2.$$

$$m=-t=-\cot\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}].$$

$$k=\tan\alpha\in(-\infty,-2]\cup[\frac{3}{2},+\infty).$$

♡

评注 9.6.1. 注意 $t=\cot\alpha$，所以 t 是随着倾斜角 α 的增大而单调递减的. 而 $k=\tan\alpha$，结合正切函数在 $[0,\pi)$ 上的图像可知，随着倾斜角 α 的增大，k 并不是单调变化的，初学者常常在这一点上犯错.

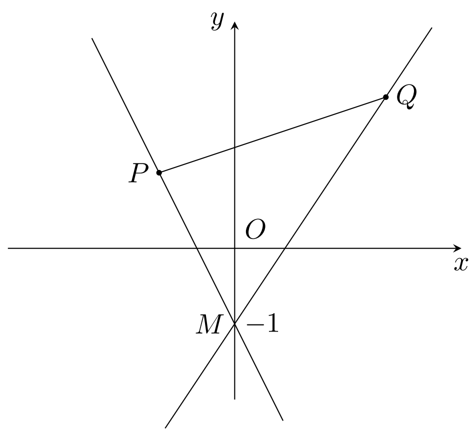


图 9.2:

例 9.7 (点关于直线的对称点). 求点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $l: Ax+By+C=0$（$Ax_0+By_0+C\neq 0$）的对称点 P' 的坐标.

解. 如图9.3所示，设 $P'(x_0',y_0')$，则点 P 和点 P' 关于直线 l 对称，等价于 $PP'\perp l$ 且 PP' 的中点在直线 l 上. 翻译成解析几何的语言：

$$\begin{cases}\overrightarrow{PP'}\cdot(B,-A)=A(y_0'-y_0)-B(x_0'-x_0)=0,\\ A\dfrac{x_0+x_0'}{2}+B\dfrac{y_0+y_0'}{2}+C=0.\end{cases}$$

x_0,y_0,A,B,C 已知，所以这是一个关于 x_0' 和 y_0' 的二元一次方程组，解这个二元一次方程组即可求出 P' 的坐标，这是解析几何意义下计算定点关于定直线的对称点的一般方法，读者应当熟练掌握. ♡

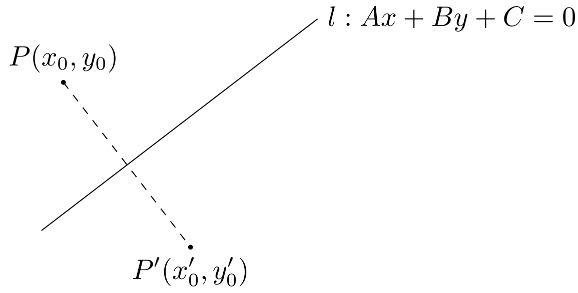


图 9.3:

除了点关于直线的对称点外，还有以下几种对称的情况，下面我们用解析几何的方法对这些情况逐一进行讨论.

1° $P(x_0,y_0)$ 关于 $A(a,b)$ 的对称点为 $P'(2a-x_0,2b-y_0)$.

2° 直线 $l:Ax+By+C=0$ 关于点 $A(a,b)$ 的对称直线 l'：

因为直线 l 上任意一点关于 A 的对称点都在 l' 上,所以直线 l' 与直线 l 平行. 设 $l':Ax+By+C'=0$，注意到点 A 在直线 $Ax+By+\dfrac{C+C'}{2}=0$ 上，所以 (a,b) 满足 $Aa+Bb+\dfrac{C+C'}{2}=0$，解得 $C'=-2(Aa+Bb)-C$，这样我们就确定了 l' 的方程.

因此直线 $l:Ax+By+C=0$ 关于点 $A(a,b)$ 的对称直线 l' 的方程为

$$l':Ax+By-2(Aa+Bb)-C=0.$$

3° 直线关于直线（两条直线不重合）的对称直线：分两种情况讨论.

(1) 两直线平行：设 $l_1:Ax+By+C=0$，$l_2:Ax+By+C_1=0$，则 l_1 关于 l_2 的对称直线为 $Ax+By+2C_1-C=0$.

(2) 两直线相交，可按以下步骤求出 l_1 关于 l_2 的对称直线 l_1' 的方程：

> ① 求交点 P; ② 找出 l_1 上不同于交点的任意一点 Q，求出 Q 关于 l_2 的对称点 Q'（步骤参考例题9.7），则 Q' 在 l_1' 上；③ 求 PQ' 的方程，根据两点确定一条直线，PQ' 就是 l_1'.

例 9.8. 已知直线 $y=ax+8$ 和直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 关于直线 $y=x$ 对称，求 $a+b$.

解. 直线 $y=ax+8$ 过点 $(0,8)$，所以 $(0,8)$ 关于 $y=x$ 的对称点 $(8,0)$ 在直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 上，代入解得 $b=4$.

直线 $y=-\frac{1}{2}x+4$ 过点 $(0,4)$，所以 $(0,4)$ 关于 $y=x$ 的对称点 $(4,0)$ 在直线 $y=ax+8$ 上，代入解得 $a=-2$.

所以 $a+b=2$. ♡

例 9.9. 已知直线 $y=k(x-4)$ 关于点 $(2,1)$ 的对称直线为 l_2，则 l_2 恒过点________.

解. 因为直线 $y=k(x-4)$ 恒过点 $(4,0)$，所以 l_2 恒过 $(4,0)$ 关于 $(2,1)$ 的对称点 $(0,2)$. ♡

9.1.4 解析几何中的距离和夹角问题

直线段的长度是各种几何量中最基本的，在解析几何中，最基本的公式就是用平面内两点的坐标表示两点间距离的公式. 已知平面直角坐标系内两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，根据 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 及模长公式得

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是**两点间的距离公式**，特别地，原点 O 与任意一点 $P(x,y)$ 之间的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

下面讨论点到直线的距离公式，如图所示，点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l 的距离就是垂线段 PA 的长度，而 PA 可以理解为 $\overrightarrow{PQ}$ 在直线法向量方向上的投影长度 (其中 $Q(x_1,y_1)$ 为直线 l 上任意一点)，于是，根据内积的定义可知:

$$\begin{aligned} d&=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}\\ &=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &\xlongequal{Ax_1+By_1+C=0}\frac{|-Ax_0-By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\ &=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \end{aligned}$$

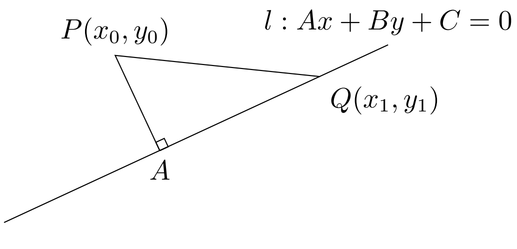


图 9.4:

因此，点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

两条平行直线之间的距离指的是夹在两条平行直线之间的共垂线段的长度. 设有两条平行直线: $l_1: Ax+By+C_1=0, l_2: Ax+By+C_2=0$, 因为平行线之间的距离处处相等, 所以在直线 l_1 上任取一个点 $P(x_0, y_0)$, 则 P 到直线 l_2 的距离就是平行直线之间的距离, 即

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因为 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上, 所以 $Ax_0+By_0+C_1=0$, 即 $Ax_0+By_0=-C_1$, 因此

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-C_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

下面我们研究相交直线的夹角问题. 设 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, 则两条直线所成的角与两条直线法向量的夹角相等或互补, 又因为两条直线所成的角的范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 所以

$$\cos\theta=|\cos\langle(A_1,B_1),(A_2,B_2)\rangle|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

设直线 l_1, l_2 的倾斜角分别为 α 和 β, 若将直线 l_1 绕两直线交点沿逆时针方向旋转, 到与 l_2 第一次重合时所转过的角为 γ, 则称 γ 为**直线 l_1 到直线 l_2 的角**, 简称 l_1 的**到角**.

因为 $\gamma=\beta-\alpha$, 所以

$$\tan\gamma=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

这个公式称为**到角公式**, 即直线 l_1 到直线 l_2 的角可以用两条直线的斜率来刻画.

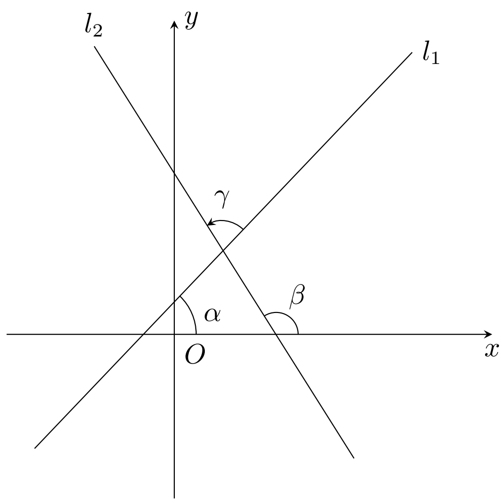


图 9.5:

例 9.10. 求直线 $l_1: 3x-y+3=0$ 关于直线 $l_2: x-y-2=0$ 的对称直线 l_3 的方程.

解. 这个问题可以转化为求点关于直线的对称的问题来求解, 但是在到角公式的看法下, l_1 和 l_3 关于 l_2 对称, 等价于 l_1 到 l_2 的角与 l_2 到 l_3 的角相等, 即

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{k_3-k_2}{1+k_2k_3}.$$

因为 $k_1=3$，$k_2=1$，代入得

$$\frac{1-3}{1+3}=\frac{k_3-1}{1+k_3}.$$

解得 $k_3=\frac{1}{3}$.

又因为 l_3 经过 l_1 和 l_2 的交点，解方程组

$$\begin{cases}3x-y+3=0,\\ x-y-2=0.\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{2},\\ y=-\frac{9}{2},\end{cases}$ ，由直线的点斜式方程可知

$$l_3: y+\frac{9}{2}=\frac{1}{3}(x+\frac{5}{2}).$$

整理得

$$l_3: x-3y-11=0.$$

♡

评注 9.10.1. 用到角公式的观点理解对称直线问题比直接求解要简便一些.

例 9.11. 求函数 $y=\frac{|2t-3|}{\sqrt{t^2+1}}$ 的最大值和最大值点.

解. 根据点到直线的距离公式，可将目标函数理解为点 $A(2,-3)$ 到直线 $tx+y=0$ 的距离.

$0=tx+y$ 是过定点 $B(0,0)$ 的直线系方程.

因为点到直线的距离就是点到直线上的点的距离的最小值，所以距离 $d\le|AB|$，当且仅当直线 $0=tx+y$ 与 AB 垂直时取得等号. 所以 $d_{\max}=|AB|=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}$.

直线的法向量为 $\boldsymbol{n}=(t,1)$，因为直线与 AB 垂直，所以 $\overrightarrow{AB}//\boldsymbol{n}$, 这等价于

$$2=-3t.$$

所以 $t=-\frac{2}{3}$. 这就是最大值点.

另解　换元. 因为 $t\in\mathbb{R}$，所以设 $t=\tan\alpha,\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{\cos\alpha}>0$.

$$\begin{aligned}y&=\frac{\cos\alpha|2\tan\alpha-3|}{1}\\&=|2\sin\alpha-3\cos\alpha|\\&=\sqrt{13}|\sin(\alpha-\varphi)|,\text{其中 }\varphi\text{ 是锐角且 }\tan\varphi=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

当 $\alpha-\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 即 $\alpha-\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 时, y 取得最大值 $\sqrt{13}$. 此时, $t=\tan\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\varphi=-\frac{2}{3}$.

♡

例 9.12. 求函数 $y=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-12x+40}$ 的最小值.

解. $y=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-6)^2+4}=\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(0-2)^2}$.

设 $P(x,0)$，$A(1,1)$，$B(6,2)$，则 y 可以理解为 $|PA|+|PB|$ 的最小值.

P 是 x 轴上任意一点，且 A,B 为于 x 轴的同侧，设 A,B 关于 x 轴的对称点分别为 A',B'，则

$$|PA|+|PB|\geq|A'B|=|AB'|.$$

因为 $A'(1,-1)$，所以 $(|PA|+|PB|)_{\min}=|A'B|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$. ♡

评注 9.12.1. 对于 $\forall P\in l$，定点 $A,B\notin l$，$|PA|+|PB|$ 存在最小值：

(1) 如果 A,B 在直线 l 的异侧，则 $|PA|+|PB|\geq|AB|$，当且仅当 P,A,B 三点共线即 P 在 AB 上时，取得最小值.

(2) 如果 A,B 在直线 l 的同侧，设 A,B 关于直线 l 的对称点分别为 A',B'，则 $|PA|+|PB|\geq|A'B|=|AB'|$，当且仅当 P,A',B （或 P,A,B'）三点共线时，取得最小值.

习题 9.1

1. 已知点 P 在直线 $x+2y-1=0$ 上，点 Q 在直线 $x+2y+3=0$ 上，PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，且 $y_0>x_0+2$，则 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 的取值范围为______.

2. 已知直线 l_1：$ax+2y+6=0$，l_2：$x+(a-1)y+a^2-1=0$，若 $l_1\perp l_2$，则 a=______.

3. 设直线系 $M:x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\leq\theta\leq2\pi)$，对于下列四个命题：

   (1) M 中所有直线均经过一个定点；

   (2) 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上；

   (3) 对于任意整数 $n(n\geq3)$，存在正 n 边形，其所有边均在 M 中的直线上；

   (4) M 中的直线所能围成的三角形面积都相等.

   其中真命题的代号是______（写出所有真命题的代号）.

4. 直线 m 的方程为 $y=kx+1$，A、B 为直线 m 上的两点，其横坐标恰为关于 x 的一元二次方程 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$ 的两个不同的负实数根. 直线 l 过点 $P(-2,0)$ 和线段 AB 的中点，CD 是 y 轴上的一条动线段，考虑一切可能的直线 l，当 l 和线段 CD 无公共点时，CD 长的最大值是否存在？若存在，求出最大值；若不存在，说明理由.

5. 曲线 $(x+2y+a)(x^2-y^2)=0$ 为平面上交于一点的三条直线的充要条件是 $a=$______.

6. 设三条不同的直线：$l_1:ax+2by+3(a+b+1)=0$，$l_2:bx+2(a+b+1)y+3a=0$，$l_3:(a+b+1)x+2ay+3b=0$，则它们相交于一点的充分必要条件为______.

7. 设定点 $A(-3,4)$，动点 B 在 y 轴上，动点 C 在直线 $l:x+y=0$ 上，则 $\triangle ABC$ 周长的最小值为______.

8. 设定点 $A(2,1)$，动点 B 在 x 轴上，动点 C 在直线 $y=x$ 上，则 $\triangle ABC$ 的周长的最小值是______.

9. 若直线 $2x+y-2=0$ 与直线 $x+my-1=0$ 互相垂直，则点 $P(m,m)$ 到直线 $x+y+3=0$ 的距离为______.

10. 已知点 $P(-2\ \ -1)$ 到直线 $l:(1+3\lambda)x+(1+2\lambda)y=2+5\lambda(\lambda\in\mathbb{R})$ 的距离为 d，则 d 的取值范围是______.

11. 直线 l 过点 $M(1,2)$，若它被两平行线 $4x+3y+1=0$ 与 $4x+3y+6=0$ 所截得的线段长为 $\sqrt{2}$，则直线 l 的方程为______.

9.2 圆与圆的方程

9.2.1 圆的方程

圆是平面上到定点的距离等于定长的点的集合，在平面直角坐标系，确定一个圆需要圆心坐标和半径这两个几何要素，如果一个圆的圆心坐标和半径确定了，圆就唯一确定了. 由此建立圆上点的坐标满足的关系式，这就是圆的方程.

如图所示，在平面直角坐标系中，圆 A 的圆心坐标为 (a,b)，半径为 r，$M(x,y)$ 为圆上任意一点. 根据两点间的距离公式，点 M 的坐标可以表示为：

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

根据以上过程可知，如果点 $M(x,y)$ 在圆 A 上，则点 M 的坐标满足上述方程；反之，如果点 M 的坐标 (x,y) 满足上述方程，即 M 和圆心 A 的距离等于 r，则点 M 在圆 A 上. 因此上面的方程就是以 (a,b) 为圆心，r 为半径的圆的方程，通常称为圆的**标准方程**.

只要知道了一个圆的圆心坐标和半径，就可以直接写出圆的标准方程. 反过来，如果知道了圆的标准方程的形式，就可以直接从方程中得到圆心坐标和半径.

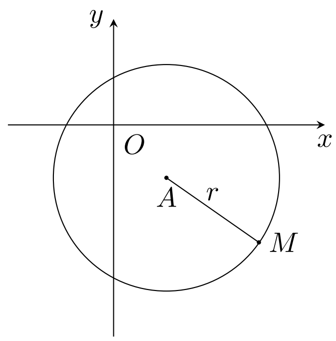


图 9.6:

一般地，圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可以变形为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

的形式，反过来，形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程一定能通过恒等变形变为圆的标准方程吗?

对上式左边平方，并将所有常数项移到右边，得

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示的是以 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ 为圆心，以 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆.

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程只有一组实数解 $x=-\frac{D}{2},y=-\frac{E}{2}$，所以此时方程表示的是一个点 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$.

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程没有实数解，所以此时方程不表示任何图形.

因此，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个圆，我们把 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 称为圆的**一般方程**. 在这种情况下，圆的一般方程通过配方，可以变为圆的标准方程.

除了通过圆心和半径外,已知圆的一条直径也能唯一地确定一个圆. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x,y)$ 是以线段 AB 为直径的圆上不同于 A,B 的任意一点. 根据 $MA\perp MB$ 可知 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$. 用坐标表示，得:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

容易验证 A 和 B 的坐标也满足上述方程，所以以 AB 为直径的圆上任意一点都满足上述方程. 反过来，满足上述方程即满足 $MA\perp MB$ 的点 M 一定在以 AB 为直径的圆上，所以上述方程表示的就是以 AB 为直径的圆，称为圆的**直径式方程**.

例 9.13. *在平面直角坐标系中，点 P 的坐标 (x,y) 满足*

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta. \end{cases} \quad (r>0)$$

其中 θ 为参数且 $\theta\in[0,2\pi)$，证明点 P 的轨迹是以 (a,b) 为圆心，r 为半径的圆，并说明参数 θ 的几何意义.

证明. 这里点 P 的轨迹方程是以参数方程给出的，我们需要将参数方程转化为普通方程，因而要设法消去参数 θ，因为 $r\cos\theta=x-a,r\sin\theta=y-b$，根据平方关系可知

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

故点 P 的轨迹方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，所以点 P 的轨迹是以 (a,b) 为圆心，r 为半径的圆.

如图9.7所示，根据三角函数可知，参数 θ 的几何意义是：圆周上某点所对应的参数 θ 就是该点与圆心的连线绕圆心 (a,b) 相对于 x 轴正方向的旋转角. □

方程 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta. \end{cases}$ $(r>0)$ 就是圆的**参数方程**，利用圆的参数方程，可以只用一个参数 θ 来刻画圆上一点的坐标，所以参数方程经常可以用来研究与圆上的点有关的问题.

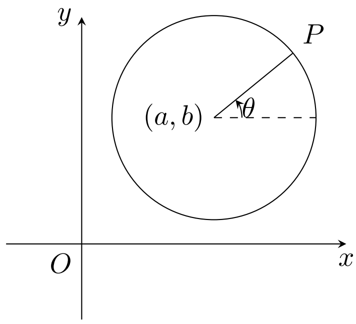


图 9.7: 圆的参数方程中参数 θ 的几何意义

9.2.2 直线与圆、圆与圆的位置关系

接下来我们用解析几何的方法研究直线与圆的位置关系.

我们知道，依据公共点的个数，直线与圆有三种位置关系：相交，相切和相离，下面我们结合几个具体例子来说明.

例 9.14. 已知点 $A(x_0, y_0)$ 在圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 上，求经过点 A 的圆 C 的切线方程.

解. 设圆 C 的半径为根据圆心与切点的连线垂直于切线可知，$\overrightarrow{CA}=(x_0-a, y_0-b)$ 是切线的法向量，根据直线的点法式方程可知切线方程为 $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.

又因为点 A 在圆 C 上，所以 $(x_0-a)(x_0-a)+(y_0-b)(y_0-b)=r^2$，因此点 A 的坐标满足方程 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$，所以方程 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ 表示的是以 (x_0-a, y_0-b) 为法向量且经过点 A 的直线. 根据唯一性可知，该方程和方程 $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$ 是同一个方程，都表示过点 C 的切线.

在解决具体问题时，我们通常使用

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$

的形式，该方程可以简单地记忆为“半代换”，即将圆的方程中的 $(x-a)^2$ 替换为 $(x_0-a)(x-a)$，$(y-b)^2$ 替换为 $(y_0-b)(y-b)$，常数项保持不变，所得的结果就是圆在圆上一点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线方程. ♡

评注 9.14.1. 点 (x_0, y_0) 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F(D^2+E^2-4F>0)$ 的位置关系有三种:

点在圆上 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$;

点在圆内 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$;

点在圆外 $\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$.

评注 9.14.2. “半代换”形式的方程除了适用于圆上一点处的切线外，在有些情况下还可以表示切点弦方程，参见下面的讨论.

例 9.15. 已知圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$，过点 P 向圆 C 引两条切线 PA 和 PB，切点分别为 A, B.

(1) 求切线长;

(2) 求切点弦 AB 所在直线 l_{AB} 的方程.

解. (1) 如图所示，$|CP|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$，在 Rt$\triangle PCA$ 中，$CA=r$，所以切线长 $|PA|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+r^2}$.

(2) 不妨设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则根据例题9.14可知，

$$l_{PA}:(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2.$$

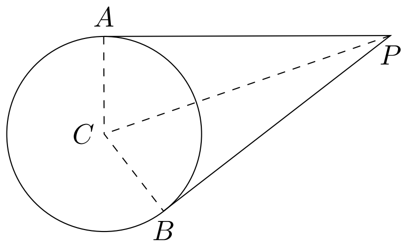
$$l_{PB}:(x_2-a)(x-a)+(y_2-b)(y-b)=r^2.$$

因为 P 点既在 l_{PA} 上，又在 l_{PB} 上，所以

$$\begin{cases}(x_1-a)(x_0-a)+(y_1-b)(y_0-b)=r^2,\\(x_2-a)(x_0-a)+(y_2-b)(y_0-b)=r^2.\end{cases}$$

注意到点 A 和点 B 的坐标都满足方程 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$, 所以点 A 和点 B 都在该方程所表示的直线上. 根据两点确定一条直线可知直线 AB 的方程为 $l_{AB}:(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$. ♡

可见，对于圆外一点 $P(x_0,y_0)$，其对应的切点弦也具有“半代换”的形式.



例 9.16. 过圆 $x^2+y^2=16$ 上的动点作圆 $C:x^2+y^2=4$ 的两条切线，两个切点之间的线段称为切点弦，则圆 C 内所有切点弦所包络的区域（不在任何切点弦上的点形成的区域）的面积为 (　　　　).

(A) π　　(B) $\dfrac{3\pi}{2}$　　(C) 2π　　(D) 3π

解. 设圆 $x^2+y^2=16$ 上任意一点 $P(x_0,y_0)$，根据半代换，点 P 所对应的切点弦方程为 $x_0x+y_0y=4$. 注意到 $x_0^2+y_0^2=16$，所以原点到任意一条切点弦的距离 $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=1$，所以圆 C 内被全体切点弦所包络的区域是一个以原点为圆心，半径为 1 的圆，所以区域的面积为 π，选择 (A) 项. ♡

评注 9.16.1. 运用半代换，可以直接写出圆外某点所对应切点弦所在直线的方程.

设 $P(x_0,y_0)$，则半代换方程 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ 表示:

(1) 当 P 在圆上时，表示 P 点处的切线方程;

(2) 当 P 在圆外时，表示 P 点对应的切点弦所在直线的方程.

例 9.17. 过点 $P(2,1)$ 作圆 $O:x^2+y^2=1$ 的切线 l，求切线 l 的方程.

> 分析: 点在圆外，过该点可以作两条切线. 目前，我们只知道切点弦的方程可以根据半代换直接写出，如果将切点弦方程和圆的方程联立，就可以解出两个切点的坐标，进而求出两条切线的方程. 除了利用上述方法之外，能不能不计算出切点坐标，直接得到切线的方程呢?

解. 当 l 的斜率不存在时，显然 l 与圆相离，不符合题意.

当 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则切线方程为 $y-1=k(x-2)$，因为由圆心到切线 l 的距离等于圆的半径 1，所以

$$\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$.

所以所求切线 l 的方程为 $y=1$ 或 $4x-3y-5=0$. ♡

评注 9.17.1. *初学者容易忘记讨论直线不存在的情况，从而使得解题过程逻辑不完整.*

另解 当 l 的斜率不存在时，显然 l 与圆相离，不符合题意.

当 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则切线方程为 $y-1=k(x-2)$.

因为直线 l 与圆相切，即直线 l 和圆 O 只有一个公共点，即联立方程组

$$\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

只有一组解.

消去 y，得

$$(k^2+1)x^2+(2k-4k^2)x+4k^2-4k=0.$$

因为方程组只有一组解，所以

$$\Delta=4k^2(1-2k)^2-16k(k^2+1)(k-1)=0.$$

解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$.

例 9.18. *已知圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 内一点 $P(x_0,y_0)$（不是圆心），且 P 是弦 AB 的中点.*
(1) 求弦 AB 所在直线的方程;
(2) 求弦 AB 的长.

解. (1) 不妨设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为 A,B 在圆 C 上，所以

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,$$

$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2.$$

两式相减，得

$$(x_1-a)^2-(x_2-a)^2+(y_1-b)^2-(y_2-b)^2=0.$$

即

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2a)+(y_1-y_2)(y_1+y_2-2b)=0.$$

因为 $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$，代入上式得

$$(x_1 - x_2)(x_0 - a) + (y_1 - y_2)(y_0 - b) = 0.$$

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\dfrac{x_0 - a}{y_0 - b}$，根据直线的点斜式方程可知直线 AB 的方程为:

$$l_{AB} : y - b = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - a).$$

整理得

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

事实上，根据垂径定理可知 CP 与 AB 垂直，因为 $k_{CP} = \dfrac{y_0 - b}{x_0 - a}$，所以 $k_{AB} = -\dfrac{x_0 - a}{y_0 - b}$，从而可以不用稍显麻烦的**点差法**得到 AB 的斜率.

思考：这一小问得到的结果和例题9.14中的圆上一点处切线方程是一样的，那么中点弦是否可以像圆上一点处的切线那样写成半代换的形式？为什么？

(2) 本题同样可以借助垂径定理求解. 如图9.8所示，$CP \perp AB$，所以在 Rt $\triangle PAC$ 中 $AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{r^2 - CP^2}$.

而根据两点间的距离公式,$CP = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$,所以 $AP = \sqrt{r^2 - (x_0 - a)^2 - (y_0 - b)^2}$，所以 $AB = 2AP = 2\sqrt{r^2 - (x_0 - a)^2 - (y_0 - b)^2}$. ♡

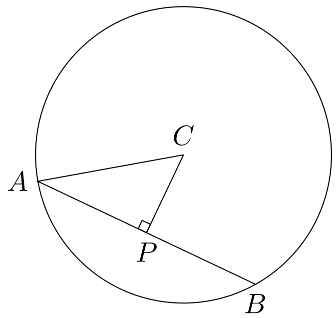


图 9.8:

评注 9.18.1. 在解析几何的看法下求解圆被某直线截得的弦长问题时，都可以根据垂径定理先求出弦心距 d（点到直线的距离公式），再根据勾股定理求出弦长 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

下面我们讨论如何在解析几何的意义下判定直线与圆的位置关系. 根据定义，直线与圆的位置关系取决于直线与圆的公共点个数，所以可以联立直线和圆的方程，得到方程组有多少组实数解，相应地直线与圆就有多少个公共点.

事实上，根据圆的几何性质，直线与圆的位置关系还可以通过比较圆心到直线的距离 d 和半径 r 的大小关系来判断（距离 d 可以用点到直线的距离公式来计算），当 $d < r$ 时，直线与圆相交，有 2 个公共点；当 $d = r$ 时，直线与圆相切，有 1 个公共点；当 $d > r$ 时，直线与圆相离，没有公共点.

有了这种观点，通常情况下我们可以更加方便地判断直线与圆的位置关系，而避免了联立方程.

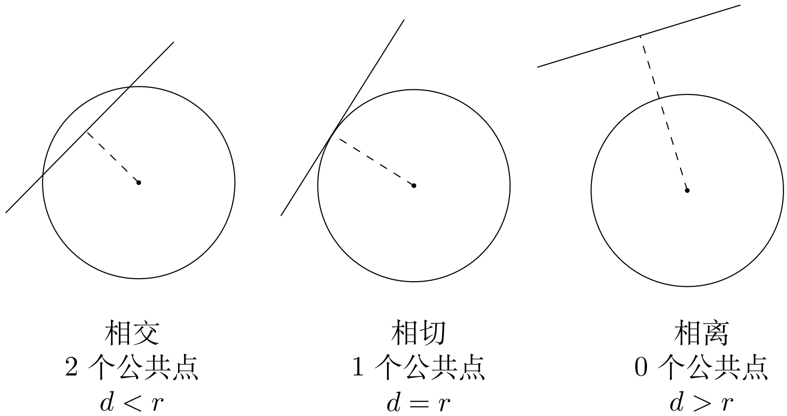


图 9.9: 直线与圆的位置关系

当直线与圆相离时，圆上任意一点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $d+r$，最小值为 $d-r$，即取值范围是 $[d-r,d+r]$.

例 9.19. (1) 直线 l 与半径为 r 的圆 C 相切，讨论圆 C 上直线 l 的距离为 $x(x\in[0,2r])$ 的点的个数;

(2) 直线 l 与半径为 r 的圆 C 相交，且圆心 C 到直线 l 的距离为 d，讨论圆 C 上到直线 l 的距离为 $x(x\in[0,r+d])$ 的点的个数.

解. (1) 结合图形可知:

当 $x=0$ 或 $x=2r$ 时，只有 1 个符合要求的点;

当 $0<x<2r$ 时，有 2 个符合要求的点.

(2) 结合图形可知:

当 $x=r+d$ 时，只有 1 个符合要求的点;

当 $r-d<x<r+d$ 或 $x=0$ 时，有 2 个符合要求的点;

当 $x=r-d$ 时，有 3 个符合要求的点;

当 $0<x<r-d$ 时，有 4 个符合要求的点. ♡

下面讨论圆与圆的位置关系.

判定圆 O_1 与圆 O_2 的位置关系的方法是比较圆心距 $|O_1O_2|$ 和两者的半径之和 r_1+r_2 之间的大小关系:

1° $|O_1O_2|>r_1+r_2$，两圆外离，一共可以作出 4 条公切线;

2° $|O_1O_2|=r_1+r_2$，两圆外切，一共可以作出 3 条公切线;

3° $|r_1-r_2|<|O_1O_2|<r_1+r_2$，两圆相交，一共可以作出 2 条公切线;

4° $|O_1O_2|=|r_1-r_2|$，两圆内切，一共可以作出 1 条公切线;

5° $|O_1O_2|<|r_1-r_2|$，小圆内含于大圆，此时作不出公切线. 特别地，当 $|O_1O_2|=0$ 时，两圆同心.

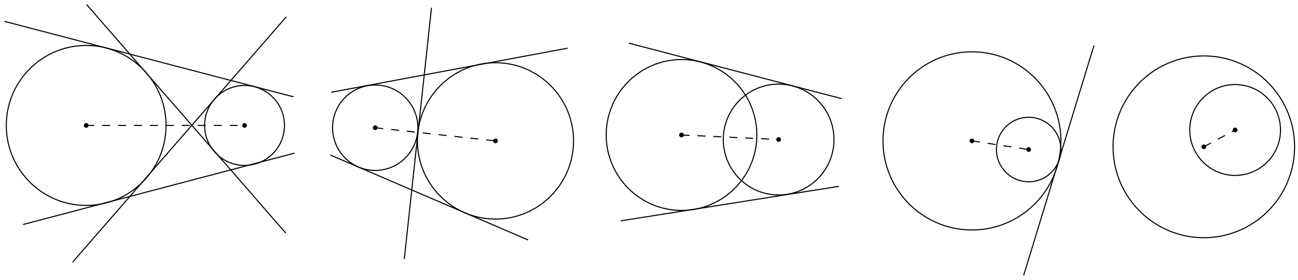


图 9.10:

设圆 $C: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，圆 $P: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$，且两圆相交于 A,B 两点，那么曲线系

$$\lambda(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\mu(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

表示经过两圆交点的曲线系方程，当 $\lambda\neq-\mu$ 时，该方程是经过两圆交点的圆系方程，当 $\lambda=-\mu$ 时，方程退化为

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0.$$

此时该方程表示直线，注意到直线经过两圆的交点，所以此即公共弦所在直线 l 的方程.

特别地，如果圆 C 和圆 P 相切，则两个圆只有一个公共点，这时曲线系

$$\lambda(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\mu(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

表示经过两圆切点的曲线系方程，当 $\lambda=-\mu$ 时，方程的形式变为

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0.$$

此时方程表示经过两圆切点的直线.

因为 $C(-\frac{D_1}{2},-\frac{E_1}{2}),P(-\frac{D_2}{2},-\frac{E_2}{2})$，所以

$$2\overrightarrow{O_1O_2}=(D_1-D_2,E_1-E_2).$$

根据点法式方程，直线 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$ 以 $2\overrightarrow{O_1O_2}$ 为法向量，又因为直线过两圆的切点，所以 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$ 就是两圆的公切线，这可以理解为公共弦所在直线意义的推广.

回到两圆相交于 A,B 两点的情况，当 $\lambda\neq-\mu$ 时，

$$\lambda(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\mu(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

是过两圆交点的圆系方程，其圆心为 $Q(-\frac{\lambda D_1+\mu D_2}{2(\lambda+\mu)},-\frac{\lambda E_1+\mu E_2}{2(\lambda+\mu)})$.

注意到 $\overrightarrow{OC}=(-\frac{D_1}{2},-\frac{E_1}{2}),\overrightarrow{OP}=(-\frac{D_2}{2},-\frac{E_2}{2})$,

所以 $\overrightarrow{OQ}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OC}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OP}$，由 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}=1$ 及三点共线定理，Q 可取遍 l_{PC} 上任意一点，即曲线系

$$\lambda(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\mu(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-\mu)$$

可以表示全体经过 A,B 两点的圆.

这一结论也可以用解析几何的方法得出：写出 l_{PC} 的方程，再验证点 Q 在直线 l_{PC} 上，而直线 l_{PC} 上的点的坐标都可以写成点 Q 坐标的形式即可. 作为练习，过程留给读者自己完成.

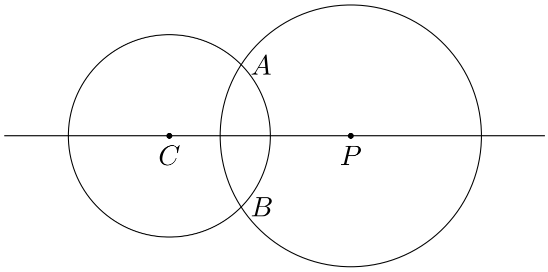


图 9.11: 经过两圆交点的圆系方程

例 9.20. 已知圆 $C_1: x^2+y^2=4$ 和圆 $C_2: x^2+y^2+2ay-6=0$ 的公共弦长为 $2\sqrt{3}$，求 a 的值.

解. 公共弦所在直线的方程为 $ay-1=0$,根据垂径定理,$C_1(0,0)$ 到直线的距离 $d=\sqrt{2^2-(\frac{2\sqrt{3}}{2})^2}=1$，所以

$$\frac{|a\times 0-1|}{\sqrt{a^2}}=1.$$

解得 $a=\pm 1$. ♡

例 9.21. 求圆心在 $x-y-4=0$ 上且过 $x^2+y^2-4x-6=0$ 与 $x^2+y^2-4y-6=0$ 的交点的圆的方程.

解. 过两圆交点的圆系方程为

$$x^2+y^2-4x-6+\lambda x^2+\lambda y^2-4\lambda y-6\lambda=0.$$

其圆心为 $(\frac{2}{1+\lambda},\frac{2\lambda}{1+\lambda})$，所以 $\frac{2-2\lambda}{1+\lambda}-4=0$，解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$，整理得圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+1)^2=4.$$

♡

例 9.22. 已知 $M(-1,2)$，$N(1,4)$，点 P 在 x 轴上，当 $\angle MPN$ 最大时，求点 P 的坐标.

解. 以 MN 为直径的圆与 x 轴相离，所以 $\angle MPN<\frac{\pi}{2}$.

由正弦定理，$\sin\angle MPN=\frac{MN}{2R}$，$R$ 为 $\triangle MPN$ 的外接圆半径，当 $\triangle MPN$ 外接圆半径的最小时，$\angle MPN$ 最大.

$\triangle MPN$ 的外接圆可以看成过 MN 以 MN 为直径的圆与 l_{MN} 交点的圆系，结合圆的直径式方程和直线的两点式方程，其方程可以写成

$$(x+1)(x-1)+(y-2)(y-4)+\lambda[(4-2)(x+1)-(1+1)(y+1)]=0.$$

整理得

$$x^2+2\lambda x+y^2-(6+2\lambda)y+7+6\lambda=0.$$

其圆心坐标为 $(-\lambda, 3+\lambda)$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{(2\lambda)^2+(6+2\lambda)^2-4(7+6\lambda)}}{2}=\sqrt{2\lambda^2+1}$.

又因为点 P 在 x 轴上，所以要求外接圆和 x 轴有公共点，即 $\sqrt{2\lambda^2+2}\geq 3+\lambda$，解得 $\lambda\geq 7$ 或 $\lambda\leq -1$，所以当 $x=-1$ 时 $R=\sqrt{2\lambda^2+2}$ 取得最小值 2，此时圆心坐标为 $(1,2)$.

所以点 P 的坐标为 $(1,0)$. ♡

例 9.23. 已知圆 $P: 2x^2+2y^2-8x-8y+1=0$ 和直线 $l: x+y=9$，A 在直线 l 上，B, C 在圆上且 l_{AB} 经过圆心，若 $\angle BAC=45^\circ$，求点 A 的横坐标 x_A 的取值范围.

解. 如图所示，圆与直线相离，当 AC 与圆相切时，张角最大，所以要求 x_A 使得当 l_{AC} 和圆相切时 AB 和 AC 所张的角不小于 45°，这等价于 $\sin\angle BAC=\dfrac{r}{AP}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 AP 满足 $AP\leq\sqrt{2}r$.

圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=\dfrac{17}{2}$, 所以 $r=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$，圆心 $P(2,-2)$，因为 $A:(x_A, 9-x_A)$，所以 $|AP|^2=(x_A-2)^2+(9-x_A+2)^2\leq 17$.

解得 $6\leq x_A\leq 9$，即 x_A 的取值范围是 $[6,9]$. ♡

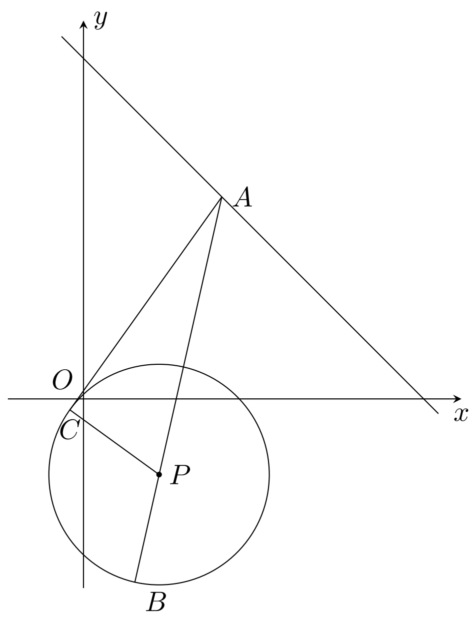


图 9.12:

9.2.3 与圆有关的解析几何问题

我们知道圆的方程是一个二次方程，因此圆作为二次曲线的一种，在解析几何的意义下具有代表性. 在这一小节中我们将选讲几个与圆有关的解析几何问题，并介绍一些常用的解决解析几何问题的方法.

例 9.24. 已知直线 $l: y=kx+m$ 与和圆 $C: (x-s)^2+(y-t)^2=r^2$ 相交于点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，试不借助垂径定理求出弦 AB 的长.

解. 不借助垂径定理，则考虑联立方程，方程组的两个解对应的就是直线与圆的公共点 A 和 B 的坐标：

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ (x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2. \end{cases}$$

消去 y，整理得 $(1+k^2)x^2 + [2k(m-t) - 2s]x + s^2 + (m-t)^2 - r^2 = 0$，这是一个关于 x 的二次方程，其两个根就是 x_1, x_2.

为了下面讨论问题的方便，我们将这个二次方程记为 $ax^2 + bx + c = 0$.

由两点间的距离公式，

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

利用直线 A, B 的方程可以将 y_1, y_2 分别表示成 x_1, x_2 的线性表达式：

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (kx_1 + m - kx_2 - m)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2|.$$

根据二次方程根与系数的关系，$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(-\frac{b}{a})^2 - 4\frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，所以

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

♡

其中 k 为直线的斜率，Δ 是关于 x 的二次方程的判别式，a 是关于 x 的二次方程的二次项系数. 这就是解析几何意义下圆的弦长公式.

从上述过程可以看出，我们虽然通过联立方程、消去 y 得到了关于 x 的二次方程，但是却并没有具体求解出 x_1 和 x_2，而只是利用根据系数的关系得到了两根之积 x_1x_2 和两根之和 $x_1 + x_2$ 就求出了结果. 原因是待求的弦长最终可以写成只包含 x_1x_2 和 $x_1 + x_2$ 的表达式，因此没有必要求解出 x_1 和 x_2 就能解决问题，这种思想称为**设而不求**，设而不求的思想对于解决解析几何问题十分重要.

例 9.25. 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M, N 两点.
(1) 求 k 的范围；
(2) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$，其中 O 是坐标原点，求 $|MN|$.

(1) 解. 由已知得 $l: y = kx + 1$.l 与圆 C 有两个公共点，这等价于 $\frac{|2k - 3 + 1|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$，解得 $\frac{4 - \sqrt{7}}{3} < k < \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$. ♡

(2)

> 分析：本题是和点 M 和点 N 相关的问题，考虑设出两个点的坐标，再利用设而不求的思想表示 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$，进而解出 k，据此计算出 $|MN|$ 的长.

解. 设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，由

$$\begin{cases} y = kx + 1, \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1. \end{cases}$$

消去 y 得 $(k^2+1)x^2-4(1+k)x+7=0$.

由二次方程根与系数的关系，$x_1+x_2=\dfrac{4+4k}{k^2+1},x_1x_2=\dfrac{7}{1+k^2}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}&=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+1)(kx_2+1)\\&=x_1x_2+k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1\\&=\frac{4k(1+k)}{1+k^2}+8.\end{aligned}$$

由题意可得 $\dfrac{4k(1+k)}{1+k^2}+8=12$，解得 $k=1$.

所以 $l:y=x+1$，所以圆心 C 在直线 l 上，MN 是直径，所以 $MN=2$. ♡

例 9.26. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 与 x 轴的负半轴交于点 A，与 y 轴的正半轴交于点 B.

(1) 若过点 $C(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 的直线 l 被圆 O 截得的弦长为 $\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

(2) 若在以 B 为圆心，r 为半径的圆上存在一点 P 使得 $PA=\sqrt{2}PO$，求 r 的取值范围.

(3) 设 M,Q 是圆 O 上两个动点，点 M 关于原点的对称点为 M_1，点 M 关于 x 轴的对称点为 M_2，如果直线 QM_1 和直线 QM_2 与 y 轴分别交于 $(0,m)$ 和 $(0,n)$，试证明 mn 为定值.

(1) 解. 若直线 l 的斜率不存在，则 l 的方程为 $x=\dfrac{1}{2}$，显然符合题意.

若直线 l 斜率存在，设 $l:y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k(x-\dfrac{1}{2})$，整理得

$$l:2kx-2y-k+\sqrt{3}=0.$$

因为点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}-k|}{\sqrt{(2k)^2+(-2)^2}}$.

因为直线 l 被 O 解得的弦长为 $\sqrt{3}$，所以 $d=\sqrt{1^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\dfrac{1}{2}$.

代入解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 l 的方程为

$$x=\frac{1}{2}\text{或}x-\sqrt{3}y+1=0.$$

♡

(2) 解. 首先确定 P 点的轨迹方程，设 $P(x,y)$，由题设得 A 的坐标 $(-1,0)$，点 B 的坐标 $(0,1)$. 由 $|PA|=\sqrt{2}|PO|$ 可得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, 化简得到 $(x-1)^2+y^2=2$.

所以点 P 在以 $(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆上，又因为点 P 在圆 B 上，所以要求两圆至少有一个公共点，即

$$|r-\sqrt{2}|\le\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}\le r+\sqrt{2}.$$

又因为 $r\neq 0$，所以 $0<r\le 2\sqrt{2}$.

所以 r 的范围是 $(0,2\sqrt{2}]$. ♡

(3)

证明. 设 $M(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $M_1(-x_1,-y_1)$，$M_2(x_1,-y_1)$.

因为 M,Q 在圆上，所以

$$x_1^2+y_1^2=1;\ \ x_2^2+y_2^2=1.$$

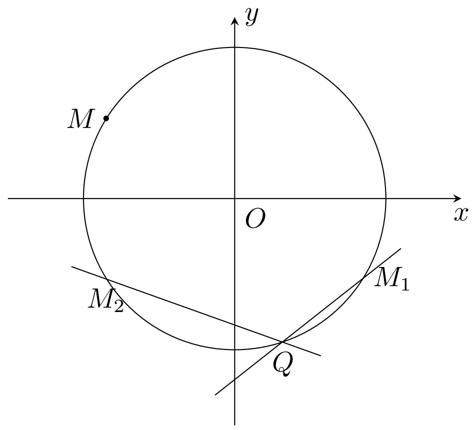


图 9.13:

直线 QM_1 的方程为 $y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}(x+x_1)$，令 $x=0$，则 $m=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}$，同理可得 $n=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}$，

所以

$$\begin{aligned} mn &= \frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{(x_1y_2)^2-(x_2y_1)^2}{x_1^2-x_2^2} \\ &= \frac{x_1^2(1-x_2^2)-x_2^2(1-x_1^2)}{x_1^2-x_2^2}=1. \end{aligned}$$

□

评注 9.26.1. 由于本题是和圆上的点有关的问题，也可以使用圆的参数方程设出 M 和 Q 的坐标，两种方法本质上是相同的.

例 9.27 (参数 t 的几何意义). 在平面直角坐标系中 P 的坐标为 $(1,0)$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y=1+\sqrt{2}\sin\alpha, \end{cases}$ （α 是参数），直线 l 的斜率为 -1 且经过点 P.

(1) 写出 l 的参数方程和曲线 C 的普通方程.

(2) 直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $|PA|^2+|PB|^2$.

(1) 直线 l 的斜率为 -1，所以其单位方向向量为 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，又因为直线 l 经过点 $(1,0)$，所以直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases} \quad (t \text{ 是参数})$$

对于曲线 C，消去参数 α 得

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

这就是 C 的普通方程，曲线 C 表示以 $(1,1)$ 为圆心 $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

(2)

> 分析：因为直线上某点所对应参数 t 的几何意义是该点到点 P 的有向距离，设 A,B 所对应的参数分别是 t_1 和 t_2，那么 $|PA|^2+|PB|^2$ 理解为 $t_1^2+t_2^2$，从而可以通过联立方程得到关于 t 的二次方程，再根据韦达定理求解，过程体现了设而不求的思想方法.

解. 设 A,B 所对应的参数分别是 t_1 和 t_2，将 $\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$ 代入到圆 C 的普通方程，整理得

$$t^2-\sqrt{2}t-1=0.$$

由韦达定理可知，$t_1+t_2=\sqrt{2}, t_1t_2=-1$，根据参数 t 的几何意义可知

$$|PA|^2+|PB|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=4.$$

♡

评注 9.27.1. 在求解某些问题时，利用参数 t 的几何意义可以使问题处理起来非常直接、简捷.

习题 9.2

1. 方程 $|y|=1+\sqrt{2x-x^2}$ 表示的曲线为______.

2. 已知动点 P 在 x 轴上，点 M,N 分别在圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$ 上，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为______.

3. 已知圆 $O: x^2+y^2=4$ 与曲线 $C: y=3|x-t|$，$A(m,n),B(s,p)(m,n,s,p\in\mathbf{N}^*)$ 为曲线 C 上的两点，使得圆 O 上的任意一点到点 A 的距离与到点 B 的距离之比为定值 $k(k>1)$，求 t 的值.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果直线 l 将圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分，且不经过第四象限，那么 l 的斜率的取值范围是______.

5. 直线 $x=3$ 上任取一点 P，过点 P 向圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 作两条切线，其切点分别为 A,B，则直线 AB 经过一个定点，该定点的坐标为______.

6. 已知直线 $l: y=\sqrt{3}x+4$，动圆 $O: x^2+y^2=r^2(1<r<2)$，菱形 $ABCD$ 的一个内角为 $60°$，顶点 A,B 在直线 l 上，顶点 C,D 在圆 O 上，当 r 变化时，求菱形 $ABCD$ 的面积 S 的取值范围.

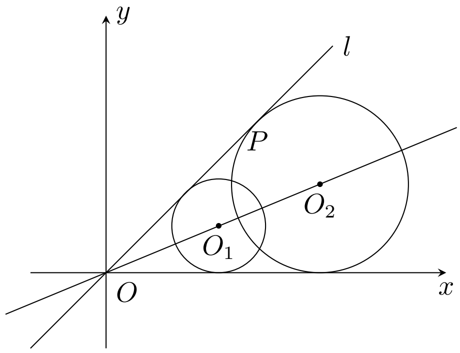
7. 平面上 n 个圆两两相交，最多有______个交点.

8. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 $y=kx-2(k\in\mathbf{R})$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值为______.

9. 已知圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 关于直线 l 对称，则 l 的方程为______.

10. 已知直线 $ax+by=2017$ 与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点，且公共点的横、纵坐标均为整数. 则这样的直线共有______条.

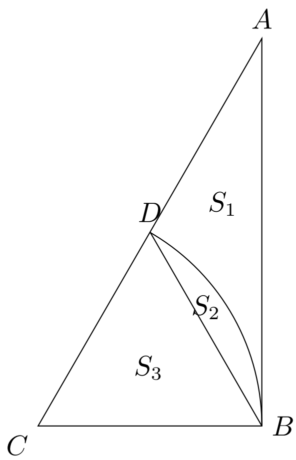
11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O_1、圆 O_2 都与直线 $l: y = kx$ 及 x 轴正半轴相切. 若两圆的半径之积为 2，两圆的一个交点为 $P(2,2)$，求直线 l 的方程.



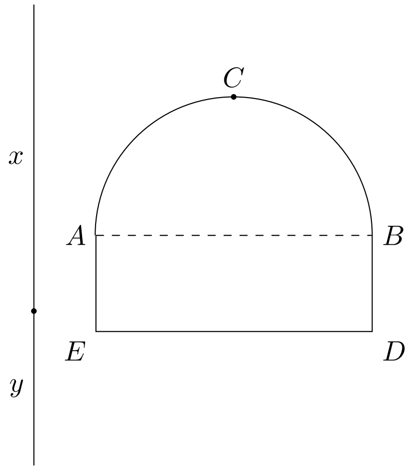
12. 顺次连结圆 $x^2 + y^2 = 9$ 与双曲线 $xy = 3$ 的交点，得到一个凸四边形. 则此凸四边形的面积为______.

13. 在一个边长为 a 的正方形草坪的四个角上都安有喷水装置，喷水装置都可以 90° 旋转喷水，每个喷水装置都可以从其所在角的一边旋转喷水至该角的另一边，其有效射程均为 a，则草坪上能同时被四个喷水装置喷水覆盖的区域占整个草坪的比例为______.

14. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 60^\circ$. 以 C 为圆心，BC 为半径的圆交 AC 于 D 点，连结 BD. 弧 $\overset{\frown}{BD}$ 与弦 BD 将 $\triangle ABC$ 分为三部分（如图）. 则三部分面积之比 $S_1 : S_2 : S_3 =$______.



15. 如图所示，将长度为 1 的线段分为 x、y 两段，再将长度为 x 的线段弯成半圆周 ACB，将长度为 y 的线段折成矩形 $ABDE$ 的三条边（BD、DE、EA），构成闭“曲边形” $ACBDEA$，则该曲边形面积的最大值为______.



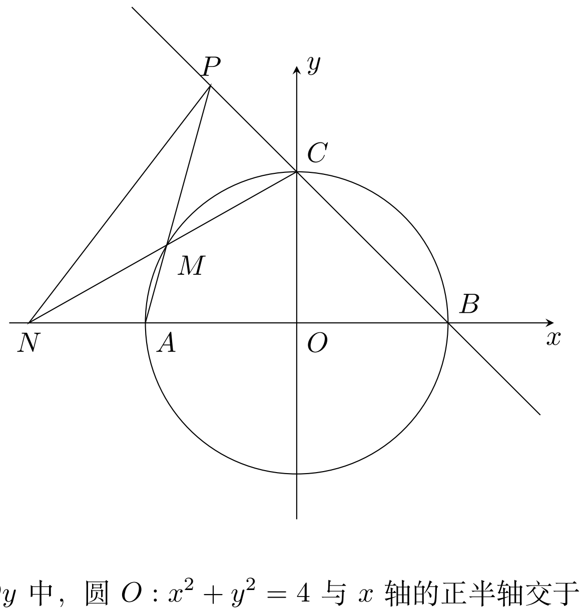
16. 过动点 M 作圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 的切线 MN，其中 N 为切点，若 $|MN|=|MO|$（O 为坐标原点），则 $|MN|$ 的最小值为______.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 $L:y=2x-4$，设 $\odot C$ 的半径为 1，圆心在直线 L 上．若 $\odot C$ 上存在点 M，使得 $|MA|=2|MO|$，则圆心 C 的横坐标 a 的取值范围是______.

18. 设点 A 的坐标为 $(0,3)$，点 B、C 为圆 $O:x^2+y^2=25$ 上的两动点，满足 $\angle BAC=90^\circ$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. 已知圆 $C:x^2+y^2=r^2$，两点 P、P^* 在以 O 为起点的射线上，并且满足 $|OP|\cdot|OP^*|=r^2$，则称 P、P^* 关于圆周 C 对称，那么双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的点 $P(x,y)$ 关于单位圆周 $C:x^2+y^2=1$ 的对称点 P^* 所满足的方程是______.

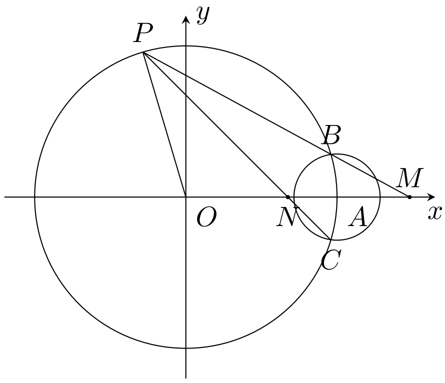
20. 如图，已知 $\odot O:x^2+y^2=1$ 与 x 轴交于 A、B 两点、与 y 轴交于点 C，M 是 $\odot O$ 上任一点(除去 $\odot O$ 与两坐标轴的交点)，直线 AM 与 BC 交于点 P，直线 CM 与 x 轴交于点 N，设直线 PM、PN 的斜率分别为 m、n．证明：$m-2n$ 为定值.



21. 如图，在直角坐标系 xOy 中，圆 $O:x^2+y^2=4$ 与 x 轴的正半轴交于点 A，以 A 为圆心的圆 $A:(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与圆 O 交于 B、C 两点.

(1) 求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值;

(2) 设 P 是圆 O 上异于 B、C 的任一点, 直线 PB、PC 与 x 轴分别交于点 M、N, 求 $S_{\triangle POM}\cdot S_{\triangle PON}$ 的最大值.



第十章　圆锥曲线/解析几何 II

> 冷知识：这本书的笔者也不会极点极线.
>
> ——笔者

我们知道用垂直于圆锥的轴的平面截圆锥得到的曲线是一个圆，如果改变圆锥的轴与截平面所成的角，那么会得到什么曲线呢?

如下图所示是一组对顶的无底圆锥，现在我们使平面与圆锥的轴所成的角 θ 逐渐减小到零，则在 θ 的变化过程中可以截得不同的曲线，它们分别是椭圆、抛物线和双曲线，我们通常把椭圆、抛物线和双曲线统称为**圆锥曲线**.

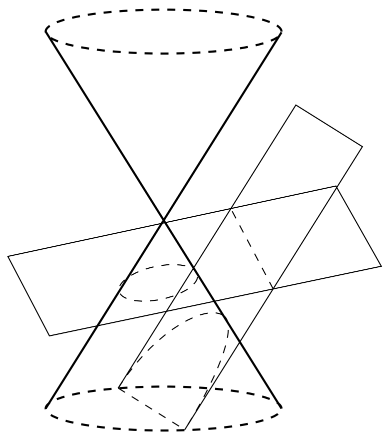


图 10.1: 圆锥曲线

记圆锥母线与圆锥底面所成的角为 α，则当 $90^\circ-\alpha<\theta<90^\circ$ 时，所截得的曲线为椭圆；当 $\theta=90^\circ-\alpha$ 时，所截得的曲线为抛物线；当 $0^\circ<\theta<90^\circ-\alpha$ 时，所截得的曲线是双曲线.

在这一讲中我们将在了解了圆锥曲线的几何性质的基础上，继续用解析几何的方法建立它们的方程，并通过方程进一步研究它们的性质.

10.1 椭圆及其方程

10.1.1 椭圆的定义及其标准方程

我们回到“平面截圆锥”的话题上来，试着给出椭圆的一般定义，从而建立其方程.

如图10.2所示，设有一平面截圆锥得一椭圆，在圆锥中作“一上一下”两球使其同时与截平面和圆锥的侧面相切，其中与截平面分别切于 F_1, F_2，现考虑取椭圆周上任意一点 J，设过该点的母线与两球分别交于 I 和 K.

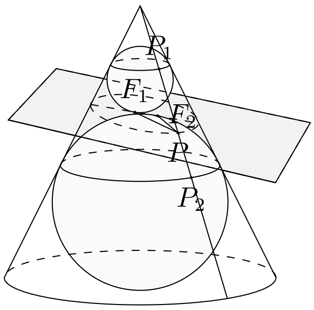


图 10.2: Dandelin 双球

根据切线长定理可知

$$PF_1 = PP_1, PF_2 = PP_2.$$

所以 $PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 =$ 定值.

由此，我们可以给出椭圆的定义：

定义 10.1 (椭圆的第一定义). 我们把平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和为常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为**椭圆**.

有了椭圆的一般定义，我们就可以用解析几何的方法建立椭圆的方程. 为了使方程的形式简洁，我们在建立平面直角坐标系时应考虑其对称性：设两定点的坐标分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 点 $P(x,y)$ 到 F_1 和 F_2 的距离之和为 $2a(a>c>0)$，则问题转化为求点 P 的轨迹方程，根据定义，点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$，即

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

经过“移项，平方，再移项，再平方”的步骤，化简得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

记 $b^2 = a^2 - c^2 (b>0)$，我们就得到了椭圆的方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0).$$

我们将该方程称为**椭圆的标准方程**.

我们把椭圆定义中的两个定点 F_1, F_2 称为椭圆的**焦点**，则方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

表示的是焦点在 x 轴上，两个焦点分别是 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ 的椭圆，这里 $c^2=a^2-b^2$. 通常将位于 x 轴负半轴的焦点 F_1 称为椭圆的**左焦点**，将位于 x 轴正半轴的焦点 F_2 称为椭圆的**右焦点**.

如图所示，当 P 点位于 y 轴上时，由于 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=|PF_2|=a$，而 $|OF_1|=|OF_2|=c$，所以 $|OP|=\sqrt{a^2-c^2}=b$. 这样，我们在椭圆中找到了长度分别为 a,b,c 的线段，如图10.3所示.

我们将椭圆与坐标轴的四个交点叫做**椭圆的顶点**，线段 A_1A_2 和线段 B_1B_2 分别称为椭圆的**长轴**和**短轴**. 显然 $|A_1A_2|=2a$，$|B_1B_2|=2b$，所以我们通常将 a 和 b 分别叫做椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**. 我们将两个焦点之间的距离 $|F_1F_2|=2c$ 称为椭圆的**焦距**，将参数 c 称为椭圆的**半焦距**.

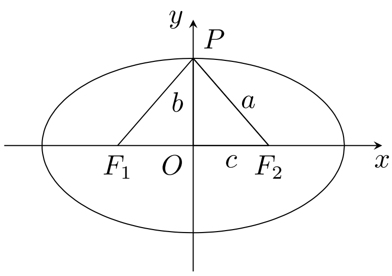


图 10.3:

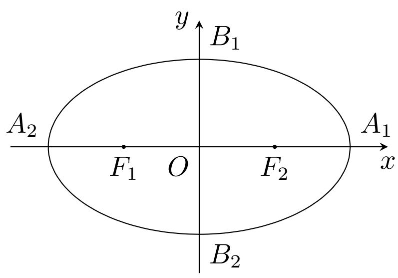


图 10.4: 椭圆的顶点和焦点

椭圆既是轴对称图形，又是中心对称图形. 对于标准的椭圆，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心. 我们称椭圆的对称中心为椭圆的中心.

如果焦点 F_1，F_2 在 y 轴上，a,b 的意义保持不变，此时只需将 x,y 互换位置，即将标准方程变为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

此时方程表示的是焦点在 y 轴上的"竖椭圆"，a 仍然是椭圆的长半轴，b 仍然是椭圆的短半轴.

例 10.1. *在平面直角坐标系中，点 P 的坐标 (x,y) 满足*

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta. \end{cases}$$

其中 θ 为参数且 $\theta\in[0,2\pi)$，证明点 P 的轨迹是以 a 为长半轴，b 为短半轴的椭圆，并说明参数 θ 的几何意义.

证明. 这里点 P 的轨迹方程由参数方程给出，消去参数 θ：

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1.$$

即得椭圆的标准方程. 方程 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta. \end{cases}$ 称为椭圆的参数方程. □

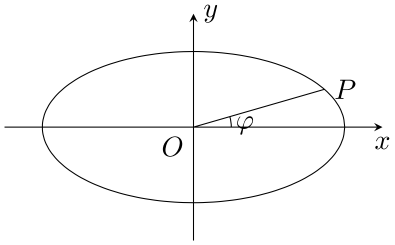


图 10.5:

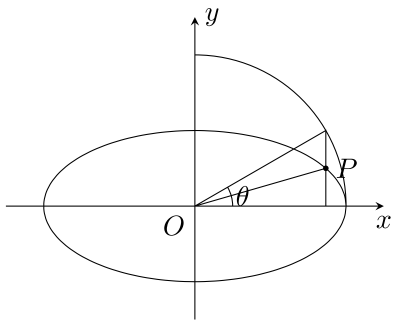


图 10.6:

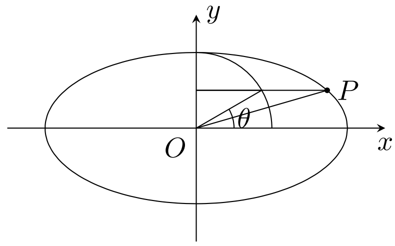


图 10.7:

设椭圆周上某点 P 所对应的参数为 θ，则 OP 的 “旋转角”φ(即 $\varphi=\angle POX$) 满足

$$\tan\varphi=\frac{b}{a}\tan\theta.$$

可见 P 点对应的 “旋转角”φ 和 P 点对应的参数 θ 不是一回事，参数 θ 可以借助椭圆的外接圆或内接圆找到，如图10.6和10.7 所示.

通常将椭圆参数方程中的参数 θ 称为**离心角**.

例 10.2. 在直角坐标系中，曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}, \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

直线 l 的方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

(1) 求 C 的普通方程;

(2) 求 C 上的点到直线 l 距离的最小值.

解. (1) 消去参数 t，得:

$$x^2+(\frac{y}{2})^2=(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2+(\frac{2t}{1+t^2})^2=\frac{t^4+2t^2+1}{(t^2+1)^2}=1.$$

因为 $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}\in(-1,1]$，所以曲线 C 的普通方程是

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x\neq -1).$$

事实上，引入变量替换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$，根据万能公式可知 $x=\cos\theta, y=2\sin\theta$. 因此本题中给出的参数方程与用离心角 θ 表示的参数方程本质上是相同的，只不过这里是以 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 为参量表示的. 因为当 $\theta=2k\pi+\pi$ 时 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 没有定义，这个参数方程不能表示点 $(-1,0)$，所以参数方程表示的曲线是挖去一个点的椭圆.

(2) 该曲线的参数方程可以写成 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$ 其中 θ 为参数且满足 $\theta\neq 2k\pi+\pi$.

所以曲线上任一点 P 到直线 l 的距离 d 为

$$d = \frac{|2\cos\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 11}{\sqrt{7}}.$$

所以当 $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$4\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) + 11$ 取得最小值 7，所以曲线上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$. ♡

评注 10.2.1. 与椭圆上的点有关的问题，常常利用椭圆参数方程作为工具，将问题转化为以参数 θ 为变量的三角函数问题来解答.

我们把椭圆焦距与长轴长的比 $\dfrac{c}{a}$ 成为椭圆的**离心率**，通常用字母 e 来表示，因为

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}.$$

因为 $a > b > 0$，所以 e 的范围是 $0 < e < 1$. 另外，e 的值越接近 0，意味着 b 的值越接近 a，因而椭圆越“接近圆”；反之，e 的值越接近 1，意味着 b 的值越小，因此椭圆越“扁平”.

特别地，如果 $a = b$，则可认为 $e = 0$，此时两个焦点重合，图形变为圆，它的方程就是

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

例 10.3. 这个例子讨论椭圆系方程.

已知椭圆 $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$

(1) 与 Γ 共焦点的椭圆系方程. 设其方程为 $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1$，则满足约束条件 $\widetilde{a}^2 - \widetilde{b}^2 = a^2 - b^2.$，所以与 Γ 共焦点的椭圆系方程为

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \lambda > -b^2.$$

(2) 与 Γ 离心率相同的椭圆系方程（焦点在 x 轴上）. 设其方程为 $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} + \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1$，则满足约束条件 $\dfrac{\widetilde{b}^2}{\widetilde{a}^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$，所以与 Γ 共离心率相同（焦点在 x 轴上）的椭圆系方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k, k > 0.$$

我们考虑一种直线与椭圆相交的特殊情况，即直线过椭圆的一个焦点的情况. 易知在这种情况下直线和椭圆必有两个不同的交点，如图10.8所示. 那么自然有一个问题：**焦点弦** AB（过焦点的直线与椭圆的两个焦点之间的线段）的长度和直线的斜率或者说倾斜角之间的关系如何？为了研究这个问题，我们先考虑焦点到椭圆上一点的线段，即**焦半径**，如图10.9中的 PF_1 和 PF_2.

我们将在下一个小节中重点讨论与焦半径有关的问题.

10.1.2 椭圆的极坐标方程

在讨论焦半径问题之前，我们要先引入椭圆的另一种定义即第二定义，它和第一定义是等价的.

考虑椭圆 $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，我们把直线 $x = \dfrac{a^2}{c}$ 叫做椭圆的**右准线**，直线 $x = -\dfrac{a^2}{c}$ 叫做椭圆的左准线. 由此给出椭圆的第二定义：

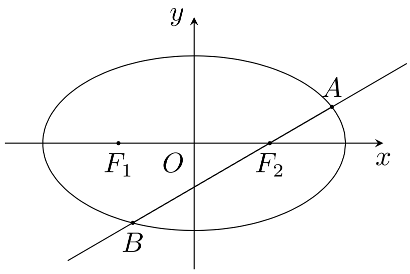


图 10.8: 焦点弦

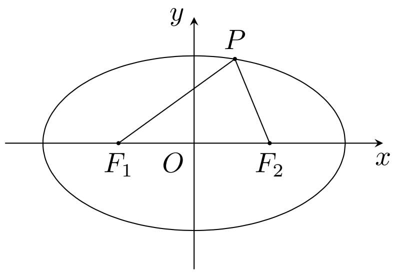


图 10.9: 焦半径

定义 10.2 (椭圆的第二定义)**.** 平面上到定点 F 的距离与到定直线的距离之比为常数 e（即椭圆的离心率）的点的集合就是椭圆.（其中定点不在定直线上，且 $e<1$.）

这里的定点和定直线实际上就是焦点和对应的准线（左焦点对应左准线，右焦点对应右准线）.

我们可以验证椭圆的第二定义和椭圆的第一定义是等价的，即：

$$\text{平面内一点 } P(x,y) \text{ 到点 } (c,0) \text{ 和直线 } x=\frac{a^2}{c} \text{ 的距离之比为 } e=\frac{c}{a}$$
$$\Rightarrow (x,y) \text{ 到点 } (-c,0) \text{ 和 } (c,0) \text{ 的距离之和为 } 2a.$$

作为练习，验证的过程留给读者完成.

从椭圆的第二定义可以看出，椭圆上点 P 到焦点 F 的距离就是焦半径的长度. 以右焦点为例，根据椭圆的第二定义，$|PF_2|=ed_2$，其中 d_2 是 P 点到右准线的距离. 容易看出 $d_2=\dfrac{a^2}{c}-x_P$，所以 $|PF_2|=\dfrac{a^2e}{c}-ex_P=a-ex_P$.

用同样的方法，我们得到左焦点对应的焦半径 $|PF_1|=a+ex_P$.

以上两个公式说明，焦半径和横坐标之间存在着形式非常简单的关系，这一关系可以根据椭圆的第二定义直接得到.

下面我们要在极坐标下应用椭圆的第二定义.

在平面取一个定点 O，叫做**极点**，引一条射线 Ox 称为**极轴**，取逆时针为角度的正方向. 则对于平面内任意一点 M，用 $\rho\geq 0$ 表示线段 OM 的长度，θ 表示从 Ox 到 OM 的角度，则 ρ 称为 M 的**极径**，θ 叫做点 M 的**极角**，则此时 (ρ,θ) 就是点 M 的**极坐标**，如图10.10所示.

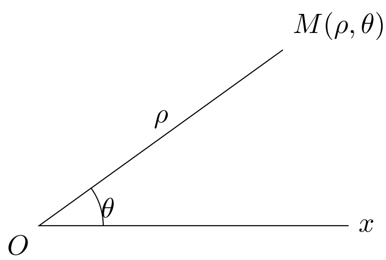


图 10.10: 极坐标

现在我们设想把极点放在椭圆的焦点上，注意到此时焦半径长度就是椭圆上点的极径长，焦半径所在直线的倾斜角就是椭圆上点的极角（如图10.11）. 因此，如果能够得到椭圆的极坐标方程 $\rho=$

$f(\theta)$，那么这本身就是焦半径长度和倾斜角之间的关系，换句话说，我们也就得到了焦半径长的极坐标公式.

有了椭圆的第二定义，我们可以直接得到椭圆的极坐标方程. 设椭圆的焦准距为 p，则 $p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$. 不妨以右焦点 F_2 为极点，则椭圆上一点 P 的极径 ρ 就是焦半径 $|PF_2|$ 的长度. 注意到焦准距 p 等于 PF_2 在 x 轴上的投影长度与 P 到准线的距离之和，而根据椭圆的第二定义，P 到准线的距离 $d=\frac{|PF_2|}{e}$，因此我们有：

$$\rho\cos\theta+\frac{\rho}{e}=p.$$

整理得

$$\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

其中 ρ 是 P 点的极径，θ 是 P 点的极角.

椭圆的极坐标方程的一个重要的意义是给出了椭圆焦半径长和倾斜角之间的关系，也就给出了焦半径的另一个计算公式. 由以上过程可见，焦半径和极角之间的关系也是由椭圆的第二定义直接得到的.

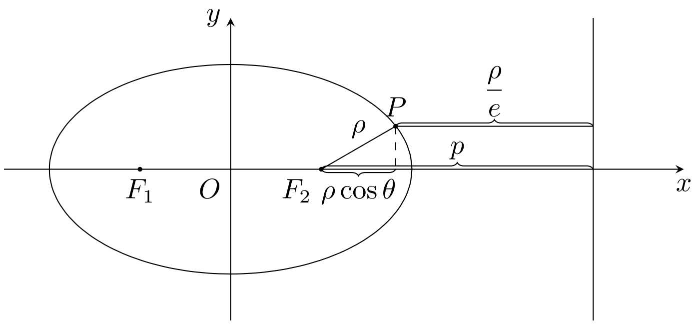


图 10.11: 椭圆的极坐标方程

如果以左焦点 F_1 为极点，F_1x 为极轴，同理可以得到椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

10.1.3 椭圆的几何性质

有了椭圆的第一定义、第二定义，以及椭圆的标准方程和极坐标方程，我们就可以研究椭圆的一些几何性质.

椭圆上一点 P 到左焦点和 F_1 和右焦点 F_2 的线段都是焦半径，由椭圆的第一定义，这两者的和为定值 $2a$，即

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

首先我们考虑椭圆的焦点弦（以右焦点为例），如图10.8所示. 根据椭圆的极坐标方程可知，

$$|AF_2|=\frac{ep}{1+e\cos\theta_A},\theta_A=\angle AFX,|BF_2|=\frac{ep}{1+e\cos\theta_B},\theta_B=\angle BFX.$$

因为 F 在直线 AB 上，所以 $\cos\theta_A+\cos\theta_B=0$.

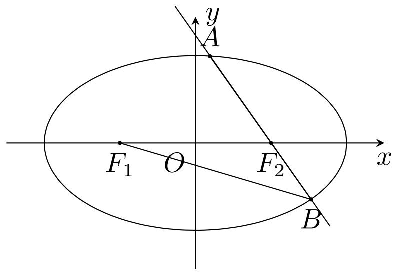


图 10.12:

此时焦点弦的长度

$$\begin{aligned}|AB| = |AF_2| + |BF_2| &= \frac{ep}{1+e\cos\theta_A} + \frac{ep}{1+e\cos\theta_B} \\ &= \frac{ep(1+e\cos\theta_B)+ep(1+e\cos\theta_A)}{(1+e\cos\theta_A)(1+e\cos\theta_B)} \\ &= \frac{2ep}{1+e^2\cos\theta_A\cos\theta_B}\end{aligned}$$

记 $\cos\theta_A = -\cos\theta_B := \cos\theta$，则上面的式子可以写成

$$|AB| = \frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

由椭圆的焦点弦长度的公式可知，θ_A 越接近 $\frac{\pi}{2}$，焦点弦长度越短，θ_A 越接近 0 或 π，焦点弦长度越长. 即焦点弦越“斜”，其长度就越长，这与我们几何直观是一致的. 特别地，当 θ_A 等于零时，焦点弦就是长轴，所以长轴是最长的焦点弦，其长度为 $\frac{2ep}{1-e^2} = \frac{2\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{c}}{\frac{b^2}{a^2}} = 2a$.

当 $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ 即 AB 所在直线与长轴垂直时，焦点弦长度最短. 我们将垂直于长轴的焦点弦称为椭圆的通径，椭圆的通径就是直线 $x=c$ 或直线 $x=-c$ 截椭圆所得的线段. 通径是最短的焦点弦，通径长为

$$2ep = 2\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{c} = \frac{2b^2}{a}.$$

事实上，将 $x=c$ 代入椭圆方程得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 即 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，所以 $x=c$ 与椭圆交点的纵坐标为 $\pm\frac{b^2}{a}$，由此也可以直接得到通径的长度是 $\frac{2b^2}{a}$.

例 10.4. (1) 椭圆 C 的两焦点为 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与椭圆 C 交于点 A,B，且满足 $|AF_2| = 2|F_2B|, |AB| = |BF_1|$，求椭圆的方程.
(2) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，过右焦点 F_2 的直线于椭圆交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$，求直线 AB 的斜率.

解. (1) 如图10.12所示, 以 $\angle AF_2X = \theta$ 为主元, 由 $|AF_2| = 2|F_2B|$ 及焦半径公式的极坐标形式可知 $\frac{ep}{1+e\cos\theta} = 2\frac{ep}{1+e\cos(\pi-\theta)}$, 即 $\frac{ep}{1+e\cos\theta} = 2\frac{ep}{1-e\cos\theta} \Rightarrow \frac{1-e\cos\theta}{1+e\cos\theta} = 2$, 解得 $e\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

而 $|F_1B| = 2a - \frac{ep}{1-e\cos\theta} = 2a - \frac{3b^2}{4a}$，$|AB| = \frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta} = \frac{9b^2}{4a}$，因为 $|F_1B| = |AB|$，所以 $2a - \frac{3b^2}{4a} = \frac{9b^2}{4a}$，所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$，又因为 $a^2-b^2=c^2=1$，所以 $a^2=3, b^2=2$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 仍然参考图10.12，设 $\angle AF_2X=\theta$，则直线 AB 的斜率 $k=\tan\theta$. 因为 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以 $\dfrac{|AF_2|}{|BF_2|}=\dfrac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}=2$，解得 $e\cos\theta=\dfrac{1}{3}$. 因为 $e=\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\tan\theta=\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\pm\sqrt{2}$. ♡

评注 10.4.1. 这两个问题讨论的都是同一条焦点弦对应的两个焦半径之间的关系. 事实上，因为

$$|AF|=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta},|BF|=\frac{ep}{1\mp e\cos\theta}.$$(这里的 $+$ 或 $-$ 取决于 F 是左焦点还是右焦点)

所以，我们有

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2\pm\cos\theta\mp\cos\theta}{ep}=\frac{2}{ep}.$$

根据式 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{ep}$ 可知，如果已知同一条焦点弦对应的其中一条焦半径长，根据该式就可以计算出另一条焦半径长.

例 10.5 (焦点三角形). 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，考虑椭圆上一点 P（与长轴端点不重合）与两个焦点 F_1,F_2 构成的三角形 PF_1F_2.

(1) 求焦点三角形的周长，焦点三角形的周长与 P 的位置有关吗？

(2) 记 P 张 F_1F_2 的角为 α，求焦点三角形的面积，并求当 P 在椭圆上运动时，焦点三角形面积的最大值.

(3) 若以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 有公共点，求离心率的取值范围.

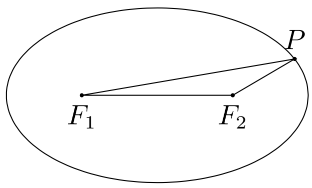


图 10.13: 焦点三角形

解. (1) 焦点三角形的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|$. 由焦半径的和为定值可知, $|PF_1|+|PF_2|=2a=$ 定值，而 $|F_1F_2|=$ 椭圆的焦距 $=2c$，所以焦点三角形的周长 $=2a+2c=$ 定值，与 P 的位置无关.

(2) 在三角形 PF_1F_2 中，由余弦定理

$$(|PF_1|+|PF_2|)^2=|F_1F_2|^2+2|PF_1||PF_2|(1+\cos\alpha).$$

即

$$4a^2=4c^2+2|PF_1||PF_2|(1+\cos\alpha)\Rightarrow|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}.$$

而三角形 PF_1F_2 的面积 $=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\alpha$，为讨论方便，我们记面积为 $S(\alpha)$，则

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha\frac{2b^2}{1+\cos\alpha}=b^2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=b^2\tan\frac{\alpha}{2}.$$

另一方面，$S=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_P|=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_P|=c|y_P|$, 其中 y_P 表示 P 的纵坐标.

因为 $y_p\in[-b,0)\cup(0,b]$，所以 $S=c|y_P|\in(0,bc]$，当且仅当 $y_P=b$ 时，S 最大.

评注 10.5.1. 余弦定理的推论：在三角形 ABC 中，A,B,C 所对的边为 a,b,c，则 $(a+b)^2 = c^2+2ab(1+\cos A)$.

正切半角公式：$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

从本题的结果来看，焦点三角形的面积可以由 P 张 F_1F_2 的角决定，也可以由 P 点的纵坐标决定，在实际计算焦点三角形的面积时，通常是利用公式 $S(\alpha)=b^2\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

进一步分析还可以得到，椭圆上一点 P 张 F_1F_2 的角随 $|y_P|$ 的增大而增大（简单记忆为"张角渐大"）. 这是因为 $\dfrac{\alpha}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $S(\alpha)$ 随张角的增大而增大，另一方面，S 又随 $|y_P|$ 的增大而增大，所以张角 α 也就随着 $|y_P|$ 的增大而增大，且张角的最大值就是 $\angle F_1BF_2$，其中 B 是上顶点或下顶点.

后面一个小问是上述讨论的一个直接应用.

(3) 条件等价于 $\exists P$ 在椭圆上，使得 $\angle F_1PF_2=90^\circ \Leftrightarrow \angle F_1BF_2\geq 90^\circ$.

即 $\sin\angle BOF_2=\dfrac{c}{a}=e\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $e\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$. ♡

关于焦点三角形的旁切圆，我们有如下结论

命题 10.1. 焦点三角形 F_1PF_2 的旁切圆 I 的圆心在定直线 $x=a$ 上，切点是椭圆的左顶点或右顶点.

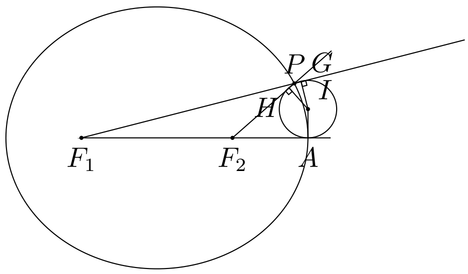


图 10.14: 焦点三角形的旁切圆

证明. 如图10.14所示，A,G,H 为切点. 要证明圆心 I 在直线 $x=a$ 上，只需证明切点 A 在椭圆的右顶点上.

因为 $F_2A=F_2H$，$PG=PH$，$F_1A=F_1G$，而

$$F_1P+F_2P=2a$$

所以左边 $=F_1P+F_2P=F_1G-PG+F_2H+PH=F_1G+F_2H=F_1A+F_2A=$ 右边 $=2a$，即 $F_1A+F_2A=2a$，所以 A 在椭圆上. 又因为 A 在 x 轴上，所以 A 就是椭圆的右顶点，即 I 在直线 $x=a$ 上. □

例 10.6 (焦点弦三角形). 在这道例题中我们考虑焦点弦三角形，即过右焦点 F_2 的焦点弦 AB（不是椭圆的长轴）与左焦点 F_1 构成的三角形 F_1AB.

(1) 证明：焦点弦三角形的周长为定值;

(2) 求焦点三角形面积的最大值.

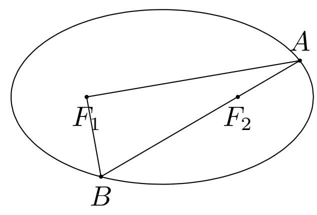


图 10.15: 焦点弦三角形

解. (1) 因为 $|F_1A|+|F_2A|=2a, |F_1B|+|F_2B|=2a$，所以焦点弦三角形的周长 $=|F_1A|+|F_2A|+|F_1B|+|F_2B|=2a+2a=4a=$ 定值.

(2) 由焦点弦的极坐标公式，设 $\angle AF_2X=\theta$，则 $AB=\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$.

设三角形 AF_1B 的面积为 S，则

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}|AB||F_1F_2|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}\cdot 2c\cdot\sin\theta\\
&=\frac{2epc\sin\theta}{1-e^2\cos^2\theta}\\
&=\frac{2b^2c}{a}\cdot\frac{\sin\theta}{1-e^2\cos^2\theta}\\
&=\frac{2b^2c}{a}\cdot\frac{\sin\theta}{1-e^2+e^2\sin^2\theta}\\
&=\frac{2b^2c}{a}\cdot\frac{1}{e^2\sin\theta+\frac{1-e^2}{\sin\theta}}\\
&\le\frac{2b^2c}{a}\cdot\frac{1}{2e\sqrt{1-e^2}}=ab.
\end{aligned}
$$

当且仅当 $e^2\sin\theta=\dfrac{1-e^2}{\sin\theta}$ 时等号成立，即 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\in(0,1]$，解得 $e\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$.

分情况讨论. 当 $e\in[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$ 时，$S_{\max}=ab$.

当 $e\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 时，等号无法取得. 由单调性知当 $\sin\theta=1$ 即 AB 是通径时取得最大值，$S_{\max}=\dfrac{2b^2c}{a}$. ♡

再来看一个稍复杂的例题，可以和例10.4放在一起学习.

例 10.7. *已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点. 若 $|AB|=|F_1F_2|$，$|F_1A|=\dfrac{1}{2}|F_1B|$，求椭圆 C 的离心率.*

解. 如图10.16所示，设 $|AF_1|=x,|BF_1|=2x$，根据焦点弦三角形的的周长为 $4a$，

$$3x+2c=4a.$$

所以 $x=\dfrac{2}{3}(2a-c)$，所以 $|F_2B|=\dfrac{4c-2a}{3},|F_2A|=\dfrac{2a+2c}{3}$.

这是一条焦点弦对应的两条焦半径，由极坐标形式的焦半径公式可知

$$\frac{F_2A}{F_2B}=\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}=\frac{2a+2c}{4c-2a}=\frac{a+c}{2c-a}.$$

解得 $e\cos\theta=\dfrac{2a-c}{3c}=\dfrac{2}{3e}-\dfrac{1}{3}$.

由焦点弦长公式，$|AB|=\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$，又因为 $|AB|=|F_1F_2|=2c$，所以

$$\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}=2c.$$

解得 $e^2\cos^2\theta=1-\dfrac{ep}{c}=1-\dfrac{a^2-c^2}{ac}=1-\dfrac{1}{e}+e$.

所以 $1-\dfrac{1}{e}+e=(\dfrac{2}{3e}-\dfrac{1}{3})^2$.

整理得

$$9e^3+8e^2-5e-4=0.$$

注意到 $e=-1$ 是三次方程的一个根，据此因式分解得

$$(e+1)(9e^2-e-4)=0.$$

解二次方程 $9e^2-e-4=0$ 得 $e=\dfrac{1\pm\sqrt{145}}{18}$.

因为 $0<e<1$，所以 $e=\dfrac{1+\sqrt{145}}{8}$. ♡

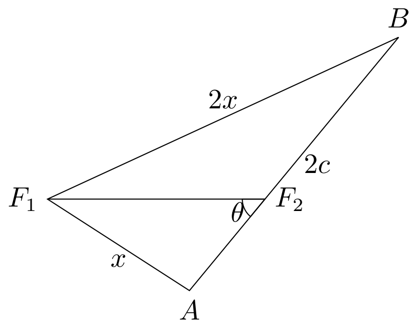


图 10.16:

例 10.8 (离心角相互垂直). 已知椭圆 $\Gamma:\begin{cases}x=a\cos\alpha,\\ y=b\sin\alpha,\end{cases}$，不妨称参数 α 为椭圆上一点的离心角，参考例 10.1. 证明：

(1) 椭圆上两点 S,T 的离心角终边所在直线相互垂直 $\Leftrightarrow k_{OS}\cdot k_{OT}=e^2-1=-\dfrac{b^2}{a^2}$;

(2) 椭圆上两点 S,T 的离心角终边所在直线相互垂直 $\Rightarrow |OS|^2+|OT|^2=a^2+b^2$.

证明. (1) 先证明 "$\Rightarrow$"：设点 S 的离心角为 θ，点 T 的离心角为 φ. 因为椭圆上 S,T 的离心角互相垂直，所以不妨设 $\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

$$k_{OS}=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}=\frac{b}{a}\tan\theta, k_{OT}=\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}=\frac{b}{a}\tan\varphi.$$

因为 $\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\tan\varphi=-\dfrac{1}{\tan\theta}$.

所以

$$k_{OS}\cdot k_{OT}=\frac{b^2}{a^2}\tan\theta\tan\varphi=-\frac{b^2}{a^2}.$$

再证明 “$\Leftarrow$”：因为 $k_{OS}=\dfrac{b}{a}\tan\theta, k_{OT}=\dfrac{b}{a}\tan\varphi$，所以 $k_{OS}\cdot k_{OT}=\dfrac{b^2}{a^2}\tan\theta\tan\varphi=-\dfrac{b^2}{a^2}\Rightarrow$ $\tan\theta\tan\varphi=-1$，即:θ 和 φ 终边所在直线互相垂直.

(2)：设点 S 的离心角为 θ，点 T 的离心角为 φ. 因为椭圆上 S,T 的离心角互相垂直，所以不妨设 $\theta-\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

则 $|OS|=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}, |OT|=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$，所以

$$
\begin{aligned}
|OS|^2+|OT|^2&=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\\
&=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2(\theta-\frac{\pi}{2})+b^2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{2})\\
&=a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\\
&=a^2+b^2
\end{aligned}
$$

□

例 10.9 (旋转角相互垂直). 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，椭圆上两点 S,T 满足 $OS\perp OT$. 设 $OS=\rho_1, OT=\rho_2$，证明：
(1) $\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$;
(2) 点 O 到线段 ST 的距离 d 为定值.

证明. (1) 以原点为极点建立极坐标，设 $S(\rho_1,\theta)$，则 $T(\rho_2,\varphi)$，不妨 $\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}$，则 S 的直角坐标方程为 $(\rho_1\cos\theta,\rho_1\sin\theta)$，$T$ 的直角坐标方程为 $(-\rho_2\sin\theta,\rho_2\cos\theta)$，代入椭圆方程得：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\rho_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\rho_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1,\\
\dfrac{\rho_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\rho_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1.
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{\rho_1^2},\\
\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{\rho_2^2}.
\end{cases}
$$

两式相加立刻得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}$.
(2) 这个结论实际上是第一问的一个直接推论.
$S_{\triangle SOT}=\dfrac{1}{2}\cdot|OS|\cdot|OT|=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2$，$|ST|=\sqrt{|OS|^2+|OT|^2}=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$.
所以 $d=\dfrac{2S_{\triangle SOT}}{ST}=\dfrac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}=\sqrt{\dfrac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1^2+\rho_2^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}}}=\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=$ 定值.

□

评注 10.9.1. 以上两个例子分别讨论了离心角和旋转角相差 $\dfrac{\pi}{2}$ 时椭圆上的两点所具有的关系.

在例 10.9 中，若 S 点恰好是长轴端点，那么 T 点就是短轴端点，此时 $\rho_1=a,\rho_2=b$，这可以看成是该命题的特殊情况.

另外，例 10.9 第 (2) 小问的结果表明，弦 ST 与定圆相切. 事实上，终边所在直线相互垂直的椭圆上两点构成的弦的全体形成的包络线是一个椭圆的内准圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，如图 10.17 所示.

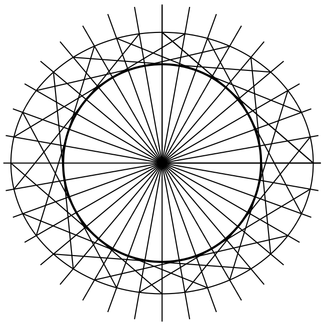


图 10.17: 椭圆的内准圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

例 10.10. 如图 10.18 所示，已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 以及圆 $C:x^2+y^2=b^2$，P 是第一象限内椭圆上一点，椭圆的弦 PQ 与圆 C 相切，F 为椭圆 Γ 的右焦点，证明 $\triangle PQF$ 的周长为定值.

证明. 设 PQ 与圆 C 相切于 K. 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，则

$$\begin{aligned}|PF|&=\sqrt{(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+c^2\cos^2\theta-2ac\cos\theta+b^2\sin^2\theta}\\&=\sqrt{(a-c\cos\theta)^2}=a-c\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PK|&=\sqrt{|OP|^2-|OK|^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-b^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\cos^2\theta}\\&=\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}=c\cos\theta.\end{aligned}$$

所以 $|PK|+|PF|=a$，同理 $|QK|+|QF|=a$.

所以三角形 PFQ 的周长 $=|PQ|+|FQ|+|PF|=|PK|+|PF|+|QK|+|QF|=2a$，为定值. □

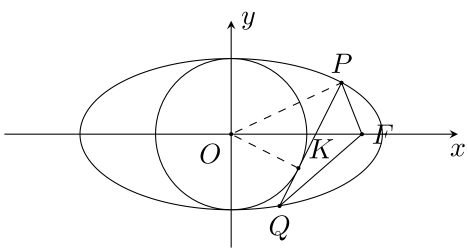


图 10.18:

例 10.11 (顶点三角形). 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设椭圆的长轴端点为 A_1,A_2，考虑椭圆上一点 P（不是长轴端点）与长轴形成的三角形 A_1PA_2.

(1) 证明：$k_{A_1P}k_{A_2P}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$；

(2) 求 P 张长轴的角的最大值.

(3) 现在考虑一般情况下的顶点三角形：设经过椭圆中心的直线与椭圆交于 M,N 两点，考虑椭圆

上一点 P（不是长轴端点），证明 $k_{MP}k_{NP} = -\dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$.
提示：这是和椭圆上的点有关的问题，考虑采用椭圆的参数方程.

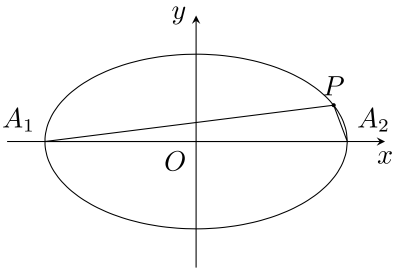


图 10.19: 顶点三角形

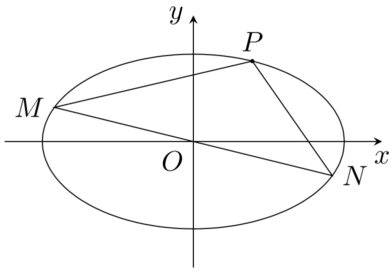


图 10.20: 一般情况下的顶点三角形

(1)

证明. 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则

$$k_{A_1P} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta + a}, k_{A_2P} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta - a}.$$

所以 $k_{A_1P}k_{A_2P} = \dfrac{b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta - a^2} = \dfrac{b^2\sin^2\theta}{-a^2\sin^2\theta} = -\dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1.$ □

(2) 解. 由到角公式：

$$\tan\angle A_1PA_2 = \frac{k_{PA_2} - k_{PA_1}}{1 + k_{PA_1}k_{PA_2}} = \frac{\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta - a} - \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta + a}}{e^2} = -\frac{2b}{ae^2\sin\theta}.$$

由对称性，只考虑 $\theta \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$ 即点在第一象限及 y 轴正半轴的情况，此时 $\tan\angle A_1PA_2$ 随 θ 的增大而增大，由单调性知当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 即 P 点是短轴端点时，$\angle A_1PA_2$ 最大，此时 $\tan\angle A_1PA_2 = -\dfrac{2b}{ae^2}$.
♡

(3)

证明. 设 $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$，根据椭圆的中心对称性，$N(-a\cos\varphi, -b\sin\varphi)$. 则

$$k_{PM} = \frac{b(\sin\theta - \sin\varphi)}{a(\cos\theta - \cos\varphi)},$$

$$k_{PN} = \frac{b(\sin\theta + \sin\varphi)}{a(\cos\theta + \cos\varphi)}.$$

所以

$$k_{PM}k_{PN} = \frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\varphi)}{a^2(\cos^2\theta - \cos^2\varphi)} = \frac{b^2(\sin^2\theta - \sin^2\varphi)}{a^2(\sin^2\varphi - \sin^2\theta)} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

□

评注 10.11.1. 事实上，顶点三角形的性质 $k_{A_1P}k_{A_2P} = e^2 - 1$ 可以作为椭圆的一种等价定义，即第三定义，将在后面的章节中详细讨论.

这里的两直线斜率之积为 $e^2 - 1$ 的结论和例 10.8 中有关离心角相互垂直的结论具有相同的形式.

习题 10.1

1. 若圆柱被一平面所截, 其截面椭圆的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则此截面与圆柱底面所成的锐二面角的余弦值是______.

2. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 30°, 则由平面 α 上的圆在平面 β 上的正射影得到的椭圆的离心率等于______.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC=2\sqrt{3}$, 边 AB、AC 上的中线长之和为 6. 以直线 BC 为 x 轴、边 BC 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系. 则顶点 A 的轨迹方程为______.

4. 已知 F_1,F_2 分别为椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点, $|F_1F_2|=2.A$ 为 Γ 的右端点, 直线 l 过点 A 且垂直于 x 轴, P 为直线 l 上一动点, 若 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$, 则此时点 P 的坐标为______.

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 恒过定点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, 且其长轴长的取值范围是 $[\sqrt{5},\sqrt{6}]$. 则离心率的取值范围是______.

6. 方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的椭圆左顶点为 A, 左、右焦点分别为 F_1,F_2, D 是它的短轴上的一个顶点, 若 $3\overrightarrow{DF_1}=\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DF_2}$, 则该椭圆的离心率为______.

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A, 上顶点为 B, 左焦点为 F, 若 $\angle ABF=90^\circ$, 则椭圆的离心率为______.

8. 已知抛物线 P 以椭圆 E 的中心点为焦点, P 经过 E 的两个焦点, 并且 P 与 E 恰有三个交点, 则 E 的离心率等于______.

9. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 椭圆 Γ 的一个焦点为 A, 另一个焦点 F 在线段 BC 上, 如果椭圆 Γ 恰好经过 B,C 两点, 则它的离心率为______.

10. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 其焦距为 $2c$. 点 $N(\frac{3c}{2},\frac{\sqrt{2}c}{2})$ 在椭圆的内部, 点 M 是椭圆上的动点, 且 $|MF_1|+|MN|<2\sqrt{3}|F_1F_2|$ 恒成立, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是______.

11. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点与短轴一端点组成一个正三角形的三个顶点, 若焦点到椭圆上的点的最短距离为 $\sqrt{3}$, 则 (a,b)=______.

12. 已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点, A、B 分别是该椭圆的左顶点和上顶点, 点 P 在线段 AB 上, 则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为______.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设焦距为 $2c$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ 有相同的离心率 e, 则 e 的值是______.

14. “$a=2,b=\sqrt{2}$” 是 “曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R},ab\neq0)$ 经过点 $(\sqrt{2},1)$” 的__________条件.

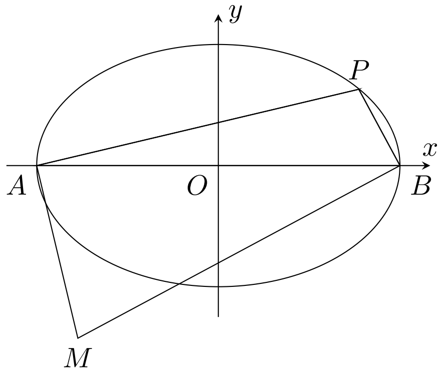
15. 已知 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1 为其左焦点，Q 在 PF_1 上且满足 $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_1})$，$|\overrightarrow{OQ}|=3$，则点 P 到椭圆左准线的距离为______.

16. 若椭圆的一个顶点关于它的一个焦点的对称点恰好在其准线上，则椭圆的离心率 $e=$______.

17. 椭圆 $x^2+ky^2=1$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 有相同的准线，则 k 等于______.

18. 若椭圆两准线之间的距离为两焦点之间距离的两倍，则其离心率 $e=$______.

19. 如图，已知 A、B 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴端点，P 为椭圆上异于 A、B 的点，过点 A、B 分别作 $l_1\perp PA$，$l_2\perp PB$，直线 l_1 与 l_2 交于点 M. 当点 P 在椭圆上移动时，求点 M 的轨迹方程.



20. 过椭圆的左焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线 l 与该椭圆交于 A、B 两点，若 $|BF|=2|AF|$，则该椭圆的离心率是______.

21. 过椭圆 $x^2+2y^2=3$ 的一个焦点作斜率为 k 的直线，交椭圆于 A,B 两点，若 $AB=2$，则 $|k|=$______.

22. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，该椭圆上存在两点 A,B，使得 $\overrightarrow{F_1A}=3\overrightarrow{F_2B}$，则该椭圆的离心率的取值范围是______.

23. 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F_1，过 F_1 的直线 l 交椭圆 E 于 A、B 两点，点 Q 的坐标为 $(-\dfrac{9}{2},0)$. 若 $\overrightarrow{QB}\perp\overrightarrow{AB}$，求直线 l 的斜率.

24. 设 F 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左焦点，过点 F 且斜率为正的直线 l 与 E 交于 A、B 两点，过点 A、B 分别作直线 AM 和 BN 满足 $AM\perp l$，$BN\perp l$，且直线 AM、BN 分别与 x 轴相交于 M 和 N. 试求 $|MN|$ 的最小值.

25. 设 P 是椭圆 $2x^2+3y^2=1$ 上的一点，F_1、F_2 是该椭圆的两个焦点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为______.

26. 设 F_1、F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，若椭圆 C 上存在一点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，则椭圆离心率 e 的取值范围为______.

27. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为该椭圆上一点，满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 2，则 b 的值为______.

28. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过椭圆的右焦点，作一条直线 l 交椭圆于点 P、Q，则 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆面积的最大值是______.

29. 设 F_1、F_2 为椭圆 C 的两个焦点，若 AB 为椭圆的一条过点 F_2 的弦，且在 $\triangle F_1AB$ 中，$|F_1A|=3$，$|AB|=4$，$|BF_1|=5$，则 $\tan\angle F_2F_1B$=______.

30. 已知定长为 4 的线段 AB 的两端点，分别在两条相交直线 $x\pm 2y=0$ 上移动.

    (1) 设线段 AB 中点为 G，求点 G 的轨迹 C 的方程；

    (2) 若由点 P 向曲线 C 作出的两条切线互相垂直. 求证：动点 P 在定圆上.

31. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两条互相垂直的切线的交点轨迹为 C，曲线 C 的两条切线 PA, PB 交于点 P，且与 C 分别切于 A, B 两点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值.

32. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，M 是圆 $x^2+y^2=3$ 上的任意一点，MA, MB 分别与椭圆 C 切于点 A, B. 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围。

33. 已知 P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 上的任意一点.EF 为 $\odot N:(x-1)^2+y^2=4$ 的任一条直径. 则 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的取值范围是______.

34. 设 F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点,A 是该椭圆上位于第一象限的点. 过 A 作圆 $x^2+y^2=b^2$ 的切线, 切点为 P. 则 $|AF|-|AP|=$______.

35. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，直线 l 交椭圆 G 于 A、B 两点，且 $|AB|=2$，判断直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系，并给出证明.

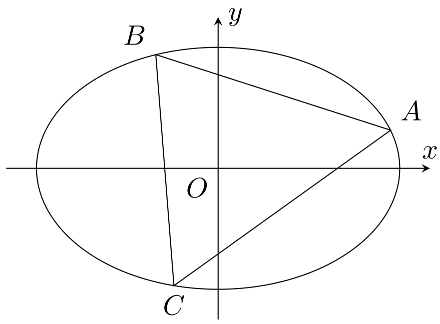
36. 已知实数 x, y 满足 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，则 $P=|2x+y-4|+|4-x-2y|$ 的取值范围是______.

37. 在平面直角坐标系 xOy 中，设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $l:x+y-3a=0$ 若椭圆 E 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，原点 O 到直线 l 的距离为 $3\sqrt{2}$.

    (1) 求椭圆 E 与直线 l 的方程；

    (2) 若椭圆 E 上三点 $P, A(0,b), B(a,0)$ 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2, d_3，求证：d_1, d_2, d_3 可以是某三角形三条边的边长.

38. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点在椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上, 坐标原点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心. 试求 $\triangle ABC$ 的面积.



39. 设 A，B 是椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个动点，O 是坐标原点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. 又设 P 点在 AB 上，且 $OP\perp AB$. 求 $|OP|$ 的值.

40. 设 A、B 是椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上的两个动点，且 $OA\perp OB$（O 为坐标原点）. 则 $|AB|$ 的最大值和最小值的乘积为______.

41. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上不同的三点 $A(x_1,y_1)$,$B(4,\dfrac{9}{5})$,$C(x_2,y_2)$ 到椭圆右焦点的距离依次成等差数列，线段 AC 的中垂线 l 交 x 轴于点 T，求直线 BT 的方程.

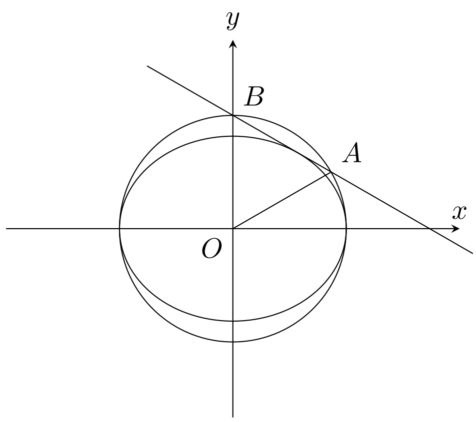
42. 若直线 $6x-5y-28=0$ 交椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,$ 且 a,b 为整数) 于 A、C，设 $B(0,b)$ 为椭圆的上顶点，而 $\triangle ABC$ 的重心为椭圆的右焦点 F_2，则椭圆的方程为______.

43. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 对于任意实数 k, 下列直线被椭圆 E 所截弦长与 $l:y=kx+1$ 被椭圆 E 所截得的弦长不可能相等的是____________. （$kx+y+k=0,kx-y-1=0,kx+y-k=0,kx+y-2=0$）

44. 已知 A 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的上顶点，B、C 为该椭圆上的另外两点，且 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形. 若满足条件的 $\triangle ABC$ 只有一解，则椭圆的离心率的取值范围是______.

45. 已知点 P 为直线 $x+2y=4$ 上一动点，过点 P 作椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A,B，当点 P 运动时，直线 AB 过定点的坐标是______.

46. 如图，已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 与 y 轴正半轴交于点 B，过点 B 的直线与椭圆 E 相切，且与圆 O 交于另一点 A，若 $\angle AOB=60^\circ$，则椭圆 E 的离心率为______.



47. 设椭圆 C 的左、右顶点为 $A, B(a, 0)$, 过右焦点 $F(1, 0)$ 作非水平直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2, 试证:$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值, 并求此定值 (用 a 的函数表示).

10.2 双曲线及其方程

10.2.1 双曲线的定义及其方程

我们先给出双曲线的第一定义，它在形式上是和椭圆的第一定义相对应的.

定义 10.3 (双曲线的第一定义). 称平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之差为常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹称为**双曲线**.

回顾图10.1，当平面圆锥的轴所成的角 θ 满足 $0° < \theta < 90° - \alpha$ 时，平面截对顶圆锥所得的曲线是双曲线. 双曲线分两支，两支分别在两个对顶圆锥中. 感兴趣的读者可以仿照椭圆第一定义的引入，构造 Dandelin 双球从而给出双曲线第一定义的背景，此处不再赘述.

同样地, 我们用解析几何的方法建立双曲线的方程. 设两定点的坐标为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$, 点 $P(x, y)$ 到 F_1 和 F_2 的距离之差为 $2a(0 < a < c)$，则问题转化为求 P 的轨迹方程. 根据定义:

$$|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a.$$

经过化简可得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

记 $b^2 = c^2 - a^2 (b > 0)$，我们就得到了双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0).$$

双曲线分两支，称为左支和右支，其图像如图10.21所示.

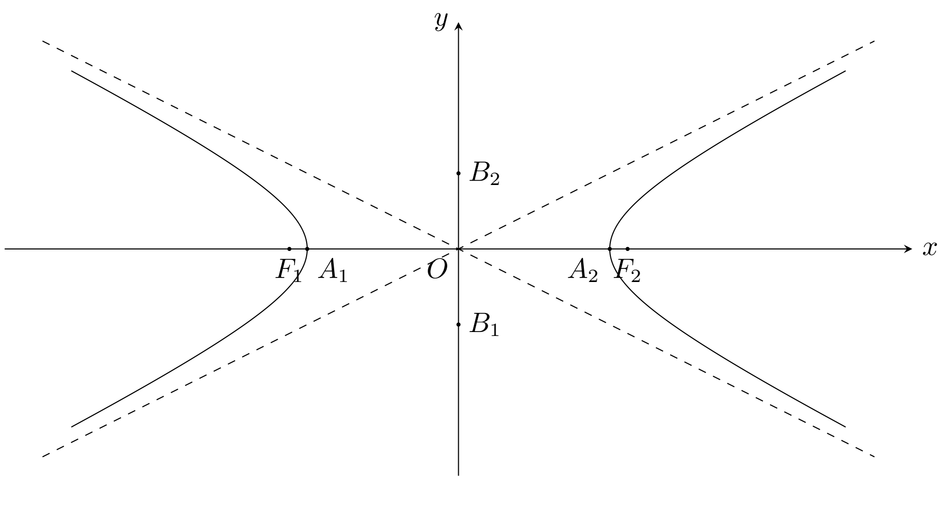


图 10.21: 双曲线

我们把双曲线定义中的两个定点 F_1, F_2 称为双曲线的**左焦点**和**右焦点**. 称双曲线与 x 轴的两个交点为双曲线的**左顶点**和**右顶点**，称左顶点和右顶点之间的线段为椭圆的**实轴**.

显然，双曲线和 y 轴没有交点. 我们称点 $B_2(0,b)$ 和 $B_1(0,-b)$ 之间的线段为双曲线的**虚轴**，B_1 和 B_2 为虚轴的端点. 虚轴端点具有这样的性质：

命题 10.2. *虚轴端点与实轴端点的连线长度等于双曲线的半焦距长 c.*

证明. 例如考虑直角三角形 $\triangle B_2OA_2$ 的勾股定理，有 $|B_2A_2| = \sqrt{|OB_2|^2+|OA_2|^2} = \sqrt{a^2+b^2} = c$. 易知 A_2B_1, A_1B_2, A_1B_1 的长度也等于 c. □

双曲线有两条**渐近线**. 我们称直线 $y = \pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线，如图10.21所示. 对此可以这样理解：由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$|y| = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$

当 x 充分大时，$\frac{x^2}{a^2} \gg 1$，因此 $|y| \approx \frac{b}{a}x$，即当 x 趋于 ∞ 时，双曲线将无限接近 $y = \pm\frac{b}{a}x$.[1]

与椭圆一样，根据恒等式 $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$ 可知双曲线也有参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta}, \\ y = b\tan\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta < 2\pi, \theta \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$$

双曲线的参数方程在讨论具体问题时应用较少.

例 10.12. *已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点，过点 F 的直线与圆 $x^2+y^2=\frac{c^2}{2}$ 交于 A, B 两点 (A 在 F, B 之间)，与双曲线在第一象限的交点为 T，O 是坐标原点. 如果 $FA = BT$，$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$，则双曲线的离心率为__________________.*

解. 如图10.22所示，因为 $OA = OB$，$OA \perp OB$，所以 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形. 过点 O 作 AB 的垂线，垂足为 H，则 $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}c\sin 45^\circ = \frac{1}{2}c$，所以 $\sin\angle OAT := \theta = \frac{OH}{OF} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$.

因为 $AF = BT$，所以 OH 垂直平分 FT，所以 $OT = OF = c$，设右焦点为 F'，则 $\angle FTF' = \frac{\pi}{2}$ (T 点对应的焦点三角形是直角三角形)，所以

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{2c\cos\theta - 2c\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta-\sin\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}} = 1+\sqrt{3}.$$

♡

下面我们讨论双曲线的第二定义和极坐标方程，处理这些问题的思路与椭圆中的相应问题是一模一样的.

考虑双曲线 $\Gamma : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，我们把直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 称为双曲线的**左准线**，直线 $x = -\frac{a^2}{c}$ 称为双曲线的**右准线**.

---

[1] 实际上渐近线的斜率就是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$，这里该极限值是 $\pm\frac{b}{a}$.

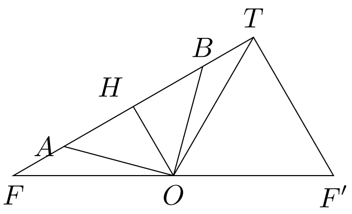


图 10.22:

定义 10.4 (双曲线的第二定义). 平面上到定点 F 的距离与到定直线的距离之比为常数 e 的点的集合就是双曲线. 其中，定点不在定直线上，且 $e > 1$.

我们把这个常数 e 叫做双曲线的**离心率**.

这里的定点和定直线就是焦点和对应的准线（左焦点对应左准线，右焦点对应右准线）. 由此可见，双曲线和椭圆的第二定义是完全一样的，唯一的区别是双曲线的离心率 $e > 1$ 而椭圆的离心率 $e < 1$ 且 > 0.

读者可以自己验证双曲线的第二定义和第一定义的等价性. 事实上，离心率 $e = \dfrac{c}{a} > 1$（注意 $c > a$）.

接下来我们推导双曲线的极坐标方程，双曲线的极坐标方程和椭圆除 e 的范围不同外别无二致. 设双曲线的准焦距为 p，则 $p = c - \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{b^2}{c}$. 不妨以左焦点 F_1 为极点，则双曲线左支上一点 P 的极径 ρ 就是焦半径 $|PF_1|$ 的长度. 注意到焦准距 p 等于 $|PF_1|$ 上的投影长度和 P 到左准线的距离之和，根据双曲线的第二定义，P 到准线的距离为 $\dfrac{\rho}{e}$，因此我们有:

$$\rho\cos\theta + \frac{\rho}{e} = p.$$

整理得

$$\rho = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

其中 ρ 是 P 点的极径，θ 为 P 点的极角.

可见，若以 F_1 为极点，则双曲线左支的极坐标方程和以右焦点为极点时椭圆的极坐标方程的形式一样，事实上，这两个问题具有相同的构图，参考图10.23和图10.11.

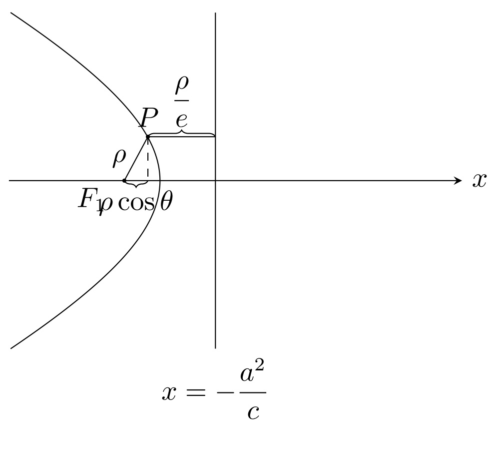


图 10.23: 双曲线的极坐标方程

同样，若以 F_2 为极点，则双曲线右支的极坐标方程和以左焦点为极点时椭圆的极坐标方程形式一样，即

$$|PF_2|_{P\text{ 点在右支上}} = \frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

在双曲线中还有两种情况，即以左焦点 F_1 为极点时右支的极坐标方程和以右焦点 F_2 为极点时左支的极坐标方程. 以前者为例，该问题的图像为：

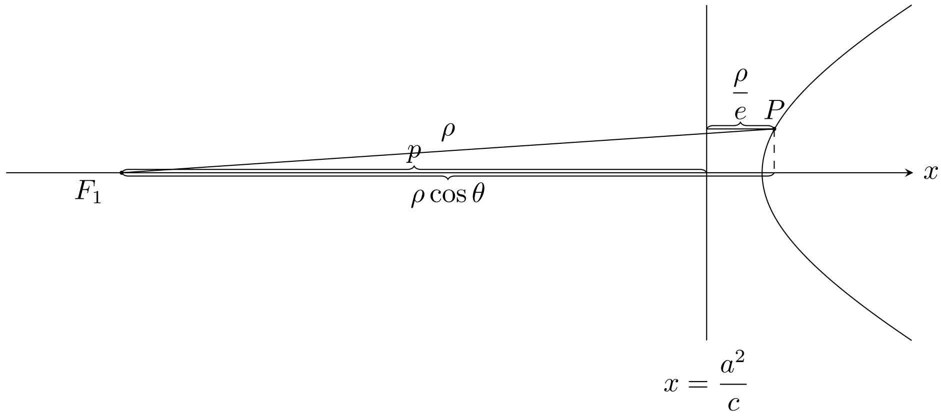


图 10.24: 以 F_1 为极点，双曲线右支的极坐标方程

我们有

$$\rho\cos\theta = \frac{\rho}{e} + p.$$

即 $\rho = -\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$.

同理，如果以 F_2 为极点，则双曲线左支的极坐标方程为

$$\rho = -\frac{ep}{1+e\cos\theta}.$$

我们可以把上述结果总结成表10.1，方便读者记忆.

表 10.1: 双曲线的焦半径公式（极坐标形式）

	以左焦点 F_1 为极点	以右焦点 F_2 为极点
P 点在左支上	$\lvert PF_1\rvert_{P\text{ 在左支上}} = \dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$	$\lvert PF_2\rvert_{P\text{ 在左支上}} = -\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$
P 点在右支上	$\lvert PF_1\rvert_{P\text{ 在右支上}} = -\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$	$\lvert PF_2\rvert_{P\text{ 在右支上}} = \dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$

例 10.13 (**双曲线系方程**). 这个例子讨论双曲线系方程.

已知双曲线 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a>0, b>0)$.

(1) 与 Γ 共焦点的双曲线系方程. 设其方程为 $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2} - \dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2} = 1$. 因为其焦点为 $(c,0)$ 和 $(-c,0)$，所以 $\widetilde{a}^2 + \widetilde{b}^2 = a^2 + b^2$，所以与 Γ 共焦点的双曲线系方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1.(-a^2 < \lambda < b^2)$$

(2) 与 Γ 离心率相同的双曲线系方程（焦点在 x 轴上）. 设其方程为 $\dfrac{x^2}{\widetilde{a}^2}-\dfrac{y^2}{\widetilde{b}^2}=1$，则满足约束条件 $\dfrac{\widetilde{b}^2}{\widetilde{a}^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$.，所以与 Γ 离心率相同（焦点在 x 轴上）的双曲线系方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k(k>0).$$

(3) 与 Γ 共渐近线的双曲线系方程.

① 若焦点在 x 轴上，则共渐近线等价于共焦点，即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k(k>0).$$

② 若焦点在 y 轴上，设方程为 $\dfrac{y^2}{\widetilde{a}^2}-\dfrac{x^2}{\widetilde{b}^2}=1$，其渐近线方程为 $x=\pm\dfrac{\widetilde{b}^2}{\widetilde{a}^2}y$ 即 $y=\pm\dfrac{\widetilde{a}^2}{\widetilde{b}^2}x$，所以 $\dfrac{\widetilde{a}^2}{\widetilde{b}^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，即

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}=1.$$

上式可以改写成 $(e^2-1)(\widetilde{e}^2-1)=1$，化简得 $e^2+\widetilde{e}^2=e^2\widetilde{e}^2$. 即，焦点在不同的坐标轴上且共渐近线的两条双曲线的离心率的平方之和等于离心率的平方之积.

特别地，我们称实虚轴互换，即形如 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ 的一对双曲线互为**共轭双曲线**. 显然，共轭双曲线一定共渐近线. 称实轴和虚轴长度相同的双曲线**等轴双曲线**，反比例函数的图像即曲线 $xy=k(k\neq 0)$ 就是等轴双曲线.

10.2.2 双曲线的几何性质

双曲线和椭圆的几何性质有很多是完全对应的关系，因此，在这一节中举的例子可以和10.1.3节中的相应内容放在一起学习.

我们称双曲线上的点到焦点之间的线段为双曲线的焦半径. 由双曲线的第一定义，双曲线上一点 P 到 F_1 和 F_2 的距离之差为定值 $2a$，即

$$||PF_1|-|PF_2||=2a.$$

双曲线的焦点弦有同支、异支两种情况. 先考虑同支弦，同支弦的构图与椭圆的焦点弦一样，如图10.25所示（以右焦点为例），根据双曲线的极坐标方程

$$|AF_2|=\frac{ep}{1-e\cos\theta_A},\theta_A=\angle AF_2X,|BF_2|=\frac{ep}{1-e\cos\theta_B},\theta_B=\angle BF_2X.$$

因为 F 在直线 AB 上，所以 $\angle AF_2X+\angle BF_2X=\pi$，$\cos\theta_A+\cos\theta_B=0$. 记 $\theta_A=\theta$，则此时焦点弦的长度可按下式计算

$$|AB|=\frac{ep}{1-e\cos\theta}+\frac{ep}{1+e\cos\theta}=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

可见，双曲线的同支焦点弦长公式和椭圆的一致.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 即 AB 所在直线与实轴垂直时，同支焦点弦的长度最短. 我们称与实轴垂直的焦点弦为双曲线的通径，其长度为 $2ep=2\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{2b^2}{a}$.

对于异支焦点弦，如图10.26所示，AB 所在直线经过右焦点，设 $\angle AF_2X=\angle BF_2X=\theta$，则由双曲线的极坐标方程可知

$$|AF_2|=-\frac{ep}{1+e\cos\theta},|BF_2|=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

所以 $|AB|=|AF_2|-|BF_2|=-\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}-\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}=-\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}$.

当 $\cos\theta=1$ 时，异支焦点弦的长度取得最小值，最小值为 $\dfrac{-2ep}{1-e^2}=2a$. 事实上，最短的异支焦点弦就是实轴.

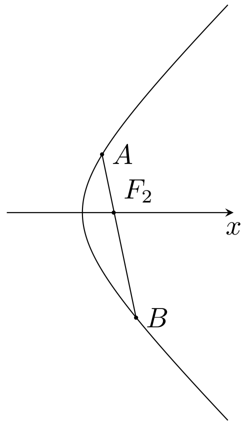


图 10.25: 同支焦点弦

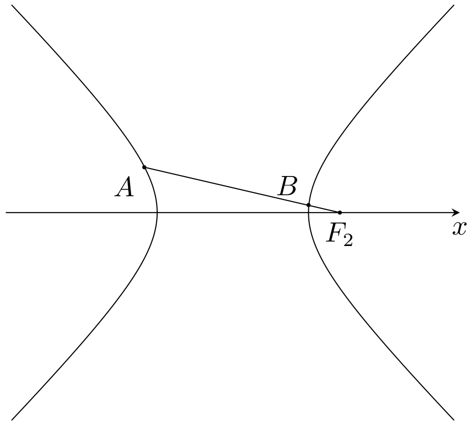


图 10.26: 异支焦点弦

以上结果可以总结为，双曲线的焦点弦长为 $|\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}|$，当焦点弦是同支弦时，取正号，当焦点弦是异支弦时，取负号.

例 10.14. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，过左焦点 F 的直线 l 与双曲线交于 A,B 两点. 若使 $|AB|=m$ 的直线 l 恰有三条，则 $m=$ __________________.

解. 双曲线的焦点弦长为 $|AB|=f(\theta)=|\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}|$，实轴长为 $2\sqrt{2}$，通径长为 $\dfrac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$. 使焦点弦长为 m 的直线恰有三条，等价于恰有三个不同 $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in[0,\pi)$，使 $f(\theta_i)=m(i=1,2,3)$. 作出 f 的大致图像如图10.27所示，分析可知只有当 $m=2\sqrt{2}$ 即实轴长时满足条件. 故 $m=2\sqrt{2}$. ♡

评注 10.14.1. 有兴趣的读者还可以思考这样的问题:

(1) 若使得 $|AB|=m$ 的直线 l 恰有两条，求 m 的取值范围.

(2) 若使得 $|AB|=m$ 的直线 l 恰有四条，求 m 的取值范围.

例 10.15 (焦点三角形). 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，考虑双曲线上一点 P（与顶点不重合）与两个焦点 F_1,F_2 构成的三角形 PF_1F_2. 记 P 张 F_1F_2 的角为 α，求焦点三角形的面积.

解. 由余弦定理，

$$(|PF_1|-|PF_2|)^2=|F_1F_2|^2+2|PF_1||PF_2|(\cos\theta-1),$$

即

$$4a^2=4c^2+2|PF_1||PF_2|(\cos\theta-1).$$

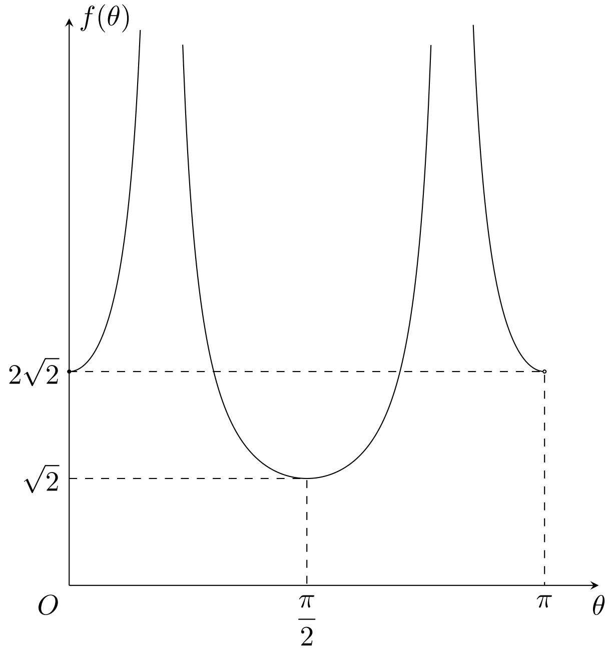


图 10.27: $f(\theta)=|\dfrac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}|$ 的大致图像

$$\begin{aligned} S_{\triangle PF_1F_2} &= \frac{1}{2}\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2-4c^2}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \\ &= b^2\cdot\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-(1-\tan^2\frac{\theta}{2})}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

♡

评注 10.15.1. 这是椭圆的焦点三角形面积公式 $S=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$. 在双曲线中的对应结论.

例 10.16. (1) 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，点 P 为 C 右支上一点，且不与 C 的右顶点重合，则下列命题中，正确的是 (　　　　　　).

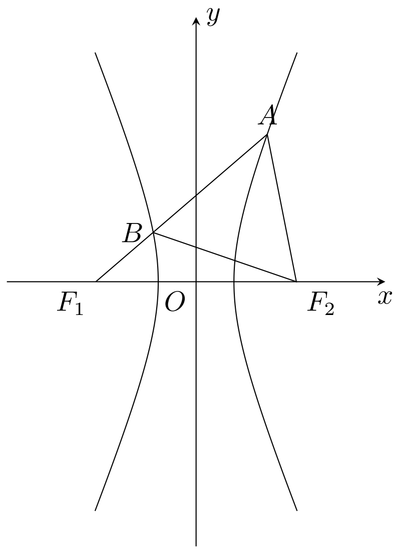
(A) 若 $a=3,b=2$，则 C 的两条渐近线的方程为 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$

(B) 若点 P 的坐标是 $(2,4\sqrt{2})$，则 C 的离心率可能为 3

(C) 若 $PF_1\perp PF_2$，则三角形 F_1PF_2 的面积等于 b^2

(D) 若 C 是等轴双曲线，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$

(2) 如图，F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过左焦点 $F_1(-\sqrt{7},0)$ 的直线 l 与双曲线分别交于点 A,B. 若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形，则双曲线的方程为 ____________.



(1) 解. 当 $a=3,b=2$ 时，双曲线的两条渐近线是 $y=\pm\frac{2}{3}x$.

因为点 $(2,4\sqrt{2})$ 在双曲线上，所以 $\frac{4}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1$，化简得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{4}+8$，离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{9+\frac{b^2}{4}}>3$，所以 C 的离心率不可能为 3.

当 $PF_1\perp PF_2$ 时，$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=b^2\tan\frac{\pi}{4}=b^2$.

若 C 是等轴双曲线，则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a$，所以 $|F_1F_2|=2\sqrt{2}a$. 因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ 且 $|PF_1|=2|PF_2|$，所以 $|PF_1|=4a,|PF_2|=2a$. 在三角形 F_1PF_2 中，由余弦定理，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{16a^2+4a^2-8a^2}{2\times 4a\times 2a}=\frac{3}{4}$.

所以，本题选 BC. ♡

(2) 解. 由双曲线的第一定义，$|AF_1|-|AF_2|=2a$. 因为 $|AF_2|=|AB|$，所以 $|AF_1|-|AB|=|BF_1|=2a$. 再由双曲线的第一定义可知，$|BF_2|=|BF_1|+2a=2a+2a=4a$. 在三角形 BF_1F_2 中，$\angle F_1BF_2=120^\circ$, 由余弦定理知 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1||BF_2|\cos 120^\circ=4a^2+16a^2+2\times 2a\times 4a=28a^2$, 即 $a^2=\frac{1}{7}c^2$. 因为 $F_1(-\sqrt{7},0)$, 所以 $c=\sqrt{7}$, 所以 $a=1$, 所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{6}$. 所以双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{6}=1$. ♡

关于双曲线焦点三角形的内切圆，我们有如下结论：

命题 10.3. 焦点三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆 I 的圆心在定直线 $x=a$ 上，切点是双曲线的左顶点或右顶点.

证明. 如图10.28所示，设 G,H,A 为切点. 由切线长定理 $|PG|=|PH|,|HF_2|=|AF_2|,|GF_1|=|AF_1|$，因为 $|AF_1|=|GF_1|=|PF_1|-|PG|=|PF_1|-|PH|=|PF_1|-(|PF_2|-|HF_2|)=|PF_1|-|PF_2|+|AF_2|=2a+2c-|AF_1|$，所以 $|AF_1|=a-c$，所以 A 点的坐标为 $(a,0)$. □

评注 10.16.1. 这个命题可以和椭圆焦点三角形的旁切圆的相关结论放在一起学习.

例 10.17 (旋转角相互垂直，内准圆). 已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其离心率 $e>\sqrt{2}$. 双曲线上两点 S,T 满足 $OS\perp OT$，设 $OS=\rho_1$，$OT=\rho_2$，证明：弦 ST 与定圆相切，并求该圆的方程.

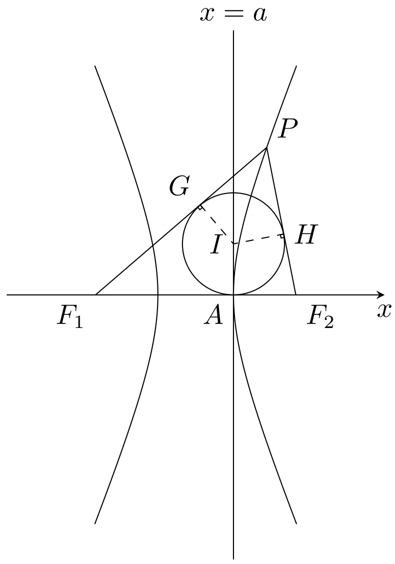


图 10.28: 焦点三角形的内切圆

评注 10.17.1. 这个例子可以和椭圆的内准圆的那个例子放在一起学习.

证明. 以原点为极点，x 轴正方向为极轴建立极坐标. 设 S 的直角坐标为 $(\rho_1\cos\theta, \rho_1\sin\theta)$，$T$ 的直角坐标为 $(-\rho_1\sin\theta, \rho_1\cos\theta)$，代入双曲线方程得

$$\begin{cases}\dfrac{\rho_1^2\cos^2\theta}{a^2}-\dfrac{\rho_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1,\\ \dfrac{\rho_2^2\sin^2\theta}{a^2}-\dfrac{\rho_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1.\end{cases}$$

化简（化简技巧和椭圆的那个例子相同，此出省略）得到

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}.(\text{因为 } e>\sqrt{2}\text{，所以 } a<b).$$

所以 $\dfrac{\rho_1^2+\rho_2^2}{(\rho_1\rho_2)^2}=\dfrac{b^2-a^2}{(ab)^2}$.

所以点 O 到弦 ST 的距离 $d=\dfrac{2S_{\triangle OST}}{ST}=\dfrac{|OS|\cdot|OT|}{|ST|}=\dfrac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

所以 ST 与定圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 相切. 我们也把这个圆称为双曲线的内准圆. 可见，椭圆和双曲线的内准圆在形式上是完全一样的. □

例 10.18 (双曲线的顶点三角形). 已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，设实轴的端点为 A_1,A_2，考虑椭圆上的一点 P（不是实轴端点）与实轴形成的三角形 A_1PA_2.

(1) 证明 $k_{A_1P}\cdot k_{A_2P}=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$;

(2) 现在考虑一般情况下的顶点三角形，设经过原点的直线与双曲线交于 M,N 两点，考虑双曲线上一点 P（不是实轴端点），证明 $k_{MP}k_{NP}=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

证明. (1) 设 $P(\dfrac{a}{\cos\theta}, b\tan\theta)$，则

$$k_{A_1P}=\frac{b\tan\theta}{\frac{a}{\cos\theta}+a}=\frac{b\sin\theta}{a+a\cos\theta}, k_{A_2P}=\frac{b\tan\theta}{\frac{a}{\cos\theta}-a}=\frac{b\sin\theta}{a-a\cos\theta}.$$

所以 $k_{A_1P}k_{A_2P}=\dfrac{b^2\sin^2\theta}{a^2-a^2\cos^2\theta}=\dfrac{b^2\sin^2\theta}{a^2\sin^2\theta}=\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1.$

评注 10.18.1. 这个结果和椭圆的顶点三角形的相应结论完全一样，都是斜率之积等于 e^2-1，但是在这里 $e^2-1=\dfrac{b^2}{a^2}$，而在椭圆中 $e^2-1=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

(2) 设 $M(\dfrac{a}{\cos\varphi},b\tan\varphi)$，由双曲线的中心对称性，$N(-\dfrac{a}{\cos\varphi},-b\tan\varphi)$. 则

$$k_{PM}=\frac{b\tan\theta-b\tan\varphi}{\frac{a}{\cos\theta}-\frac{a}{\cos\varphi}}.$$

$$k_{PN}=\frac{b\tan\theta+b\tan\varphi}{\frac{a}{\cos\theta}+\frac{a}{\cos\varphi}}.$$

所以

$$k_{PM}k_{PN}=\frac{b^2(\tan^2\theta-\tan^2\varphi)}{a^2(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\varphi})}=\frac{b^2(\tan^2\theta-\tan^2\varphi)}{a^2[(1+\tan^2\theta)-(1+\tan^2\varphi)]}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1.$$

□

习题 10.2

1. 若双曲线 L 的两个焦点恰是椭圆 $T:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两个顶点，而双曲线 L 的两个顶点恰是椭圆 T 的两个焦点，则双曲线 L 的方程为______.

2. 已知一双曲线的两条渐近线方程为 $x-\sqrt{3}y=0$ 和 $\sqrt{3}x+y=0$ ，则它的离心率是______.

3. 已知以直线 $y=\pm 2x$ 为渐近线的双曲线，经过直线 $x+y-3=0$ 与 $2x-y+6=0$ 的交点，则双曲线的实轴长为______.

4. 若 P 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$ 右支上一点，M、N 分别是圆 $(x+4)^2+y^2=4$ 和 $(x-4)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为______.

5. 双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为 F，P 为其左支上任意一点，点 A 的坐标为 $(-1,-1)$，则 $\triangle APF$ 周长的最小值为______.

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$A_1,A_2$ 是实轴顶点，F 是右焦点，$B(0,b)$ 是虚轴端点，若在线段 BF 上（不含端点）存在不同的两点 $P_i(i=1,2)$，使得 $\triangle P_iA_1A_2(i=1,2)$ 构成以 A_1A_2 为斜边的直角三角形，则双曲线离心率 e 的取值范围是______.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-6y+5=0$ 没有公共点，则该双曲线离心率的取值范围是______.

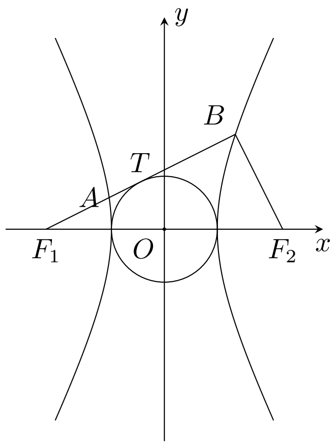
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点，P 是双曲线右支上一点，M 是 PF_2 的中点，且 $OM\perp PF_2, 3PF_1=4PF_2$ ，则双曲线的离心率为______.

9. 已知焦点在 x 轴上的双曲线的渐近线过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 和椭圆 $\dfrac{ax^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(0<a\le 1)$ 的交点，则双曲线的离心率的取值范围是______.

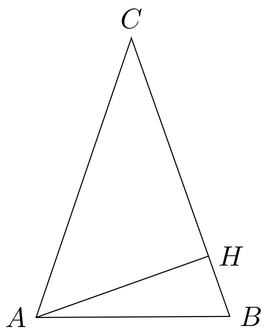
10. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 只有一个公共点. 则双曲线的离心率为______.

11. 已知双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，其上一个焦点为 $F(c,0)$. 如果顶点 $B(0,b)$ 使得 BF 垂直于该双曲线的一条渐近线，则此双曲线的离心率为______.

12. 在直角平面坐标系 xOy 中，F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，与双曲线左、右两支分别交于点 A,B，若 $F_2B=AB$，则 b 的值是______.

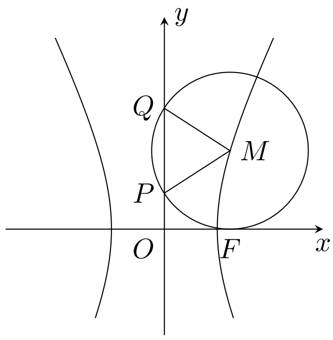


13. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$，则过点 C，以 A、H 为两焦点的双曲线的离心率为______.



14. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>1,b>1)$ 的焦距为 $2c$，直线 l 过点 $(a,0)$、$(0,b)$ 且点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离与点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离之和 $S\geq\dfrac{4c}{5}$，则双曲线的离心率 e 的取值范围是______.

15. 如图，以双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 M 为圆心的圆与 x 轴恰好相切于双曲线的一个焦点 F，且与 y 轴交于 P、Q 两点. 若 $\triangle MPQ$ 为正三角形，则该双曲线的离心率是______.



16. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为为 F_1、F_2，A 是双曲线渐近线上的一点，$AF_2 \perp F_1F_2$，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$，则双曲线的离心率为______.

17. 圆锥曲线 $\sqrt{x^2+y^2+6x-2y+10}-|x-y+3|=0$ 的离心率是______.

18. 椭圆 $x^2+ky^2=1$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 有相同的准线，则 k 等于______.

19. 若双曲线 L_1 的两个焦点分别是椭圆 $L_2:\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ 的两个顶点，而双曲线 L_1 的两条准线分别通过椭圆 L_2 的两个焦点，则双曲线 L_1 的方程是______.

20. 已知 A,B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在双曲线上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 $120°$，则双曲线的离心率为______.

21. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F，离心率为 e，过点 F 且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线与该双曲线交于点 A、B，若 AB 的中点为 M，且 $|FM|$ 等于半焦距，则 e=______.

22. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线交双曲线右支于 P,Q 两点，且 $PQ\perp PF_1$，若 $|PQ|=\dfrac{5}{12}|PF_1|$，则双曲线的离心率为______.

23. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 在第二象限的交点为 P，若双曲线的离心率为 5，则 $\cos\angle PF_2F_1$ 等于______.

24. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2, 过点 F_1 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线, 与双曲线的右支交于点 P , 且 $\angle F_1PF_2=45°$. 则双曲线的离心率为______.

25. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 是过 F_2 且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线与双曲线的一个交点. 若 $\triangle F_1F_2A$ 为等腰直角三角形，则双曲线的离心率为______.

26. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，若双曲线右支上存在一点 P，使得 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，其中 O 为坐标原点，且 $|\overrightarrow{PF_1}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{PF_2}|$，则该双曲线的离心率为______.

27. 已知 F_1,F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=60°$, 则该椭圆和双曲线的离心率之积的最小值是______.

28. 已知椭圆 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与双曲线 $C_2: \dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 有相同的焦点 F_1、F_2，其中 F_1 为左焦点，点 P 为两曲线在第一象限的交点，e_1、e_2 分别为曲线 C_1、C_2 的离心率. 若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，则 e_2-e_1 的取值范围为______.

29. 已知点 P 在离心率为 $\sqrt{2}$ 的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，F_1,F_2 为双曲线的两个焦点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径 r 与外接圆半径 R 之比为______.

30. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C: \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线 C 上，G,I 分别为 $\triangle F_1PF_2$ 的重心、内心，若 $GI//x$ 轴，则 $\triangle F_1PF_2$ 的外接圆半径 $R=$______.

31. 已知 F_1、F_2 为双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$ 的左、右焦点，P 为双曲线 C 上一点，且点 P 在第一象限. 若 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{4}{3}$，则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径为______.

32. 已知 P 为双曲线 $C: \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点，F_1,F_2 为双曲线 C 的左、右焦点，M,I 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心、内心，若 $MI\perp x$ 轴，则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为______.

33. 若 $P(x,y)$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的点，则 $|x-y|$ 的最小值是______.

34. 对所有满足 $1\le n\le m\le 5$ 的 m、n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数为______.

35. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F，过点 F 的直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点，若 $OF\cdot AB=FA\cdot FB$，求双曲线 C 的离心率 e.

36. (1) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心为 O, 其上两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 满足 $\overrightarrow{OP_1}\perp\overrightarrow{OP_2}$. 证明：$\dfrac{1}{|\overrightarrow{OP_1}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OP_2}|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

    (2) 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的中心为 O，其上两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 满足 $\overrightarrow{OP_1}\perp\overrightarrow{OP_2}$. 问：是否 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{OP_1}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{OP_2}|^2}$ 为常数？如果是，请给出该常数（不必证明），否则举出反例.

37. 已知过点 $P(3,0)$ 斜率为 k 的直线 l 交双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 右支于 A、B 两点，F 为双曲线 C 的右焦点，且 $|AF|+|BF|=16$，求 k 的值.

10.3 抛物线及其方程

10.3.1 抛物线的定义及其方程

定义 10.5. 平面内到一定点和一定直线（不经过该定点）的距离相等的点的轨迹就是**抛物线**. 其中，该定点被称为抛物线的**焦点**，该定直线被称为抛物线的**准线**.

该定义和椭圆、双曲线的第二定义形式一致，从这种意义上来说，我们可以认为抛物线的离心率为 1，圆锥曲线第二定义的形式是统一的.

我们取经过焦点且垂直于准线的直线为 x 轴，设垂足为 K，取 KF 的中点为原点建立平面直角坐标系. 设线段 KF 的长度 $|KF| = p(p > 0)$，这个参数 p 就是抛物线的**焦准距**，那么焦点 F 的坐标就是 $(\frac{p}{2}, 0)$，准线的方程就是 $x = -\frac{p}{2}$.

设 $M(x, y)$ 是抛物线上一点，根据抛物线的定义

$$|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

将上式平方再化简，得

$$y^2 = 2px(p > 0).$$

从上述过程可以看到抛物线上任意一点的坐标 (x, y) 都是方程 $y^2 = 2px$ 的解，且方程 $y^2 = 2px$ 的所有解都满足 $|MH| = |MF|$（即方程的所有解都在抛物线上）. 我们将这个方程叫做抛物线的**标准方程**，它表示焦点在 x 轴的正半轴、焦点是 $(\frac{p}{2}, 0)$，准线是 $x = -\frac{p}{2}$ 的抛物线.

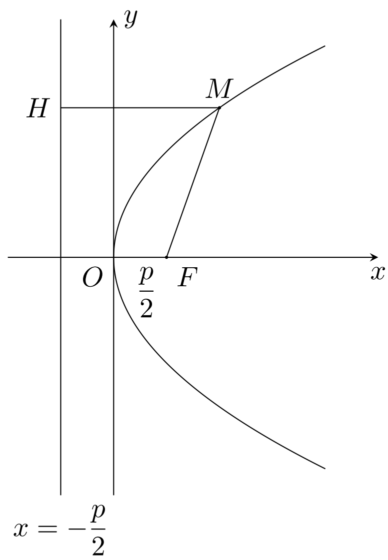


图 10.29: 抛物线的图像

正如在建立椭圆、双曲线的标准方程时，选择不同的坐标系我们会得到不同形式的方程，抛物线的标准方程也有多种形式.$y^2 = 2px, y^2 = -2px, x^2 = 2py, x^2 = -2py(p > 0)$ 都是抛物线的标准方程，其中 p 表示抛物线的焦准距.

例 10.19. 二次函数 $y = ax^2(a \neq 0)$ 的图像是以 $|\frac{1}{2a}|$ 为焦准距的抛物线.

根据抛物线的定义，我们同样可以建立极坐标方程. 如图，以 F 为极点，则 $\rho\cos\theta + p = \rho$，解得

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}.$$

这就是抛物线的极坐标方程，可见其形式和其他圆锥曲线完全一致，只不过这里的离心率 $e = 1$.

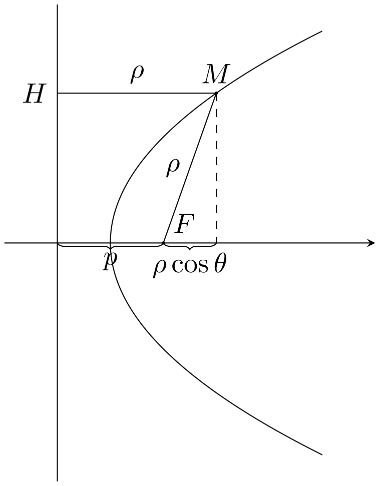


图 10.30: 抛物线的极坐标方程

抛物线的标准方程 $y^2 = 2px$ 给出 $x = \dfrac{y^2}{2p}$，因此抛物线 $y^2 = 2px$ 也可以看成是由参数方程 $\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p}, \\ y = y, \end{cases}$ (y 为参数，$y \in \mathbb{R}$) 给出的.

10.3.2　抛物线的几何性质

我们称抛物线上一点和抛物线的焦点之间的线段为抛物线的**焦半径**. 根据抛物线的定义，焦半径 MF 的长度等于 M 到准线 $x = -\dfrac{p}{2}$ 的距离，所以

$$|MF| = |MH| = x_M + \frac{p}{2}.$$

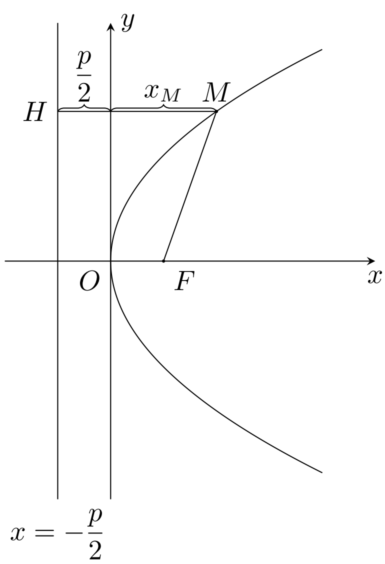


图 10.31: 抛物线的焦半径

如果不知道 M 的横坐标，只知道 MF 所在直线的倾斜角，则可以选用极坐标方程来计算焦半径的长度.

$$|MF| = \frac{p}{1-\cos\theta}.$$

抛物线的焦点弦长度也可以用和其他圆锥曲线完全一样的方式来计算，如图所示，焦点弦 AB 的长度为

$$|AB| = |AF| + |BF| = \frac{p}{1-\cos\theta} + \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{2p}{1-\cos^2\theta} = \frac{2p}{\sin^2\theta}.$$

其中 θ 表示 AB 所在直线的倾斜角. 由此可见

$$|AB|_{\min} = \left.\frac{2p}{\sin^2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2p.$$

此时 AB 所在直线倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，即 AB 与 x 轴垂直，我们将与 x 轴垂直的焦点弦称为抛物线的**通径**. 通径是最短的焦点弦. 事实上，将 $x = \dfrac{p}{2}$ 代入抛物线的标准方程可得 $y^2 = 2p \cdot \dfrac{p}{2} = p^2$，所以 $y = \pm p$，由此亦可得通径长度为 $2p$.

由抛物线的极坐标方程，我们还可以得到焦点弦对应的两条焦半径的如下特殊关系，例如

$$|AF| \cdot |BF| = \frac{p}{1-\cos\theta} \cdot \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{p^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{p^2}{\sin^2\theta}.$$

$$\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{p/(1-\cos\theta)}{p/(1+\cos\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1-\cos\theta}{p} + \frac{1+\cos\theta}{p} = \frac{2}{p}.$$

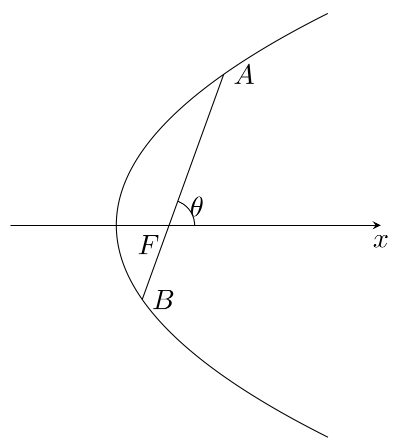


图 10.32: 抛物线的焦点弦

利用第三个等式，我们可以在已知焦点弦中的一条焦半径长度的条件下计算出另外一条焦半径的长度.

考虑抛物线的焦点弦时，我们还可以结合抛物线的定义，如图所示，AM, BN 垂直于抛物线的准线，则 $|AF| = |AM|, |BF| = |BN|$，进而得到

$$|AB| = |AF| + |BF| = |AM| + |BN|.$$

设 KL 是直角梯形 $ABNM$ 的中位线，则有 $|AM|+|BN|=2|KL|$，即 $|AB|=2|KL|$，所以 $AK\perp BK$.

因为抛物线的标准方程形式简单，所以我们有机会利用解析几何的方法方便地得到抛物线的一些几何性质. 设焦点弦所在直线的方程为 $x=ty+\dfrac{p}{2}$(之所以不选择 $y=k(x-\dfrac{p}{2}$ 的形式是为了使联立方程所得形式是简洁的)，代入 $y^2=2px$ 得

$$y^2=2pty+p^2.$$

设焦点弦的两个端点分别为 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，由二次方程根与系数的关系得

$$y_Ay_B=-p^2.$$

进一步得

$$x_Ax_B=\frac{y_A^2}{2p}\cdot\frac{y_B^2}{2p}=\frac{(y_Ay_B)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}.$$

由此得到了焦点弦两端点的横坐标和纵坐标之间的关系，可见焦点弦端点的横坐标之积和纵坐标之积都与焦点弦所在直线的倾斜角无关.

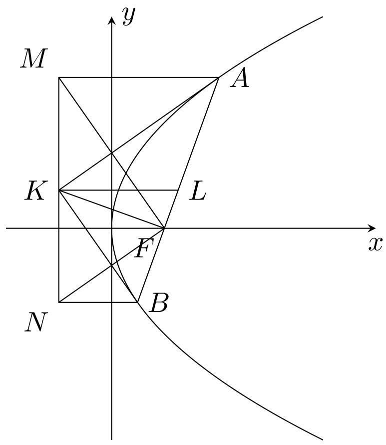


图 10.33:

例 10.20. 参考图 10.33，试用解析几何方法证明：

(1)$MF\perp NF$;

(2)A,M,K,F 四点共圆，B,N,K,F 四点共圆.

(1)

证明. $y_M=y_A,y_N=y_B$，设直线 $AB:x=ty+\dfrac{p}{2}$，代入 $y^2=2px$ 得 $y^2=2pty+p^2$，所以 $y_Ay_B=-p^2$.

MF 的斜率 $k_{MF}=\dfrac{y_M-y_F}{x_M-x_F}=-\dfrac{y_A}{p}$，$NF$ 的斜率 $k_{NF}=\dfrac{y_N-y_F}{x_N-x_F}=-\dfrac{y_B}{p}$.

所以 $k_{MF}k_{NF}=\dfrac{y_Ay_B}{p^2}=\dfrac{-p^2}{p^2}=-1$，所以 $MF\perp NF$. □

(2)

证明. 只证明 $KF \perp AB$，剩余的过程显然.$k_{KF} = \dfrac{\frac{y_M+y_N}{2}}{-p} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y_A+y_B}{p}$.

由二次方程根与系数的关系知 $y_A+y_B = 2pt$, 所以 $k_{KF} = -t$, 又因为 AB 的方程是 $x = ty+\dfrac{p}{2}$, 所以 $k_{AB} = \dfrac{1}{t}$，所以 $k_{KF}k_{AB} = -1$，所以 $KF \perp AB$. □

例 10.21. F 是抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, 点 A, B 是抛物线上位于 x 轴两侧的点, 且满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2$, 求 $\triangle ABO$ 和 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值.

解. 设 $A(y_A^2, y_A), B(y_B^2, y_B)$，不妨 $y_A > 0, y_B < 0$，则

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (y_Ay_B)^2 + y_A + y_B = 2.$$

化简得

$$(y_Ay_B + 2)(y_Ay_B - 1) = 0.$$

因为 $y_Ay_B < 0$，所以 $y_Ay_B = -2$.

$S_{\triangle AFO} = \dfrac{1}{2} \cdot |OF| \cdot y_A = \dfrac{1}{8}y_A$.

$S_{\triangle ABO} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \dfrac{1}{2}|y_A^2y_B - y_Ay_B^2| = \dfrac{1}{2}|y_Ay_B||y_A - y_B| = |y_A - y_B| = y_A + \dfrac{2}{y_A}$.

所以面积之和 $S = S(y_A) = \dfrac{9}{8}y_A + \dfrac{2}{y_A} \geq 2\sqrt{\dfrac{9}{8}y_A \cdot \dfrac{2}{y_A}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{4}} = 3$.

当且仅当 $\dfrac{9}{8}y_A = \dfrac{2}{y_A}$，即 $y_A = \dfrac{3}{2}$ 时取得最小值. 所以面积之和的最小值是 3. ♡

评注 10.21.1. 抛物线方程本身就可以看成是以 y 为参数的参数方程，这个例子是一个关于抛物线上的点 A 的问题，最终可以转化为以 “A 点的参数”y_A 为主元的问题.

例 10.22. 已知抛物线 $x^2 = 2y$，点 M 为直线 $y = -\dfrac{1}{2}$ 上一点. 一直线 l 与抛物线交于 A, B 两点，且以 AB 为直径的圆与直线 $y = -\dfrac{1}{2}$ 相切于点 M. 若 $S_{\triangle MAB} = 2\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

提示：考虑焦点弦中点相关的几何性质，由此注意到 AB 过焦点.

解. 如图10.34所示，抛物线的焦准距 $p = 1$，所以 $y = -\dfrac{1}{2}$ 是抛物线 $x^2 = 2y$ 的准线. 我们可以用解析几何方法证明 AB 过焦点，证明过程稍后给出.

由极坐标形式的焦点弦长公式

$$|AB| = \frac{2}{\sin^2\theta},$$

所以 $|MN| = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$. 其中 θ 表示 AB“关于 y 轴的倾斜角”（读者可以望文生义地理解其含义），$\theta \in [0, \pi)$.

$S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}|AB||MN|\sin\theta = \dfrac{1}{\sin^3\theta} = 2\sqrt{2}$.

解得 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$，所以直线 AB 的斜率 $k = \pm 1$，所以方程为 $y = \pm x + \dfrac{1}{2}$.

下面我们将 AB 过焦点的证明过程补充完整：

由题给条件可知 $x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$.

所以 $k_{AM} = \dfrac{\frac{x_A^2}{2} + \frac{1}{2}}{x_A - \frac{1}{2}(x_A + x_B)} = \dfrac{x_A^2 + 1}{x_A - x_B}$.

$k_{BM}=\dfrac{\frac{x_B^2}{2}+\frac{1}{2}}{x_B-\frac{1}{2}(x_A+x_B)}=\dfrac{x_B^2+1}{x_B-x_A}$.

由于 $k_{AM}k_{BM}=-1$，所以

$$(x_Ax_B)^2+x_A^2+x_B^2+1=x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2.$$

所以 $(x_Ax_B+1)^2=0$，即 $x_Ax_B=-1$.

设直线 $AB:y=kx+m$，代入 $x^2=2y$ 得 $x^2-2kx-2m=0$，二次方程根与系数的关系可知，$x_Ax_B=-2m=-1$，所以 $m=\dfrac{1}{2}$，所以 $AB:y=kx+\dfrac{1}{2}$. 由此证明了 AB 过焦点. ♡

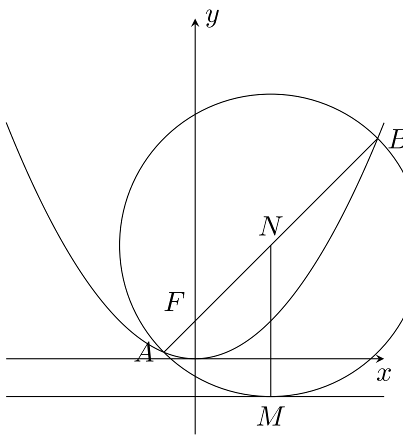


图 10.34:

评注 10.22.1. 本题证明 AB 是焦点弦的过程实际上是直线过定点的“手电筒”模型的一个特例，这类问题在后面的小节中会被我们反复地讨论.

习题 10.3

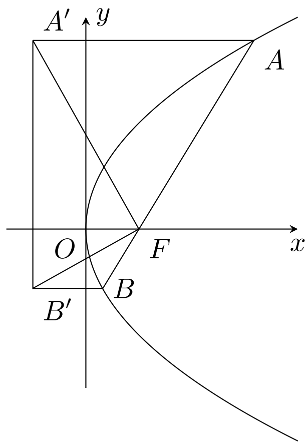
1. 已知抛物线 P 以椭圆 E 的中心为焦点，P 经过 E 的两个焦点，并且 P 与 E 恰有三个交点，则 E 的离心率等于______.

2. 已知点 F 为抛物线 $y^2=5x$ 的焦点，点 $A(3,1)$，M 为抛物线上的动点，当 $|MA|+|MF|$ 取最小值时，点 M 的坐标是______.

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 的参数 a、b 满足 $8a^2+4ab=b^3$，则当 a、b 变动时，抛物线的顶点 (s,t) 的轨迹方程为______.

4. 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 F 的直线 L 与 C 交于 P,Q 两点. 设 L 与抛物线 C 的准线交于点 M, 且 $\overrightarrow{FM}=3\overrightarrow{FP}$，则 $|\overrightarrow{FP}|=$______.

5. 如图，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l，过点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，且 $|AB|=3p$. 设点 A,B 在 l 上的射影为 A',B'，今向四边形 $AA'B'B$ 内任投一点 M，则点 M 落在 $\triangle FA'B'$ 内的概率是______.



6. 直线 $y=kx-2$ 交抛物线 $y^2=8x$ 于 A,B 两点，若线段 AB 中点的横坐标为 2，则线段 AB 的长度______.

7. A,B 是抛物线 $y=3-x^2$ 上关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点，则 $|AB|$ 等于______.

8. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 M、N 两点，$E(m,0)$ 为 x 轴上一点，ME、NE 的延长线分别交抛物线于 P、Q，若 MN,PQ 的斜率 k_1,k_2 满足 $k_1=3k_2$，则实数 m 的值为______.

9. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 和动直线 $l:y=kx+b$（k,b 是参变量，且 $k\neq 0,b\neq 0$）相交于两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直角坐标系的原点为 O，记直线 OA,OB 的斜率分别为 k_{OA},k_{OB}，若 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\sqrt{3}$ 恒成立，则当 k 变化时直线 l 恒经过的定点为______.

10. 圆心在抛物线 $x^2=2y$ 上，并且和该抛物线的准线及 y 轴都相切的圆的方程为______.

11. A,B 分别为 $C_1:x^2-y+1=0$ 和 $C_2:y^2-x+1=0$ 的点，则 $|AB|$ 的最小值为______.

12. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, 对称轴与准线的交点为 T,P 为抛物线 C 上任一点, 当 $\dfrac{|PF|}{|PT|}$ 取最小值时, $\angle PTF$ 等于______.

13. 已知点 P 在圆 $x^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{4}$ 上运动，点 Q 在曲线 $y=ax^2(a>0,-1\leq x\leq 2)$ 上运动，且 $|PQ|$ 的最大值为 $\dfrac{9}{2}$，则 $a=$______.

14. 若 $\triangle OAB$ 的垂心恰是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，其中 O 是原点，A、B 在抛物线上，则 $\triangle OAB$ 的面积 S=______.

15. 设 O 为原点，A 为抛物线 $x=\dfrac{1}{4}y^2+1$ 上的动点，B 为抛物线 $y=x^2+4$ 上的动点. 则 $\triangle OAB$ 面积的最小值为______.

16. A、B 两点分别在抛物线 $y^2=6x$ 和圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$ 上，则 $|AB|$ 的取值范围是______.

17. 设经过定点 $M(a,0)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 P,Q 两点，若 $\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$ 为常数，则 a 的值为______.

18. 在平面直角坐标系内，已知抛物线 $y=kx^2(k>0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 至少有 3 个公共点，其中一个是原点，另外两个在直线 $y=kx+b$ 上，那么实数 b 的最小值是______.

10.4 直线与圆锥曲线的位置关系

10.4.1　圆锥曲线的第三定义

我们回忆例10.11和10.18，由此给出圆锥曲线的第三定义：

定义 10.6 (圆锥曲线的第三定义). 平面内，到点 $A_1(-a,0)$ 和 $A_2(a,0)$ 两点的直线斜率之积为常数 K（$K\neq 0$）的点，以及 A_1 A_2 两点所构成的点的集合为圆锥曲线.

当 $K=-1$ 时，轨迹为圆；

当 $K<-1$ 时，轨迹为焦点在 y 轴上的椭圆（这种竖椭圆的情况除交换坐标轴外，和横椭圆完全一致，不必单独讨论，因此我们也可以限制 $K\geq -1$）；

当 $K>-1$ 时，记 $K=e^2-1$，则：

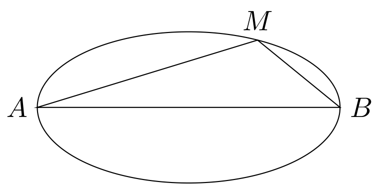
当 $0<e<1$ 时，轨迹为焦点在 x 轴上的椭圆；

当 $e>1$ 时，轨迹为双曲线.

此时，e 就是相应圆锥曲线的离心率.

我们可以证明由第三定义给出的圆锥曲线和第一定义是一致的（通过证明轨迹方程具有椭圆、双曲线标准方程的形式，过程留给读者）. 这也说明，我们前面讨论的顶点三角形的性质实际上是充分必要条件，也就是说该性质可以作为椭圆或双曲线的定义.

例 10.23. (1) 如图，A,B 是椭圆 C 长轴的两个顶点，M 是椭圆 C 上一点，$\tan\angle AMB=-1,\tan\angle MAB=\dfrac{1}{3}$，则椭圆的离心率为__________________.



(2) 已知点 P 在椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，点 P 在第一象限，点 P 关于原点 O 的对称点为 A，点 P 关于 x 轴的对称点为 Q，设 $\overrightarrow{PD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，直线 AD 与椭圆 Γ 的另一个交点为 B，若 $PA\perp AB$，则椭圆 Γ 的离心率为 (　　　　　　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解. (1) 以 AB 的中点为原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $k_{AM}=\dfrac{1}{3},k_{BM}=-1$.

由椭圆的第三定义（或顶点三角形的性质），$k_{AM}k_{BM}=-\dfrac{1}{3}=e^2-1$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

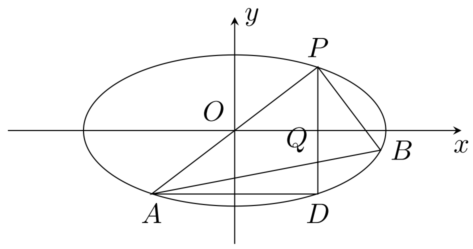


图 10.35:

(2) 如图10.35所示：

$k_{PA}k_{PB} = -1$. 由顶点三角形的性质可知 $k_{AB}k_{BP} = e^2 - 1$.

因为 $k_{AB} = \dfrac{DQ}{AD} = \dfrac{\frac{1}{4}PD}{AD} = \dfrac{1}{4}k_{PA}$. 所以 $e^2 - 1 = k_{AB}k_{BP} = \dfrac{1}{4}k_{PA}k_{BP} = -\dfrac{1}{4}$，所以 $e = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选择 C 项. ♡

10.4.2 直线与圆锥曲线的位置关系

直线与圆锥曲线的公共点问题，实际上就是直线的方程与圆锥曲线方程的联立方程组的解的问题. 以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0(a > b > 0)$ 和直线 $y = kx + m$ 为例，联立得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \\ y = kx + m. \end{cases}$$

将直线方程代入椭圆方程，可消去其中一个变量，得到一个二次方程. 这个二次方程至多有 2 个不同的实数根，也即直线和椭圆至多有 2 个公共点.

本节的核心问题就是讨论联立方程组解的情况，通过解析几何的方法，利用代数方法解决几何问题.

对于点与椭圆的位置关系，给出如下命题：

命题 10.4. 设椭圆 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，点 $P(x_0, y_0)$，则：

P 在椭圆内 $\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} < 1$;

P 在椭圆上 $\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$;

P 在椭圆外 $\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} > 1$.

这一命题和我们学习圆的一般方程时曾讨论过的点与圆的位置关系是类似的.

直线与椭圆的位置关系有相交、相切和相离三种，分别对应 2 个、1 个和 0 个公共点. 判定直线和椭圆的位置关系，可以通过联立直线和椭圆的方程并消去其中一个变量，通过判定二次方程根的个数来判定解的情况.

在这一节的讨论中，我们将**不系统地**介绍直线与圆锥曲线的位置关系，而是从解析几何方法和技巧的角度，通过解答一个个问题来得到一些重要结论和重要方法. 因此，我们将重点以椭圆和抛物线为例来说明问题，这不仅仅是考虑到大家遇见的考题大多以椭圆或抛物线为背景的，更重要的原

因是掌握了椭圆相关问题的处理经验和记住一些椭圆相关的结论之后，几乎所有的直线与双曲线的位置关系问题都可以类比来解决. 这一点，大家可以从我们举的一些有关双曲线的例子看出（大家会发现，虽然我们并不以双曲线为例来引入这些结论，但是大家在吃透我们以椭圆为例给出的结论之后，会非常容易接受双曲线的一些性质并灵活地应用它们，这是非常 Amazing 的事情）.

下面我们探讨直线与椭圆相交时，椭圆的中点弦问题.

命题 10.5 (椭圆的中点弦). 设直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A,B 两点，设弦 AB 的中点为 P，则 $k_{OP}k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

证明. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 因为 A,B 在椭圆 C 上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1; & ① \\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1; & ②\end{cases}$$

② − ①，得：

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0.$$

即

$$b^2(x_2-x_1)(x_2+x_1)=-a^2(y_2-y_1)(y_2+y_1).$$

所以

$$k_{OP}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{k_{AB}}.$$

所以 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$. □

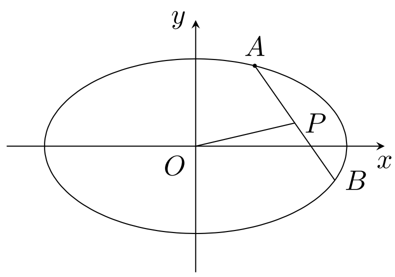


图 10.36: 椭圆的中点弦

评注 10.23.1. 在证明过程中我们并没有真正联立椭圆方程和直线的方程，而只是将点代入并作差就得到了结果. 我们称这一过程为“点差法”，反映了解析几何中“设而不求”的思想.

中点弦又是一个具有“斜率之积为 e^2-1”形式的结论.

事实上，一般情况下顶点三角形的性质可以看成是中点弦的结论的一个直接推论. 如图*10.37*所示，取 BM 的中点 P，由点差法得 $k_{OP}k_{BM}=e^2-1$. 又因为 PO 是 $\triangle ABP$ 的中位线，所以 $k_{OP}=k_{AM}$，所以 $k_{AM}k_{BM}=e^2-1$.

用这种方法得到一般情况下顶点三角形的性质似乎更加直接（因为点差法似乎比椭圆的参数方程法要更简便一些）.

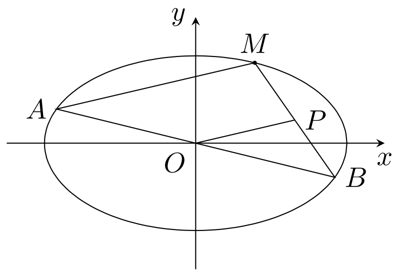


图 10.37:

抛物线的中点弦也有类似的结论.

命题 10.6 (抛物线的中点弦). 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，设 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，则 $k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$.

提示：仍然使用点差法证明.

证明. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases} y_1^2=2px_1; & ① \\ y_2^2=2px_2; & ② \end{cases}$$

两式作差得

$$y_2^2-y_1^2=2p(x_2-x_1).$$

所以

$$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=2p(x_2-x_1).$$

所以

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2p}{y_2+y_1}=\frac{p}{\frac{y_1+y_2}{2}}=\frac{p}{y_0}.$$

□

根据对称性，读者可以自己尝试着叙述抛物线 $y^2=-2px,x^2=2py$ 和 $x^2=-2py$（$p>0$）的中点弦的相关结论.

例 10.24. 过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点作两条相互垂直的直线 l_1,l_2，l_1,l_2 分别交抛物线于 A,B 和 C,D，设弦 AB 的中点为 M，弦 CD 的中点为 N，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的最小值为____________.

提示：根据中点弦的结论，以斜率 k 为主元求目标函数的最小值.

解. 准焦距 $p=2$.

根据中点弦的相关结论，$\dfrac{1}{k_{CD}}=\dfrac{p}{x_N}=\dfrac{2}{x_N}$，由垂直关系可知，$\dfrac{1}{k_{AB}}=-k_{CD}=\dfrac{p}{x_M}=\dfrac{2}{x_M}$.

记 $k_{CD}=k$. 则 $x_N=2k$，$x_M=-\dfrac{2}{k}$.

又因为 AB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+1$，所以 $y_M=\dfrac{2}{k^2}+1$，同理可知 $y_N=2k^2+1$.

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_Mx_N+y_My_N=2k\cdot(-\dfrac{2}{k})+(2k^2+1)(\dfrac{2}{k^2}+1)=2k^2+\dfrac{2}{k^2}+1\geq 2\cdot\sqrt{2k^2\cdot\dfrac{2}{k^2}}+1=5$.

当且仅当 $k^2=1$ 即 $k=\pm1$ 时，取得最小值 5. ♡

例 10.25. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 被 $P(2,1)$ 平分的弦所在的直线斜率为____________________.

解. 这样的直线不存在.

假设存在这样的直线，由它被 $(2,1)$ 平分可知它是异支弦，设其斜率为 k，由中点弦的相关结论知

$$kk_{OP}=e^2-1=\frac{13}{9}-1=\frac{4}{9}.$$

因为 $k_{OP}=\dfrac{1}{2}$，所以 $k=\dfrac{8}{9}$.

又因为渐近线的斜率为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}<\dfrac{8}{9}$，所以斜率为 $\dfrac{8}{9}$ 的直线与双曲线的焦点不可能在不同支上，这与它是异支弦矛盾，所以不存在这样的直线. ♡

例 10.26. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 交于 A,B 两点，如果 $|AF|+|BF|=4|OF|$，求双曲线的渐近线方程.

解. 由焦半径公式：$|AF|=y_A+\dfrac{p}{2},|BF|=y_B+\dfrac{p}{2}$，又因为 $|OF|=\dfrac{p}{2}$，所以 $y_A+y_B=p$.

所以 $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{p}{2}$.

因为 AB 是抛物线的中点弦，所以 $k_{AB}=\dfrac{x_M}{p}$.

注意到 AB 同时也是双曲线的中点弦，由双曲线中点弦的性质：

$$k_{OM}k_{AB}=e^2-1.$$

所以 $\dfrac{y_M}{x_M}\cdot\dfrac{x_M}{p}=\dfrac{y_M}{p}=\dfrac{1}{2}=e^2-1$.

所以

$$\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=\frac{1}{2}.$$

所以渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. ♡

例 10.27. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M. 证明：

(1) 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 $-\dfrac{a^2}{b^2}$；

(2) 若 l 过点 (b,a)，延长线段 OM 与 C 交于点 P，当四边形 $OAPB$ 为平行四边形时，则直线 l 的斜率 $k_l=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}\cdot\dfrac{a}{b}$.

(1)

证明. 点差法，过程略，留给读者自己完成. □

(2)

证明. 设 $M(x_0,y_0)$，则

$$k_l=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{k_{OM}}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

因为 $OAPB$ 是平行四边形，所以 M 是 OP 的中点，所以 $P(2x_0, 2y_0)$ 在椭圆上，即

$$\frac{4x_0^2}{b^2} + \frac{4y_0^2}{a^2} = 1.$$

所以

$$a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = \frac{1}{4}a^2b^2. ①$$

另一方面，因为 l 过点 (b, a)，所以

$$k_l = \frac{b - y_0}{a - x_0} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

化简得

$$a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = a^2bx_0 + ab^2y_0. ②$$

由 ① ② 可知，

$$a^2bx_0 + ab^2y_0 = \frac{1}{4}a^2b^2.$$

即

$$ax_0 + by_0 = \frac{ab}{4}. ③$$

为了解出商变量 $\frac{y_0}{x_0}$，我们将 ③ 式两边平方并代入 ① 式，得

$$16(ax_0 + by_0)^2 = 4(a^2x_0^2 + b^2y_0^2).$$

这是一个关于 x_0 和 y_0 的二次齐次式方程，可以据此解出商变量，整理可得

$$3a^2x_0^2 + 8abx_0y_0 + 3b^2y_0^2 = 0.$$

两边同时除以 x_0^2 得

$$3b^2(\frac{y_0}{x_0})^2 + 8ab(\frac{y_0}{x_0}) + 3a^2 = 0.$$

由二次方程的求根公式知

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{-8ab \pm \sqrt{64a^2b^2 - 36a^2b^2}}{6b^2} = \frac{-4a \pm \sqrt{7}a}{3b},$$

所以 $k_l = \frac{-\frac{a^2}{b^2}}{\frac{(-4\pm\sqrt{7})a}{3b}} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \cdot \frac{a}{b}$. □

例 10.28 (直线与椭圆相切). *已知椭圆* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ *和点* $P(x_0, y_0)$.
(1) *若* P *在椭圆上，求以* P *点为切点的椭圆的切线方程;*
(2) *若* P *在椭圆外，过点* P *作椭圆的两条切线* PA, PB*，切点分别为* A, B*，求切点弦* AB *所在直线的方程.*

解. (1) 若切线斜率不存在，则显然切线方程是 $x = \pm a$，若切线斜率存在，可设切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$，联立

$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0); \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

消去其中一个变量，令 $\Delta = 0$ 即可解出斜率 k. 但是这个方法的计算量非常大，如果没有一定耐心甚至可能无法完成. 我们在学习导数之后会有更好的理解方案，那时我们再对这个结论给出严格的证明，目前我们暂时请读者接受最后的结论:

过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

这一结果具有“半代换”的结构，即将椭圆方程的 x^2 换成 x_0x，y^2 换成 y_0y.

实际上，我们可以将切线看成是由中点弦逼近得到的，当中点弦的两个端点无限接近时，可认为中点弦的极限就是切线，所以切线的斜率 k 满足

$$kk_{OP}=e^2-1=-\frac{b^2}{a^2}.$$

所以 $k=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

所以切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

化简得

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

因为点 P 在椭圆上，所以直线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，由半代换可知

$$l_{PA}:\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

$$l_{PB}:\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

因为点 P 在 PA 上，且点 P 在 PB 上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{x_1x_0}{a^2}+\dfrac{y_1y_0}{b^2}=1.\\[2mm] \dfrac{x_2x_0}{a^2}+\dfrac{y_2y_0}{b^2}=1.\end{cases}$$

所以 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 都在直线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 上，所以直线 AB 的方程就是

$$l_{AB}:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

♡

可见椭圆上一点处的切线方程和椭圆的焦点弦所在直线方程都具有“半代换”形式，我们把这个例题的结果写成命题:

命题 10.7 (椭圆中的“半代换”). *对于* $P(x_0, y_0)$*:*

若点 P *在椭圆* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *上，则直线* $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ *代表以* P *点为切点的切线;*

若点 P *在椭圆* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *外，则直线* $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ *是* P *点对应的切点弦所在直线.*

例 10.29 (直线与抛物线相切). 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 和点 $P(x_0,y_0)$.

(1) 若 P 在抛物线上，求以 P 点为切点的抛物线的切线方程;

(2) 若 P 在抛物线外，过点 P 作抛物线的两条切线 PA,PB，切点分别为 A,B，求切点弦 AB 所在直线的方程.

解. (1) 因为 P 点在抛物线上，所以 $P(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$，显然切线斜率不为零，所以可设切线方程为 $x=t(y-y_0)+\frac{y_0^2}{2p}$，代入抛物线方程可得

$$y^2=2pt(y-y_0)+y_0^2.$$

整理得

$$y^2-2pty+2pty_0-y_0^2=0.$$

根的判别式 $\Delta=4p^2t^2-4(2pty_0-y_0^2)=4p^2t^2-8pty_0+4y_0^2$.

因为点 P 是抛物线的切线，所以

$$\Delta=4p^2t^2-8pty_0+4y_0^2=4(pt-y_0)^2=0.$$

即 $pt-y_0=0$，解得 $t=\frac{y_0}{p}$.

所以，切线方程为 $x=\frac{y_0y}{p}-\frac{y_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{2p}$.

整理得切线方程为 $y_0y=p(x+\frac{y_0^2}{2p})$.

即切线方程为

$$y_0y=p(x+x_0).$$

评注 10.29.1. 可见抛物线上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程具有“半代换”的形式，即将抛物线方程中的二次项 y^2 换成 y_0y，一次项 $2px$ 中的 x 换成 $\frac{x+x_0}{2}$.

这个求解过程借助了根的判别式，略显麻烦，在学习导数之后将有更直接也更简便的求解方法，读者可以在具有那部分知识之后回过头来把这个问题再做一遍.

与椭圆一样，对于这个问题我们也可以将切线理解成中点弦的逼近，当中点弦的两个端点无限接近时，可以认为中点弦的极限就是切线，所以切线的斜率 $k=\frac{p}{y_0}$.

所以切线方程为

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0).$$

化简得

$$y_0y=px-px_0+y_0^2.$$

因为 P 点在抛物线上，所以

$$y_0y=px-px_0+y_0^2=px-px_0+2px_0=px+px_0=p(x+x_0).$$

结果是一致的.

(2) 由半代换可知

$$l_{PA}: y_1y = p(x + x_1).$$

$$l_{PB}: y_2y = p(x + x_2).$$

因为点 P 在 PA 上，且点 P 也在 PB 上，所以

$$\begin{cases} y_0y_1 = p(x_1 + x_0), \\ y_0y_2 = p(x_2 + x_0). \end{cases}$$

因此 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 都在直线 $y_0y = p(x + x_0)$ 上，所以直线 AB 的方程就是

$$l_{AB}: y_0y = p(x + x_0).$$

♡

评注 10.29.2. 抛物线的切点弦也具有半代换的形式，我们将这个例题的结果写成如下命题：

命题 10.8 (抛物线的"半代换"). 对于 $P(x_0, y_0)$:

若点 P 在抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 上，则直线 $y_0y = p(x + x_0)$ 代表以 P 点为切点的切线；

若点 P 在抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 外，则直线 $y_0y = p(x + x_0)$ 是 P 点对应的切点弦所在直线.

例 10.30 (抛物线的中点弦和切点弦). 已知抛物线 $x^2 = 4y$，直线 $y = kx + 1$ 交抛物线于点 A, B，P 为抛物线外一点，连接 PA, PB 交抛物线于 C, D 且 $CD//AB$.

(1) 若 $k = 1$，试确定 P 点的轨迹；

(2) 若 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CA}$ 且 $PA//x$ 轴，求 $\triangle PAB$ 的面积.

解. (1) 注意理解题意，本题是求当满足 $AB//CD$ 的 P 点的轨迹方程. 取平行弦 AB, CD 的中点 M, N，则 P 点在直线 MN 上. 如图10.38所示.

根据中点弦相应结论，

$$\frac{p}{x_M} = 1, \frac{p}{x_N} = 1.$$

焦准距 $p = 2$，所以 $x_M = x_N = 2$.

所以 P 点在直线 $x = 2$ 上，下面确定 P 点纵坐标 y_P 的范围.

因为 P 点在抛物线外，所以 $y_P < 1$.

下界是 PA, PB 恰好和抛物线相切的情况，此时 CD 和 AB 重合. 这时，AB 是切点弦，根据半代换

$$AB: 2x = p(y + y_P).$$

化简得

$$AB: y = x - y_P.$$

所以 $-y_P = 1$，所以 $y_P = -1$.

所以 $-1 < y_P < 1$，即 P 点的轨迹为如下线段（不含端点）：

$$\begin{cases} x = 2, \\ -1 < y < 1. \end{cases}$$

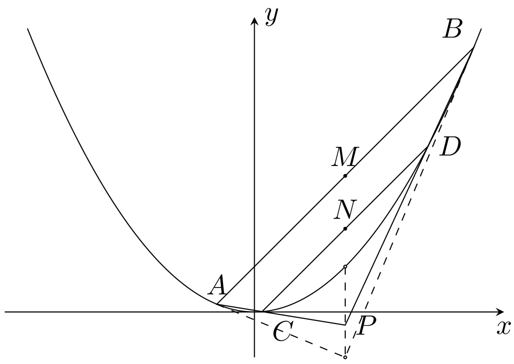


图 10.38:

(2) 因为 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CA}$ 且 $PA//x$ 轴，结合抛物线的对称性可知

$$x_A = -\frac{1}{5}x_P.$$

以 k 为参数解答这个问题，与 (1) 同理，根据中点弦的相关结论得

$$x_P = x_M = 2k \Rightarrow x_A = -\frac{1}{5}x_P = -\frac{2}{5}k.$$

将 $y = kx + 1$ 代入 $x^2 = 4y$ 得 $x^2 - 4kx - 4 = 0$.
根据二次方程根与系数的关系，

$$x_A + x_B = 4k, x_Ax_B = -4.$$

所以 $x_B = \dfrac{22}{5}k = \dfrac{4}{\frac{2}{5}k}$.
解得 $k^2 = \dfrac{25}{11}$.
(如果读者还记得的话，这一过程就是我们研究焦点弦的性质时的证明过程.)
所以

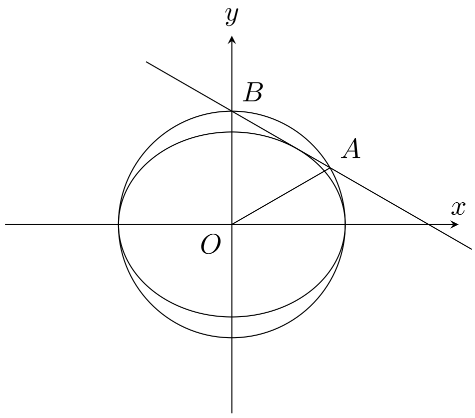
$$y_A = kx_A + 1 = k \cdot (-\frac{2}{5}k) + 1 = -\frac{2}{5}k^2 + 1 = \frac{1}{11}, y_B = \frac{x_B^2}{4} = 11.$$

所以

$$S = \frac{1}{2}(y_B - y_A) \cdot 6|x_A| = \frac{1}{2} \times \frac{120}{11} \times 6 \times \frac{2}{5} \times \frac{5\sqrt{11}}{11} = \frac{720\sqrt{11}}{121}.$$

♡

例 10.31. (1) 已知点 P 为直线 $x + 2y = 4$ 上一动点，过点 P 作椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的两切线，切点分别为 A, B，当 P 点运动时，直线 AB 过定点的坐标是__________________.
(2) 如图，已知椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 与 y 轴正半轴交于点 B，过点 B 的直线与椭圆 E 相切，且与圆 O 交于另一点 A，若 $\angle AOB = 60^\circ$，则椭圆 E 的离心率为______.



解. (1) 设 $P(4-2y_0,y_0)$，由切点弦的半代换形式可知 AB 的方程为:

$$(4-2y_0)x+4y_0y=4.$$

整理得

$$(2y-x)y_0+2x-2=0.$$

因为直线 AB 过定点，即存在一组 (x,y)，使得上面的等式恒成立，$\forall y_0$.

令

$$\begin{cases}2y-x=0,\\2x-2=0.\end{cases}$$

解得 $x=1,y=\frac{1}{2}$，所以直线 AB 过定点 $(1,\frac{1}{2})$.

(2) 根据题意，直线 AB 的方程为

$$x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}a=0.$$

又因为直线 AB 为椭圆的切线，设切点为 $P(x_0,y_0)$，所以 AB 的方程为:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

对比系数可知 $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

代入直线 AB 的方程可知 $y_0=\frac{2}{3}a$.

所以

$$e^2-1=k_{AB}k_{OP}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{2}{3}.$$

所以 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ♡

下面我们讨论如何用解析几何方法求直线与圆锥曲线相交时的弦长.

例 10.32. 已知动点 A,B 在椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 上，且线段 AB 的垂直平分线始终过点 $P(-1,0)$.

(1) 求线段 AB 中点 M 的轨迹方程;

(2) 求弦 AB 长的最大值.

解. (1) 设 $M(x_0, y_0)$，点差法（过程留给读者完成）得到

$$\frac{y_0}{x_0} \cdot k_{AB} = e^2 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

又因为线段 AB 的垂直平分线始终过点 $P(-1, 0)$，所以

$$k_{AB} \cdot k_{MP} = k_{AB} \cdot \frac{y_0}{x_0 + 1} = -1.$$

从而 $x_0 = -2$，即线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $x = -2, -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$.

(2) 当 AB 的斜率不存在时，显然 $AB = 2\sqrt{2}$.

若 AB 的斜率存在，设斜率为 k，由 (1) 知直线 AB 的方程为

$$y - y_0 = k(x + 2).$$

又因为 $k \cdot \frac{y_0}{x_0} = -\frac{k}{2} \cdot y_0 = -\frac{1}{2}$，所以 $y_0 = \frac{1}{k}$.

所以

$$AB : y = kx + 2k + \frac{1}{k}.$$

由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + 2k + \frac{1}{k}, \end{cases}$$

消去 y，得

$$(2k^2 + 1)x^2 + 4(2k^2 + 1)x + \frac{2}{k^2} + 8k^2 = 0.$$

由根与系数的关系知，

$$x_1 + x_2 = -4, x_1 x_2 = \frac{8k^2 + \frac{2}{k^2}}{2k^2 + 1} = \frac{8k^4 + 2}{2k^4 + k^2}.$$

所以

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1 + k^2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \sqrt{1 + k^2}\sqrt{16 - 4 \cdot \frac{8k^4 + 2}{2k^4 + k^2}} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2k^4 + 2k^2 - 1}{2k^4 + k^2}} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2k^4 + k}}. \end{aligned}$$

因为 $-\sqrt{2} < y_0 < \sqrt{2}$，所以 $k = \frac{1}{y_0} \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

所以 $AB < 2\sqrt{2}$.

综上所述，AB 的最大值为 $2\sqrt{2}$. ♡

评注 10.32.1. 用解析几何方法计算圆锥曲线的弦长时用到了“设而不求”的思想，我们只是根据根与系数的关系整体代入，而并没有具体求出两个根.

圆锥曲线的弦长可归结为如下公式：

$$l=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

例 10.33. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且点 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上的点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p;

(2) 若点 P 在 M 上，PA,PB 为 C 的两条切线，A,B 为切点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

解. (1) 抛物线的焦点 $F(0,\frac{p}{2})$.

焦点到圆心的距离 $|FM|=\frac{p}{2}+4$.

所以，点 F 到圆 M 上一点的最小值为

$$|FM|-1=\frac{p}{2}+3=4.$$

解得 $p=2$.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$.

由半代换（具体过程略，建议使用导数相关知识）得

$$PA:x_1x=2(y+y_1).$$

$$PB:x_2x=2(y+y_2).$$

因为点 P 在直线 PA 上，且 P 在直线 PB 上，所以

$$x_1x_0=2(y_0+y_1);x_2x_0=2(y_0+y_1).$$

所以点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 都在直线

$$x_0x=2(y+y_0)$$

上，所以直线 AB 的方程就是

$$x_0x=2(y+y_0).$$

为了计算弦长，联立

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-y_0,\\y=\frac{x^2}{4}\end{cases}$$

化简得

$$x^2-2x_0x+4y_0=0.$$

由二次方程根与系数的关系可知

$$x_1+x_2=2x_0,x_1x_2=4y_0.$$

所以

$$|AB|=\sqrt{1+(\frac{x_0}{2})^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(1+\frac{x_0^2}{4})(4x_0^2-16y_0)}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}.$$

而点 P 到直线 AB 的距离 d 为

$$d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}.$$

所以

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\frac{|x_0^2-4y_0|}{x_0^2+4}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}.$$

因为点 P 在圆 M 上，所以

$$x_0^2-4y_0=1-(y_0+4)^2-4y_0=-(y_0+6)^2+21.$$

由已知得 $-5\le y_0\le -3$，所以当 $y_0=-5$ 时，$\triangle PAB$ 面积最大，最大值为

$$\frac{1}{2}\times 20^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}.$$

♡

例 10.34 (椭圆的外准圆即蒙日圆). 过椭圆外一点 P 作椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条切线，若两条切线互相垂直，那么 P 点的轨迹是圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$.

这个圆称为椭圆的**外准圆**或**蒙日圆**.

证明. 当直线 PA 和 PB 斜率为 0 或不存在时，显然点 $P(\pm a,\pm b)$，此时半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$.

当斜率存在时，记 $k_{PA}=k_1,k_{PB}=k_2$，设 $P(x_0,y_0)$，过点 P 椭圆的切线方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

联立

$$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.\end{cases}$$

消去 y，整理得

$$(a^2k^2+b^2)x^2+2ka^2(y_0-kx_0)x+a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0.$$

令 $\Delta=0$，即

$$\begin{aligned}\Delta&=4k^2a^4(y_0-kx_0)^2-4[a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2](a^2k^2+b^2)\\&=4k^2a^4(y_0-4k_0)^2-4[a^4k^2(y_0-kx_0)^2+a^2b^2(y_0-kx_0)^2-a^4b^2k^2-a^2b^4]\\&=4a^4b^2k^2+4a^2b^4-4a^2b^2(y_0-kx_0)^2=0.\end{aligned}$$

即

$$a^2k^2+b^2-(y_0-kx_0)^2=0.$$

以 k 为主元，整理得

$$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+(b^2-y_0^2)=0.$$

这是一个关于 k 的二次方程，由二次方程根与系数的关系

$$k_1k_2=\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}.$$

又因为 $PA\perp PB$，所以

$$k_1k_2=-1\Rightarrow\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1.$$

所以 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$.

即 P 点的轨迹为圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$. □

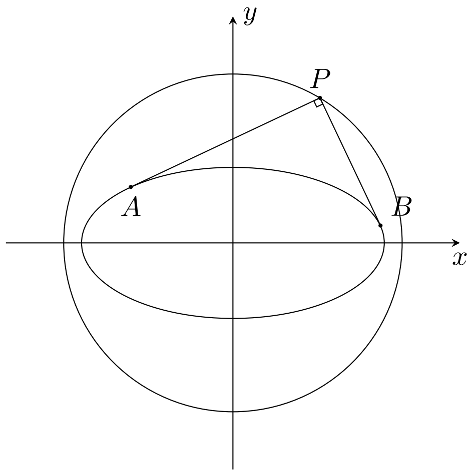


图 10.39: 椭圆的蒙日圆

例 10.35. 已知两动点 A,B 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上，而动点 P 在直线 $3x+4y-10=0$ 上，当 A,B,P 运动时，若 $\angle APB$ 恒为锐角，则椭圆 C 的离心率的取值范围是__________.

解. 显然 P 点在椭圆外，固定点 P，则当 PA,PB 都与椭圆相切时 P 张 AB 的角最大. 若 PA,PB 与椭圆相切，则使得 $\angle APB=90^\circ$ 的点 P 的集合是椭圆的蒙日圆，所以

$$\angle APB\text{恒为锐角}\Leftrightarrow P\text{恒在蒙日圆外}.$$

又因为 P 点在直线 $3x+4y-10=0$ 上，所以只需：点 P 与蒙日圆相离.

蒙日圆的半径 $r=\sqrt{a^2+1}$，直线到圆心的距离 $d=\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$. 令 $r<d$，解得 $a^2<3$.

所以椭圆的离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}<\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $e\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$. ♡

阅读 10.4：与蒙日圆有关的一道题以及相关结论的探讨

王春晖

2021 年 4 月

摘要: 在高中与竞赛的数学学习中，蒙日圆为相当特殊的一块知识. 高考中往往不涉及过多的与蒙日圆相关的几何性质. 而仅以蒙日圆的存在性作为考查的最终目标. 在平面几何的入门学习中，用到锥线的次数少之又少，而在高端的学习中，又很少涉及到坐标系，因此夹在代数和几何中间的蒙日圆，则处于相当不受待见的地位。本文即为弥补“蒙日圆的几何性质”方面的空白的一篇拙作，权当抛砖引玉. 有很多不足之处，还请各位多多批评指教.

关键词: 蒙日圆；等角线；轨迹椭圆；陪位中线

不久前，笔者在参加“安徽省六校教育研究会 2021 届高三联考”时，遇见了这样一个圆锥曲线问题:

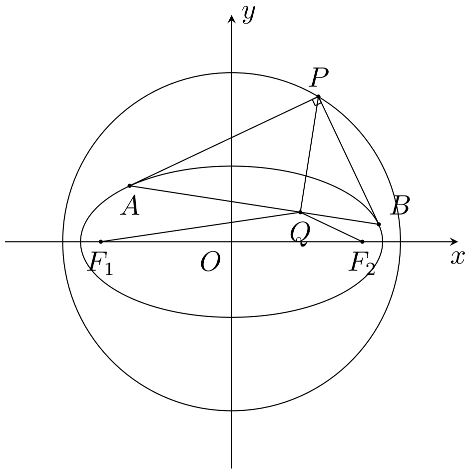
例 10.36. 已知圆 $O: x^2+y^2=5$, 椭圆 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点 F_1, F_2，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆和圆所截得的弦长分别为 1 和 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 如图,P 为圆上任意一点，过 P 分别作椭圆的两条切线切椭圆于 A, B 两点;

(i) 若直线 PA 的斜率为 2，求直线 PB 的斜率;

(ii) 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q，求证:$|QF_1|+|QF_2|$ 是定值.



时间原因，笔者在考场上并未完全做出这道题，但是，笔者对 (II)(ii) 的结论产生了浓厚的兴趣. 在考试后经过探究，得到了如下的一些结论，在此呈上.

引理 10.1 (椭圆的光学性质)**.** 设 F_1, F_2 为椭圆的两焦点，P 为椭圆上任意一点，则 P 点处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 的外角.

引理的证明从略.

引理 10.2 (斯坦纳定理)**.** P 为椭圆外一点，过 P 作椭圆的两条切线 PA, PB, 则:

(1)PF_1, PF_2 为 $\angle APB$ 的一对等角线，即 $\angle APF_1=\angle BPF_2$；

(2)F_1P 平分 $\angle AF_1B, F_2P$ 平分 $\angle AF_2B$.

证明. 作 F_1 关于 PA 的对称点 F_1'，F_2 关于 PB 的对称点 F_2'.

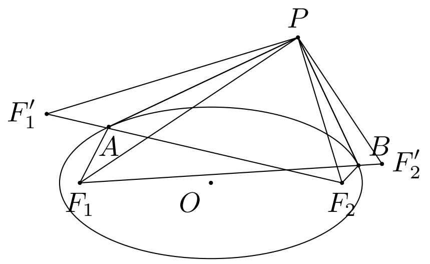


图 10.40: 引理10.2

由椭圆的光学性质，有 $\angle PAF_1' = \angle PAF_1 = 180^\circ - \angle PAF_2$，$\angle PBF_2' = \angle PBF_2 = 180^\circ - \angle PBF_1$，$\therefore F_1'$、$A$、$F_2$ 共线，F_2'、A、F_1 共线.

由椭圆的第一定义，有 $F_1'F_2 = F_1'A + AF_2 = F_1A + AF_2 = F_1B + BF_2 = F_1B + BF_2' = F_1F_2'$,

由对称的定义 $PF_1' = PF_1, PF_2 = PF_2', \therefore \triangle PF_1'F_2 \cong \triangle PF_1F_2'(SSS)$.

$\therefore \angle F_1'PF_2 = \angle F_1PF_2', \therefore \angle F_1'PF_1 = \angle F_2'PF_2 \Rightarrow 2\angle F_1PA = 2\angle F_2PB \Rightarrow \angle F_1PA = \angle F_2PB$.

且 $\angle PF_1'F_2 = \angle PF_2'F_1, \therefore \angle AF_2P = \angle PF_2'F_1 = \angle PF_2B$. 即 PF_2 平分 $\angle AF_2B$, 同理 PF_1 平分 $\angle AF_1P$. □

定理 10.4.1 (蒙日圆定理)**.** 对于椭圆 $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 过椭圆外一点 P 作椭圆的两切线 PA, PB, 则 $PA \perp PB \Leftrightarrow P$ 在定圆:$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上.

证明. 设 $P(x_0, y_0)$ 满足 $PA \perp PB$，作 F_2 关于 PB 的对称点 F_2'. 由引理10.1知 F_1, B, F_2' 共线.

由引理10.2知 $\angle APB = \angle APF_1 + \angle F_1PB = \angle F_1PB + \angle BPF_2 = \angle F_1PB + \angle BPF_2' = \angle F_1PF_2'$

则 $PA \perp PB \Leftrightarrow PF_1^2 + PF_2'^2 = F_1F_2'^2 \Leftrightarrow PF_1^2 + PF_2^2 = (F_1B + BF_2)^2 \Leftrightarrow PF_1^2 + PF_2^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (x_0 - c)^2 + y_0^2 + (x_0 + c)^2 + y_0^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow x_0^2 + c^2 + y_0^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$. □

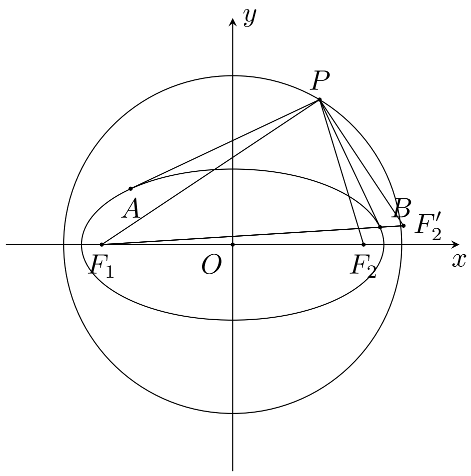


图 10.41: 定理10.4.1

引理 10.3. O 为 $\triangle ABC$ 的外心，AE 为 $\triangle ABC$ 的 $A-$ 陪位中线.$OD \perp AE$ 于 D. 则 $\triangle ADB \backsim \triangle CDA$. [2]

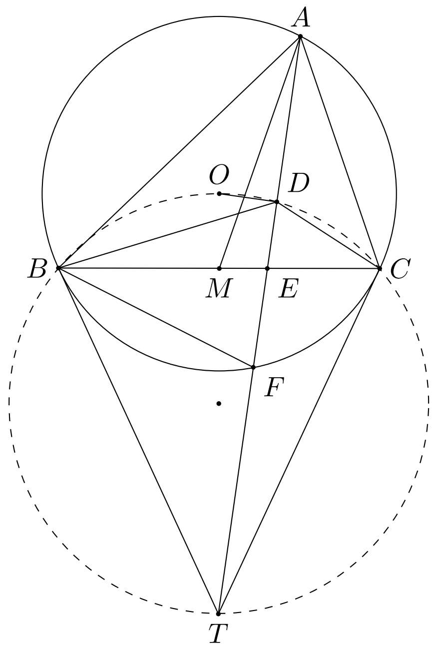


图 10.42: 引理10.3

证明. 作 BT, CT 为 $\odot ABC$ 的切线，易知 $OB \perp BT, OC \perp CT, \therefore O, B, T, C$ 共圆.

这里提供一种利用变相同一法的简证, 设 M 为 BC 中点, 则:

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle CAM} = \frac{CA}{BA}, \frac{\sin\angle CAT}{\sin\angle BAT} = \frac{CT \cdot AT \sin\angle ACT}{BT \cdot AT \sin\angle ABT} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB} = \frac{CA}{BA}$$

$\therefore \dfrac{\sin\angle BAM}{\sin\angle CAM} = \dfrac{\sin\angle CAT}{\sin\angle BAT}, \angle BAM + \angle CAM = \angle CAT + \angle BAT.$

$\therefore AM, AT$ 为等角线,$\therefore AT$ 为 $\triangle BAC$ 的陪位中线，$\therefore A$、E、T 共线.

$\therefore OD \perp OT, \angle ODT = \angle OCT = 90^\circ = \angle OBT, \therefore O$、$D$、$C$、$T$、$B$ 五点共圆.

$\because \overset{\frown}{BT} = \overset{\frown}{CT} \therefore \angle BDT = \angle CDT, \therefore \angle ADB = \angle ADC.$

设 F 为 AT 与 $\odot O$ 的交点，则易知 $ABFC$ 为调和四边形[3]，故 $\angle ABD = \angle CBF = \angle CAF = \angle CAD, \angle ADB = \angle CDA, \therefore \triangle ADB \backsim \triangle CDA.$ □

[2]在国外的一些杂志上称 D 为 $\triangle ABC$ 的 Dumpty 点，称垂心在中线上的投影为 Humpty 点，这也是此处将该点称为点 D 的原因

[3]调和四边形的性质及证明在此不做过多解释

引理 10.4. PA, PB 为椭圆的两条切线，M 为 AB 中点，O 为椭圆中心，则 P, M, O 共线.

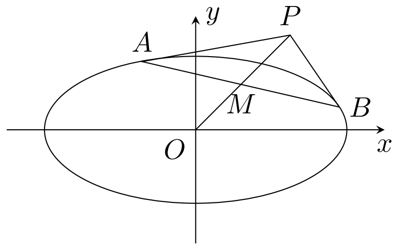


图 10.43: 引理10.4

证明. [4] 当 P 位于坐标轴上时, 命题显然.

当 P 不位于坐标轴上时, 易知:OM, OP, AB 斜率存在;

而设 $P(x_0, y_0)$,$A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$.

则

$$PA: \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1, PB: \frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1.$$

代入 $P(x_0, y_0)$，得

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1, \frac{x_0x_2}{a^2} + \frac{y_0y_2}{b^2} = 1.$$

$\therefore AB$方程为$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$

我们将此处的得到 AB 方程的过程称为 “半代换”, 这个方法在下面的证明中会再次用到. 根据 AB 的方程，我们立刻得到

$$k_{AB} = -\frac{bx_0}{y_0a}, k_{OP} = \frac{y_0}{x_0}, k_{AB} \cdot k_{OP} = -\frac{b^2}{a^2};$$

.

由椭圆中点弦的相关结论，$k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}, \therefore k_{OP} = k_{OM}, \therefore O$、$M$、$P$ 三点共线. □

引理 10.5. P 为蒙日圆上一点，过 P 作椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条切线 PA, PB，AB 与 y 轴交于点 R，F_1F_2 为椭圆的两个焦点. 则：R 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心.

证明. 设 $P(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)$，由 “半代换” 易知

$$AB: \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta}{a^2}x + \frac{\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta}{b^2}y = 1$$

与 $x = 0$ 联立，得 $R(0, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta})$.

设 R' 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心，则设 $R'(0, r)$, 有:

$$r^2 + c^2 = (\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)^2 + [(\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta) - r]^2$$

[4]为了与定理10.4.2的证明相呼应，此处给出解析的方式，亦可以使用交比来证明此引理

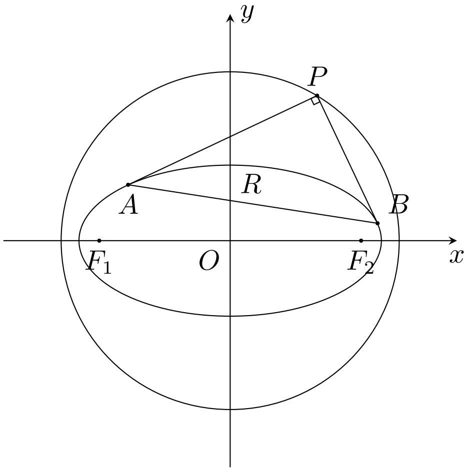


图 10.44: 引理10.5

代入 $c^2 = a^2 - b^2$ 解得 $r = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta}$.

$\therefore R'(0, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta})$. $\therefore R = R'$, $\therefore R$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心. □

定理 10.4.2. P 为蒙日圆上一点，过 P 作椭圆 $\Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条切线 PA, PB，F_1 为椭圆的一个焦点，则 $\dfrac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBF_1} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

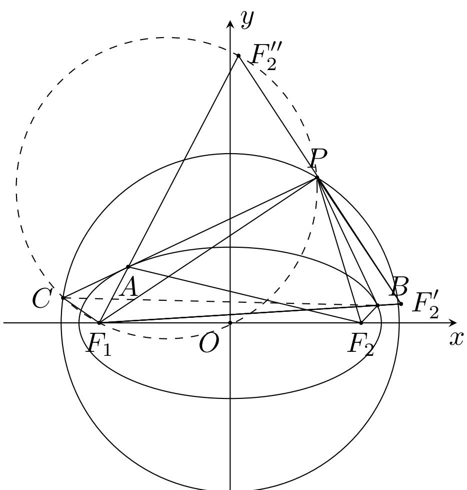


图 10.45: 定理10.4.2

证明. 延长 PA, PB 分别交 $\odot O$ 于点 C, D，则由 $\angle CPD = 90°$ 知 O 为 CD 中点.

$\because M$ 为 AB 的中点，由引理10.4，P、M、O 三点共线.

$\therefore \angle PBM = \angle MPB = \angle OPD = \angle PDO, \therefore AB // CD$.

$$\therefore \sin\angle PBA = \sin\angle PDC = \frac{PC}{CD} = \frac{PC}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\therefore$ 只需证明

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}PC}{2a\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\angle PBF_1 \Longleftrightarrow 2a\sin\angle PBF_1=PC$$

设 F_2 关于 PB 的对称点为 F_2'，则 F_1,B,F_2' 共线.

$F_1F_2'=F_1B+BF_2'=F_1B+F_2B=2a$.$\therefore$ 只需证明:$|F_1F_2'|\cdot\sin\angle PBF_1=PC$;

即只需证明 $|F_1F_2'|\cdot|PB|\cdot\sin\angle PBF_1=|PB||PC|$, 即证明 $S_{\triangle PF_1F_2'}=\dfrac{PB\cdot PC}{2}$.

$\Longleftrightarrow PF_1\cdot PF_2'=PB\cdot PC$，即只需证明 $PF_1\cdot PF_2=PB\cdot PC$，下面证明这一点.

先证明 $AF_1\cdot AF_2=AC\cdot AP$.※

连接 AD，由中线长公式，有

$$AD^2=\frac{AF_1^2+AF_2^2}{2}-\frac{F_1F_2^2}{4}=\frac{(AF_1+AF_2)^2}{2}-\frac{F_1F_2^2}{4}-AF_1\cdot AF_2$$

$$\Longleftrightarrow AF_1\cdot AF_2=2a^2-c^2-AD^2=a^2+b^2-AO^2$$

考虑点 A 对 $\odot O$ 的幂，有 $AC\cdot AP=AO^2-R^2\Longleftrightarrow AC\cdot AP=a^2+b^2-AD^2$.

从而 $AF_1\cdot AF_2=AP\cdot AC$，※ 得证.

作 F_2 关于 PA 的对称点 F_2''. 由引理10.1,F、A、F_2'' 共线，且 $AF_2''=AF_2$.

$\therefore AF_1\cdot AF_2''=AP\cdot AC$,$\therefore P$、$F_1$、$C$、$F_2''$ 共圆.

连接 CF_1,CF_2'', 则 $\angle PCF_1+\angle PF_1A=\angle F_1F_2''P+\angle F_2F_1''P=90^\circ$.

由引理10.2，有 $\angle PF_2B=\angle PF_2'B=90^\circ-\angle PF_1B=90^\circ-\angle PF_1A$.

$\therefore\angle PCF_1=\angle PF_2B$.

由引理10.2，又有 $\angle CPF_1=\angle BPF_2$.

$\therefore\triangle CPF_1\backsim\triangle F_2PB$,$\therefore CP\cdot PB=PF_1\cdot PF_2$. □

定理 10.4.3. *P 为椭圆 Γ 的蒙日圆上一点，PA,PB 为 Γ 的两条切线，$PQ\perp AB$ 于 Q，则 Q 的轨迹是一个以 F_1,F_2 为焦点，以 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为半长轴的椭圆.*

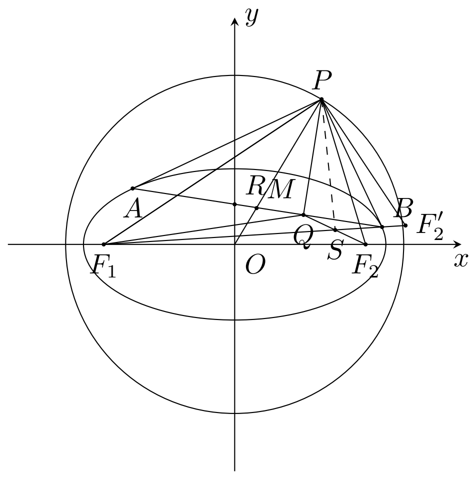


图 10.46: ??

证明. 设 AB 与 y 轴交于 R, M 为 AB 中点, 则由引理10.4, 定理10.4.2知 P,M,O 共线, R 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心.

由于 M 为 AB 的中点, $PA\perp PB\therefore M$ 为 $\triangle PAB$ 的外心,$PQ\perp AB$.

$\therefore PM,PQ$ 为 $\angle F_1AF_2$ 的一对等角线$\because PO$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的 $P-$ 中线,

$\therefore PQ$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的 $P-$ 陪位中线$\because R$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的外心, $RQ\perp PQ$

$\therefore \triangle PQF_1\backsim\triangle F_2QP,\therefore \dfrac{PF_1}{F_2P}=\dfrac{F_1Q}{QP}=\dfrac{PQ}{F_2Q}$.

设 F_2' 为 F_2 关于 BP 的对称点, 由引理10.1, F_1,B,F_2' 共线, 定义 S 为 P 在 F_1B 上的投影.

$$\begin{aligned}\therefore QF_1+QF_2&=QP(\frac{F_1P}{F_2P}+\frac{F_2P}{F_1P})=\frac{QP}{F_1P\cdot F_2P}(F_1P^2+F_2P^2)=\frac{F_1P^2+F_2'P^2}{F_1P\cdot F_2P}QP\\&=\frac{4a^2QP}{F_1P\cdot F_2'P}=\frac{2aQP}{PS}=2a\frac{QP/PB}{PS/PB}=2a\frac{\sin\angle PBQ}{\sin\angle PBS}=2a\frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PBF_1}\\&=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}(\text{定理10.4.2})\end{aligned}$$

从而点 Q 的轨迹是一个以 F_1,F_2 为焦点, 以 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为半长轴的椭圆. □

由于笔者的水平有限, 本文存在一些不足之处, 且对于蒙日圆更深层的几何性质未能做出较好的发掘, 欢迎诸位多多指教.

最后, 感谢我的老师高雷对我提出的批评指正, 感谢李昊恩同学对这篇文章做出的整理工作.

10.5 解析几何问题选讲

10.5.1 椭圆中的定点、定直线、定值问题

例 10.37 ("手电筒" 模型: 斜率和为定值, 直线过定点). 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 四点 $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),P_4(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A,B 两点, 若 $k_{P_2A}+k_{P_2B}=-1$, 证明: 直线 l 过定点.

我们先给出如下命题:

命题 10.9. 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 点 A 是 E 上的定点, B,C 是 E 上的动点. 若 $k_{AB}+k_{AC}=\lambda\neq 0$, 则直线 BC 过定点.

这个命题俗称 "手电筒" 模型, 我们会在解具体问题的过程中给出证明方法.

在知道直线 BC 过定点的前提下, 如何快速求出定点具体是谁呢? 我们有如下理解方式:

如图10.47所示, 不妨记定点为 D, 记 A 点关于 x 轴的对称点为 A', 当点 B 和点 C 无限接近时, 直线 BC 的极限是 A' 点处的切线.

另一方面, 当 C 点和 B 点无限接近时, 直线 AC 的极限是 A 点处的切线, 所以这个过程中 k_{AC} 的极限是 A 点处的切线斜率, 而直线 BC 和直线 AB 重合.

因为直线 BC 过定点 D，那么 BC 的两种极限情况的交点就是我们要求的定点 D. 而这两条直线的斜率都很容易求出：

设 $A(x_0, y_0)$，则 $A'(x_0, -y_0)$.

由"半代换"可知，A 点处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，其斜率为 $-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$. 考虑第二个极限过程，$k_{AC}\to-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$，所以此时直线 AB 斜率的极限 $k_{AB}=\lambda-k_{AC}=\lambda+\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$，所以此时直线 BC 的方程为：

$$y-y_0=(\lambda+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0})(x-x_0).$$

再考虑第一个极限过程，此时直线 BC 的极限是 A' 点处的切线，由半代换可知其方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

联立以上两个直线方程

$$\begin{cases}y-y_0=(\lambda+\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0})(x-x_0),\\ \dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1.\end{cases}$$

即可解得点 D 的坐标（值得注意的是在考试的时候，求定点的过程是不需要展示给阅卷老师的，以上方法仅仅是帮助我们算出正确答案，我们只需要写出规范完整的解析法过程就可以了）.

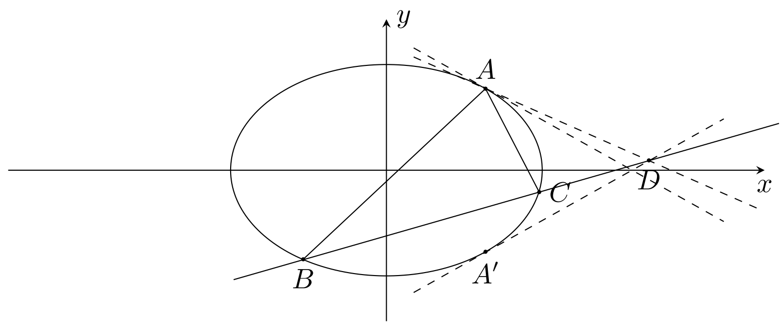


图 10.47: 快速计算定点的方案

分析：回到题目本身，容易计算出椭圆的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

用前面介绍的方法可以快速求出定点，如图10.48所示，$P_2'(0,-1)$ 处的切线为 $y=-1$. 当 A 点无限接近点 P 时，PB 的方程为：

$$y-1=(-1+\frac{1}{4}\times\frac{0}{1})x=-x.$$

联立以上两个直线方程

$$\begin{cases}y=-1,\\ y-1=-x.\end{cases}$$

解得 $x=2$，即所求定点为 $(2,-1)$.

> 既然定点为 $(2,-1)$，如果设直线 $BC: y=kx+m$，根据第九章含参直线过定点的理论，我们需要得到的是参数 k 和 m 之间的一次关系式 $m=-2k-1$. 因此，解析法的过程应是将已知条件 $k_{P_2A}+k_{P_2B}=-1$ 专化为关于两根之和与两根之积的表达式，再根据二次方程根与系数的关系“设而不求”整体代入，化简得到 $m=-2k+1$，具体解题过程如下：

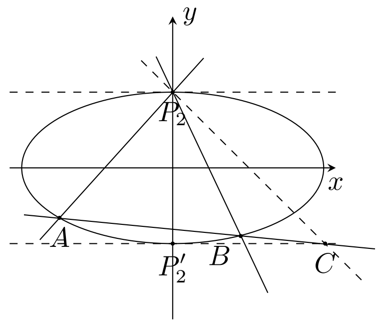


图 10.48: 计算定点

(1) *解.* 由于 P_3,P_4 两个点关于 y 轴对称，故由题设可知 C 经过 P_3,P_4 两个点.
又因为 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}>\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}$，所以 C 不经过点 P_1，所以点 P_2 在 C 上.
因此

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a^2=4 \\ b^2=1 \end{cases}$

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ♡

(2)

证明. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

① 当直线 AB 的斜率存在时，设直线 $l: y=kx+m$，因为直线不过 P_2，所以 $m\neq 1$.
联立：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \\ y=kx+m. \end{cases}$$

得：

$$(4k^2+1)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0.$$

由二次方程根与系数的关系可知

$$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}, x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{4k^2+1}.$$

$$\begin{aligned} k_{P_2A}+k_{P_2B} &= \frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{x_2(y_1-1)+x_1(y_2-1)}{x_1x_2} \\ &= \frac{x_2y_1+x_1y_2-(x_1+x_2)}{x_1+x_2}. \end{aligned}$$

而

$$x_2y_1+x_1y_2=x_2(kx_1+m)+x_1(kx_2+m)=m(x_1+x_2)+2kx_1x_2$$
$$=m\cdot(-\frac{8km}{4k^2+1})+\frac{8k(m^2-1)}{4k^2+1}=-\frac{8k}{4k^2+1}.$$

代入计算得（注意到这里各项的分母都相同，只代入分子即可）：

$$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{-8k+8km}{4(m^2-1)}=\frac{-8k(m-1)}{4(m+1)(m-1)}$$
$$=-\frac{8k}{4(m+1)}=-1.$$

化简得 $m=-2k-1$.

所以直线 BC 的方程为 $y=kx-2k+1=k(x-2)-1$，所以 BC 过定点 $(2,-1)$.

② 当斜率不存在时，$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，此时

$$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_1}=-1.$$

解得 $x_1=x_2=2$，$y_1=y_2=0$，不符合题意.

综上所述，l 过定点 $(2,-1)$. □

例 10.38 (“手电筒”模型：斜率积为定值，直线过定点). 1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

(1) 求 C 的方程;

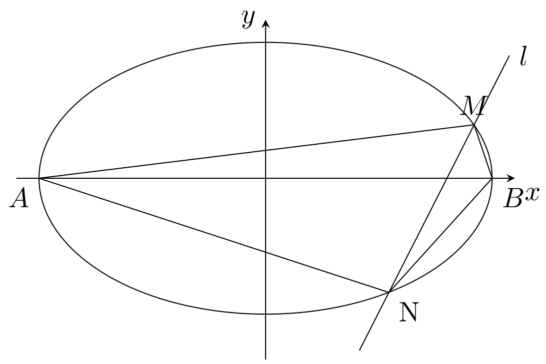
(2) 点 M,N 在 C 上，且 $AM\perp AN$.

① 证明：直线 MN 过定点.

② 作 $AD\perp MN$ 于 D，证明存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

2. 如图所示，已知 A,B 为椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右顶点，直线 l 与椭圆 C 交于点 M,N，设 AM,BN 的斜率 k_1,k_2，且 $k_1:k_2=1:9$.

(1) 证明：直线 l 过定点.



这是“手电筒”模型的另一种情况：斜率之积为定值，直线过定点. 我们先给出如下命题：

命题 10.10. 在椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，点 A 是 E 上的定点，B,C 为 E 上的动点，若 $k_{AB}\cdot k_{AC}=\lambda(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2})$，则直线 BC 过定点.

同样，我们给出一种快速求出定点的方案.

一方面，当点 C 和点 A 无限接近时，直线 AC 的极限为点 A 处的切线，此时直线 AB 与直线 BC 重合. 因为点 A 处的切线方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，所以 $k_{AC}\to -\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$，所以此时 $k_{BC}=k_{AB}=\dfrac{\lambda}{k_{AC}}=-\dfrac{\lambda a^2y_0}{b^2y_0}$，直线 BC 的方程为

$$y-y_0=-\frac{\lambda a^2y_0}{b^2y_0}(x-x_0).$$

另一方面，考虑一个极限过程，当直线 AB 的斜率趋近于 0 即直线 AB 无限接近 "横线" 时，直线 AC 的斜率趋近于无穷，即直线 AC 无限接近 "竖线". 设 A 点关于 x 轴的对称点为 $A_1(x_0,-y_0)$，关于 y 轴的对称点为 $A_2(-x_0,y_0)$，则此时 BC 和 A_1A_2 重合，容易得到 A_1A_2 的方程为

$$y=-\frac{y_0}{x_0}x.$$

联立以上两个方程

$$\begin{cases}y-y_0=-\dfrac{\lambda a^2y_0}{b^2y_0}(x-x_0),\\ y=-\dfrac{y_0}{x_0}x.\end{cases}$$

由此可以解出定点的坐标.

分析：下面分析第 1 题，容易计算得椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. 第 (2) 问的第 ① 小问是一个斜率乘积为定值的手电筒模型，椭圆在点 A 处的切线方程为

$$\frac{2x}{6}+\frac{y}{3}=1.$$

其斜率为 -1，所以当 N 点无限接近 A 时，直线 AM 的斜率的极限为 1，直线 MN 也就是直线 AM（注意此时两者重合）的方程为

$$y-1=x-2\Rightarrow y=x-1.$$

作 A 点关于 x 轴的对称点 $A_1(2,-1)$ 和关于 y 轴的对称点 $A_2(-2,1)$，直线 A_1A_2 的方程为

$$y=-\frac{1}{2}x.$$

联立 $\begin{cases}y=x-1,\\ y=-\dfrac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，所以定点的坐标为 $(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$.

因此，如果设直线 $MN:y=kx+m$，那么我们需要得到 $m=-\dfrac{2}{3}k-\dfrac{1}{3}$. 由此我们可以用解析法写出这一小问的解题过程.

第 ② 小问只是 ① 小问的一个简单推论，有了第 ① 问的结论，如图10.49所示，点 $E(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$ 是直线 MN 上的定点，且 $AD\perp ED$，所以点 D 在以 AE 为直径的圆上，因此圆心就是所求的定点 Q，其坐标为 $(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$.

下面我们给出第 1 题完整解题过程.

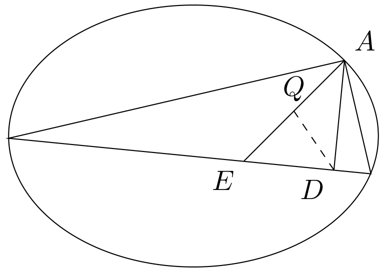


图 10.49:

(1) 解. 因为 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，所以椭圆方程为

$$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

将 $A(2,1)$ 代入得 $b^2=3$，所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ♡

(2) ①

证明. 1° 若直线 MN 的斜率不存在，设 MN 为 $x=x_0$，则 $M(x_0,y_0)$，$N(x_0,-y_0)$，由 $AM\perp AN$ 知

$$(x_0-2,y_0-1)\cdot(x_0-2,-y_0-1)=0\Rightarrow y_0^2=x_0^2-4x_0+5.$$

又因为 M 在椭圆上 $\Rightarrow x_0^2+2y_0^2-6=0$，所以 $x_0=\dfrac{2}{3}$ 或 2（舍去），所以 MN 为 $x=\dfrac{2}{3}$.

2° 若直线 MN 斜率存在，设 $MN: y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立

$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 消去 y 得

$$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-6=0.$$

由二次方程根与系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-6}{2k^2+1}.$$

所以

$$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=-\frac{4k^2m}{2k^2+1}+\frac{4k^2m+2m}{2k^2+1}=\frac{2m}{2k^2+1}.$$

$$y_1y_2=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\frac{2m^2k^2-6k^2}{2k^2+1}-\frac{4k^2m^2}{2k^2+1}+\frac{2k^2m^2+m^2}{2k^2+1}=\frac{m^2-6k^2}{2k^2+1}.$$

因为 $AM\perp AN$，所以 $\dfrac{y_1-2}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-2}{x_2-1}=-1$ 即

$$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0.\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2-2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+5=0$$

代入得

$$2m^2-6+m^2-6k^2+8km-2m+5(2k^2+1)=0\Rightarrow 3m^2+4k^2+8km-2m-1=0.$$

(这里由于我们要得到的式子是 $m=-\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$，所以这个二次式必有一个因式是 $(3m+2k+1)$，观察可知另一个因式是 $(m+2k-1)$. 如果读者知道“双十字相乘法”的技巧，也可以直接做因式分解. 事实上，另一个因式产生的原因是，过定点 A 的直线也能够使得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$ 恒成立（此时对应的情况是 M,N 中至少有一点与点 A 重合，从而 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{AN}$ 中至少有一个为零向量.)

化简得

$$(3m+2k+1)(m+2k-1)=0.$$

所以 $m=-\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$ 或 $m=1-2k$.

当 $m=1-2k$ 时，直线 MN 为 $y=k(x-2)+1$，过点 $A(2,1)$，舍去.

当 $m=-\frac{2}{3}k-\frac{1}{3}$ 时，直线 MN 为 $y=k(x-\frac{2}{3})-\frac{1}{3}$，过定点 $E(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$. □

②

证明. 因为 $AD\perp ED$, 所以 D 点在以 AE 为直径的圆上. 取 AE 的中点 $Q(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$, 则 $DQ=\frac{1}{2}AP=\frac{2\sqrt{2}}{3}=$ 定值. □

分析：接下来分析第 2 题. 根据题给条件以及椭圆的第三定义，我们有

$$k_{AM}=\frac{1}{9}k_{BM},k_{BM}\cdot k_{AN}=-\frac{9}{25}.$$

由此立刻得 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\frac{1}{25}$，这是一个以 A 为顶点的“手电筒”，根据命题10.10可知直线 MN 过定点，下面计算定点的坐标.

显然该定点在 x 轴上, 不妨设 B,D 关于 x 轴对称, 设定点为 $(t,0)$, 则有 $\frac{t-5}{t+5}=-\frac{k_1}{k_2}=-\frac{1}{9}$, 解得 $t=4$，因此定点坐标是 $(4,0)$.

2. 解. 设 $N(x_N,y_N)$，则有 $\frac{x_N^2}{25}+\frac{y_N^2}{9}=1$，也即 $\frac{(x_N-5)(x_N+5)}{25}=-\frac{y_N^2}{9}$.

所以 $k_{AN}=\frac{y_N}{x_N+5}=-\frac{x_N-5}{y_N}\cdot\frac{9}{25}=-\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{k_{BN}}$，所以 $k_{AM}\cdot k_{AN}=k_{AM}\cdot(-\frac{9}{25})\cdot\frac{1}{k_{BN}}=\frac{1}{9}\cdot(-\frac{9}{25})=-\frac{1}{25}$.

若直线 MN 的斜率不存在, 则设 $MN:x=x_0$, 由 $k_{AM}:k_{BN}=1:9$, 则有 $\frac{x_0-5}{x_0+5}=-\frac{k_{AM}}{k_{BN}}=-\frac{1}{9}$，解得 $x_0=4$，所以直线 MN 的方程为 $x=4$.

若直线 MN 的斜率存在, 设 $MN:y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 得

$$(25k^2+9)x^2+50kmx+25m^2-225=0.$$

由二次方程的根与系数的关系知 $x_1+x_2=-\frac{50km}{25k^2+9},x_1x_2=\frac{25m^2-225}{25k^2+9}$.

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1x+x_2)+m^2$.

由前面的分析，我们计算

$$\begin{aligned}
k_{AM}k_{AN} &= \frac{y_1}{x_1+5}\cdot\frac{y_2}{x_2+5} = \frac{k^2(x_1+x_2)+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2+5(x_1+x_2)+25} \\
&= \frac{k^2(25m^2-225)-50k^2m^2+m^2(25k^2+9)}{25m^2-225+25(25k^2+9)+5\times(-50km)} = \frac{9m^2-225k^2}{m^2+25k^2-10km} = \frac{9(m-5k)(m+5k)}{25(m-5k)^2} \\
&= \frac{9(m+5k)}{25(m-5k)} = -\frac{1}{25}.
\end{aligned}$$

因为 $m-5k\neq 0$, 即 $9(m+5k)=-m+5k$, 整理得 $m=-4k$, 所以 $MN: y=kx-4k=k(x-4)$.

综上所述，MN 过定点 $(4,0)$. ♡

下面我们讨论极点极线的概念，以及极点极线为背景的一些解析几何问题.

我们知道，过椭圆上一点 (x_0,y_0) 的切线方程是 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，而当点在椭圆的外部时，直线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 恰好是由该点确定的切点弦方程. 当 (x_0,y_0) 在椭圆内部时，直线 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 具有什么特殊的性质呢?

定义 10.7 (极点、极线). 给定椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和不在椭圆上的一点 $P(x_0,y_0)$，称直线 $l_P:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 为点 P 关于椭圆 C 的极线，点 P 称为直线 l_P 关于椭圆 C 的极点.

根据前面的讨论，我们立刻有如下的命题:

命题 10.11. 若点 P 在椭圆 C 外，则其极线 l_P 为点 P 对应的切点弦所在直线.

焦点、准线也是特殊的极点和极线.

命题 10.12. 给定椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则其右焦点 $(c,0)$ 的极线就是右准线 $x=\dfrac{a^2}{c}$，左焦点 $(-c,0)$ 的极线就是左准线 $x=-\dfrac{a^2}{c}$.

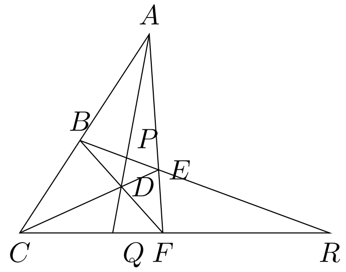
证明. 根据定义，$(c,0)$ 的极线方程是 $\dfrac{c\cdot x}{a^2}+\dfrac{b\cdot 0}{b^2}=1$，化简得 $x=\dfrac{a^2}{c}$，即右焦点的极线是右准线，同理左焦点的极线是左准线. □

定理 10.5.1. 设 P 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内一点，过点 P 任意作 C 的割线 l 交 C 于 A,B 两点，则直线 l 上 P,A,B 的第四调和点 Q（即使得 $\dfrac{PA}{PB}=-\dfrac{QA}{QB}$ 成立的点 Q，这里线段长度均为有向长度）的轨迹是一条直线 l_P，这条直线就是点 P 的极线.

以上定理实际上给出了极线的几何定义.

命题 10.13 (完全四边形的调和性). 直线 l 上有线段 ST 和点 X,Y，若 $\dfrac{XS}{XT}=-\dfrac{YS}{YT}$（这里线段长度均为有向长度），则称 X,Y 调和分割线段 ST.

在完全四边形 $ABCDEF$（即两两相交，但任意三条不共点的四条直线以及它们的六个交点组成的平面图形）中，AD,BE,CF 分别交于 P,Q,R，则 Q,R 调和分割 CF，P,Q 调和分割 AD，P,R 调和分割 BE.



证明. 考虑 $\triangle ACF$ 与 D，由塞瓦定理可知

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CQ}{QF}\cdot\frac{FE}{EA}=1.$$

对直线 BE 截 $\triangle ACF$ 用梅涅劳斯定理，得

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CR}{RF}\cdot\frac{FE}{EA}=1.$$

比较两式立刻得到 $\dfrac{|CQ|}{|QF|}=\dfrac{|CR|}{|RF|}$，即 Q,R 调和分割 CF.

同理可以得到另外两组调和分割的关系. □

命题 10.14. 设点 P 为椭圆 C 内一点，过点 P 作椭圆 C 的两条割线 AB 和 CD，设 AC 和 BD，AD 和 BC 分别交于 S,T，则 ST 所在直线就是 P 的极线 l_P.

证明. 设直线 CD 与 ST 交于点 X，直线 AB 与 ST 交于点 Y，则对完全四边形 $SACBTD$，由命题10.13可知 P,X 调和分割 CD，P,Y 调和分割 AB，根据定理10.5.1以及两点确定一条直线可知 ST 所在直线就是 P 点的极线. □

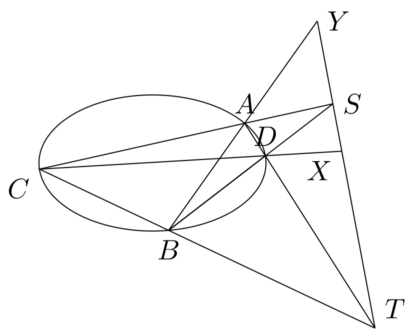


图 10.50:

例 10.39. 点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内部，点 R 是直线 OP 与直线 $l_P:\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 交点，线段 OR 交椭圆 C 于点 Q. 证明：$OP\cdot OR=OQ^2$.

证明. 事实上，设直线 OP 与椭圆 C 的另一个交点为 Q'. 由定义可知 l_P 是点 P 的极线，根据极线的性质可知 P,R 调和分割 QQ'，即 $\dfrac{|PQ|}{|PQ'|}=\dfrac{|RQ|}{|RQ'|}$，即 $\dfrac{|OQ|-|OP|}{|OQ'|+|OP|}=\dfrac{|OR|-|OQ|}{|OR|+|OQ'|}$，再根据椭圆的对称性知 $|OQ|=|OQ'|$，代入化简得 $|OP|\cdot|OR|=|OQ|^2$.

用解析法也可以证明这一结论，不妨设 $Q(\lambda x_0, \lambda y_0)$，则点 Q 处椭圆的切线为 $l_2 : \frac{\lambda x_0 x}{a^2} + \frac{\lambda y_0 y}{b^2} = 1$，过点 P 作椭圆的中点弦，则中点弦所在直线为 $l_1 : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$.

根据点 Q 在椭圆上可知 $\lambda^2(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}) = 1$，即 $\lambda^2 = \frac{a^2b^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}$.

因为 l_1, l_2, l_P 三者平行，设三者的截距分别为 c_1, c_2, c_P，则由相似三角形可知 $OQ^2 = OP \cdot OR$ 当且仅当 $c_2^2 = c_1 c_P$.

而根据直线方程立刻得到

$$c_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2}{y_0} + y_0, c_P = \frac{b^2}{y_0}, c_2 = \frac{b^2}{\lambda y_0}.$$

$$c_2^2 = \frac{b^4}{\lambda^2 y_0^2} = \frac{b^4}{\frac{a^2b^2}{b^2x_0^2+a^2y_0^2} \cdot y_0^2} = \frac{b^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)}{a^2y_0^2}.$$

$$c_1 c_P = \frac{b^2}{y_0} \cdot (y_0 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0^2}{y_0}) = \frac{b^2}{y_0} \cdot \frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}{a^2y_0} = \frac{b^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)}{a^2y_0^2}.$$

这就证明了 $c_2^2 = c_1 c_P$. □

定理 10.5.2 (配极性质). *给定椭圆 C，设点 P 的极线过点 Q，则点 Q 的极线过点 P.*

证明. 设 P, Q 的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，则点 P 的极线为 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$，点 Q 的极线为 $\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$，由假设可知 Q 在 l_P 上，即 $\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1$，倒过来看 $\frac{x_2 x_1}{a^2} + \frac{y_2 y_1}{b^2} = 1$，即点 Q 的极线 $\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1$ 过点 P. □

例 10.40. *已知圆 $C : x^2 + y^2 = 4$，$A(-4, 0), B(0, 4)$，从线段 AB 上一点 P 引切线 PC, PD，分别切圆于 C, D，设 CD 的中点为 M，则当 M 在线段 AB 上运动时，AM 长度的最大值为________________.*

解. 如图10.51所示，AB 所在直线的方程为 $y = x + 4$，因为 CD 是 P 所确定的切点弦，所以 CD 所在直线是 P 的极线，因为 M 在 CD 上，由定理10.5.2可知 P 在 M 的极线上，所以 M 的极线为 $y = x + 4$，这是点 $(-1, 1)$ 的极线，即 CD 恒过点 $T(-1, 1)$. 根据题给条件可知 M 在以 OT 为直径的圆上，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $d \le |AN| + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. ♡

评注 10.40.1. *本题也可以设 $P(t, t+4)$，则中点弦方程为 $tx + (t+4)y = 4$，即 $(x+y)t + 4y - 4 = 0$，可知恒过点 $(-1, 1)$.*

例 10.41 (直线过定点的极点极线背景). *1. 已知椭圆 $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，$F$ 是 C 的右焦点，点 P 为直线 $x = 4$ 上的动点，过点 P 作椭圆 C 的切线 PA, PB，A, B 为切点.*

(1) 求证：A, F, B 三点共线.

2. 已知 A, B 分别为椭圆 $E : \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左、右顶点，G 是上顶点且满足 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$. P 是直线 $x = 6$ 上的动点，PA 与 E 的另一个交点为 C，PB 与 E 的另一个交点为 D.

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明：直线 CD 过定点.

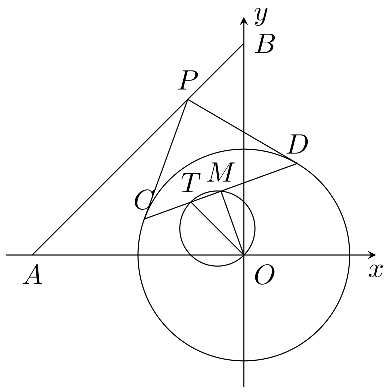


图 10.51:

1. 分析：根据题给条件可知 AB 是 P 的极线，而 $x=4$ 是 F 的极线，因为 P 在 $x=4$ 上，根据定理10.5.2可知 F 在 AB 上. 下面可用解析法写出过程：

解. 设点 $P(4,t)$，$t\in\mathbb{R}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则切线 PA,PB 的方程分别为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

根据 PA,PB 均过点 P 可得

$$x_1+\frac{y_1t}{3}=1,x_2+\frac{y_2t}{3}=1.$$

即 $x_1+\dfrac{t}{3}y_1=1,x_2+\dfrac{t}{3}y_2=1.$

所以直线 AB 的方程为 $x+\dfrac{t}{3}y=1$，显然它过定点 $F(1,0)$，即 A,B,F 三点共线. ♡

2. 分析：如图10.52，假设 CD 过定点 Q，则由定理10.5.1可知点 P 的轨迹是点 Q 的极线，由题给条件立刻知点 Q 的极线是 $x=6$，即点 Q 是直线 $x=6$ 的极点. 根据题给条件可以求出椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$，设 $Q(x_0,y_0)$，则其极线为 $\dfrac{x_0x}{9}+y_0y=1$，显然 $y_0=0$，此时直线为 $x=\dfrac{9}{x_0}$，所以 $x_0=\dfrac{3}{2}$，即直线 $x=6$ 的极点为 $(\dfrac{3}{2},0)$，所以定点为 $(\dfrac{3}{2},0)$. 下面可用解析法写出过程.

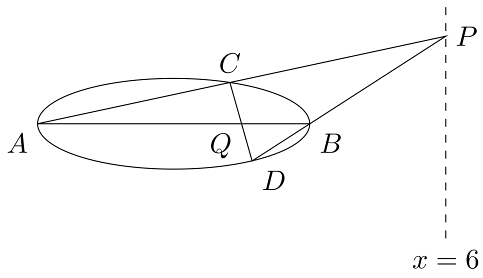


图 10.52:

解. (1) 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1.$

(2) 设 $P(6,t)$，$t\in\mathbb{R}$，则直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{t}{9}(x+3)$，联立 $\begin{cases}y=\dfrac{t}{9}(x+3),\\x^2+9y^2-9=0,\end{cases}$ 消去

y，得到 $(t^2+9)x^2+6t^2x+9t^2-81=0$，由二次方程根与系数的关系可知 $x_Ax_C=\dfrac{9t^2-81}{t^2+9}$，所以 $x_C=\dfrac{27-3t^2}{t^2+9}$. 又因为 C 在直线 AP 上，所以 $y_C=\dfrac{6t}{t^2+9}$，所以点 C 的坐标为 $(\dfrac{27-3t^2}{t^2+9},\dfrac{6t}{t^2+9})$.

同理,直线 BP 的方程为 $y=\dfrac{t}{3}(x-3)$,联立 $\begin{cases} y=\dfrac{t}{3}(x-3), \\ x^2+9y^2-9=0, \end{cases}$ 消去 y,得到 $(t^2+1)x^2-6t^2x+9t^2-9=0$，由二次方程根与系数的关系可知 $x_Bx_D=\dfrac{9t^2-9}{t^2+1}$，因为 $x_B=3$，所以 $x_D=\dfrac{3t^2-3}{t^2+1}$. 又因为 D 在直线 BP 上，所以 $y_D=-\dfrac{2t}{t^2+1}$，所以点 D 的坐标为 $(\dfrac{3t^2-3}{t^2+1},-\dfrac{2t}{t^2+1})$.

设直线 CD 与 x 轴的交点为 $Q(q,0)$，若直线 CD 的斜率存在，由 $k_{CQ}=k_{DQ}=k_{CD}$ 可知 $\dfrac{\frac{6t}{t^2+9}}{\frac{27-3t^2}{t^2+9}+q}=\dfrac{-\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{3t^2-3}{t^2+1}-q}$，上述方程化简为 $9+3q+(3q-9)t^2=27-9q-(q+3)t^2$，$\forall t\in\mathbb{R}$，不妨取 $t=0$, 则 $9+3q=27-9q$, 解得 $q=\dfrac{3}{2}$, 经检验可知 $q=\dfrac{3}{2}$ 时, $9+3q+(3q-9)t^2=27-9q-(q+3)t^2$ 成立，$\forall t\in\mathbb{R}$，所以直线 CD 与 x 轴的交点为定点 $Q(\dfrac{3}{2},0)$.

若直线 CD 的斜率不存在，由 $x_C=x_D=q$ 可知 $t^2=3$，$q=x_C=\dfrac{27-9}{3+9}=\dfrac{3}{2}$，所以直线仍过 $(\dfrac{3}{2},0)$.

综上所述，直线 CD 过定点 $(\dfrac{3}{2},0)$. ♡

评注 10.41.1. 这两个问题中的极线都是由极点极线的调和分割定义生成的，其处理方式都是将极线参数化. 由于在这两个例题中，极线都与 y 轴平行，因此这两个问题的计算量并不很大.

例 10.42 (用对称性简化一个定点问题的计算). 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(2,0)$，$B,C$ 是 E 上的动点，且 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$.

证明：BC 过定点.

分析：这个问题是之前讨论过的“手电筒”模型，但是在本例中“手电筒的顶点”在坐标轴上，此时可以用对称性来简化计算. 作点 B,C 关于 x 轴的对称点 B',C'，显然，直线 $B'C'$ 也满足 $k_{AB'}\cdot k_{AC'}=-1$，所以 $BC,B'C'$ 的交点就是定点. 因为直线 $BC,B'C'$ 关于 x 轴对称，所以定点一定在 x 轴上，设定点 $P(t,0)$，当直线 BC 的斜率不存在时，因为 $BA\perp CA$，所以 $AP=BP$，所以可设 B 点的坐标为 $(t,2-t)$，代入椭圆方程得 $\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{(2-t)^2}{2}=1$，解得 $t=2$（舍去）或 $t=\dfrac{2}{3}$，所以，BC 过定点 $(\dfrac{2}{3},0)$.

解. 设直线 $BC:x=ty+m$, 代入直线 $x^2+2y^2=4$ 得 $(ty+m)^2+2y^2=4$, 整理得 $(t^2+2)y^2+2tym+m^2-4=0$. 设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，根据二次方程根与系数的关系可知 $y_1y_2=\dfrac{m^2-4}{t^2+2}$,$y_1+y_2=-\dfrac{2tm}{t^2+2}$.

因为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2\\
&= t^2y_1y_2+mt(y_1+y_2)+m^2-2(t(y_1+y_2)+2m)+4+y_1y_2\\
&= (t^2+1)y_1y_2+(m-2)t(y_1+y_2)+(m-2)^2\\
&= \frac{(t^2+1)(m^2-4)+(m-2)t(-2tm)+(m-2)^2(t^2+2)}{t^2+2}\\
&= \frac{m^2t^2-4t^2+m^2-4-2m^2t^2+4mt^2+m^2t^2+2m^2-4mt^2-8m+4}{t^2+2}\\
&= \frac{3m^2-8m+4}{t^2+2}\\
&= \frac{(3m-2)(m-2)}{t^2+2}=0.
\end{aligned}
$$

所以 $m=\dfrac{2}{3}$ 或 $m=2$（舍去）. 所以直线 BC 的方程为 $x=ty+\dfrac{2}{3}$，过定点 $(\dfrac{2}{3},0)$. ♡

例 10.43 (点在定直线上的极点极线背景). 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 和 $P(1,\dfrac{1}{2})$，过点 P 作直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，过 A,B 两点分别作 C 的切线交于点 Q.

(1) 求点 Q 的轨迹方程;

分析：根据定义，AB 所在直线为 Q 点的极线，根据定理10.5.2，因为 P 点在直线 AB 上，所以 Q 点在 P 点的极线上，即：点 Q 的轨迹方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}y=1$，即 $x+y=2$.

下面是解析法的过程：解. 设点 Q 的坐标为 (x_0,y_0)，A 点的坐标为 (x_1,y_1)，B 点的坐标为 (x_2,y_2)，则根据点 Q 在切线 $AQ:\dfrac{x_1x}{2}+y_1y=1$ 上有

$$\frac{x_1x_0}{2}+y_1y_0=1;$$

根据点 Q 在切线 $BQ:\dfrac{x_2x}{2}+y_2y=1$ 上有

$$\frac{x_2x_0}{2}+y_2y_0=1,$$

所以直线 AB 的方程为 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$，又因为 AB 过 $P(1,\dfrac{1}{2})$，则有 $\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0}{2}=1$，即

$$x_0+y_0=2.$$

故点 Q 的轨迹方程为 $x+y=2$. ♡

例 10.44 (需要处理不对称结构的定直线问题). 已知 A,B 分别是为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左、右顶点. 过点 $(\dfrac{3}{2},0)$ 的直线交椭圆于 C,D 两点. 直线 AC 与直线 BD 交于点 P.

证明：点 P 在定直线上.

分析：根据极点极线知识可知定直线为直线 $x=6$，具体分析参见例10.41.

如果按如下思路处理该问题：设直线 $CD:x=ty+\dfrac{3}{2}$, $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}x^2+9y^2-9=0,\\ x=ty+\dfrac{3}{2},\end{cases}$

得 $4(t^2+9)y^2+12ty-27=0$，由韦达定理得

$$y_1+y_2=-\frac{3t}{t^2+9},y_1y_2=-\frac{27}{4(t^2+9)}.$$

直线 $AC: y=\dfrac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,直线 $BD: y=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,联立得 $\dfrac{y_1}{x_1+3}(x+3)=\dfrac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,

我们希望得到 $\dfrac{x+3}{x-3}$ 为定值 3,即 $\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{y_2(ty_1+\frac{3}{2}+3)}{y_1(y_2+\frac{3}{2}-3)}=\dfrac{ty_1y_2+\frac{9}{2}y_2}{ty_1y_2-\frac{3}{2}y_1}$.

这是一个“不对称”的结构,无法直接代入韦达定理以进一步化简,这里的处理方法有两种:

1°“和积代换”,注意到 $y_1+y_2=-\dfrac{3t}{t^2+9}, y_1y_2=-\dfrac{27}{4(t^2+9)}$,$ty_1y_2=\dfrac{9}{4}(y_1+y_2)$,代入得

$$\frac{x+3}{x-3}=\frac{\frac{9}{4}(y_1+y_2)+\frac{9}{2}y_2}{\frac{9}{4}(y_1+y_2)-\frac{3}{2}y_1}=\frac{\frac{9}{4}y_1+\frac{27}{4}y_2}{\frac{3}{4}y_1+\frac{9}{4}y_2}=\frac{3\cdot(\frac{3}{4}y_1+\frac{9}{4}y_2)}{\frac{3}{4}y_1+\frac{9}{4}y_2}=3.$$

解得 $x=6$,所以点 P 在定直线 $x=6$ 上.

2° 利用椭圆的第三定义代换. 因为 $\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{y_2}{x_2-3}\cdot\dfrac{x_1+3}{y_1}=k_{BD}\cdot\dfrac{1}{k_{AC}}$,而根据椭圆的第三定义可知,$k_{BC}\cdot k_{AC}=-\dfrac{1}{9}$,所以 $\dfrac{1}{k_{AC}}=-9k_{BC}$,所以 $\dfrac{x+3}{x-3}=-9k_{BD}\cdot k_{BC}$. 注意到 CD 过顶点,这形成了一个以 B 为顶点的“手电筒”,根据命题 10.10,$k_{BD}\cdot k_{BC}$ 等于定值,代入韦达定理计算即可:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x-3}&=k_{BD}\cdot\frac{1}{k_{AC}}=-9k_{BD}\cdot k_{BC}\\&=\frac{y_2}{x_2-3}\cdot\frac{-9y_1}{x_1-3}=\frac{-9y_1y_2}{(ty_2+\frac{3}{2}-3)(ty_1+\frac{3}{2}-3)}\\&=\frac{-9y_1y_2}{t^2y_1y_2-\frac{3}{2}t(y_1+y_2)+\frac{9}{4}}\\&=\frac{-9\cdot(-27)}{-27t^2-4\cdot\frac{3}{2}t(-3t)+9(t^2+9)}=3.\end{aligned}$$

解得 $x=6$,所以点 P 在定直线 $x=6$ 上.

作为练习,读者可以尝试着自己完成本题的解答.

例 10.45 (另外一个点在定直线上的极点极线模型). 已知双曲线 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(4,13)$,离心率为 $\sqrt{14}$,直线 $l: x=9$ 交 x 轴于点 A,过点 A 作直线交双曲线 Γ 于 M,N 两点.

(1) 求双曲线 Γ 的方程;

(2) 设 P,Q 是直线 l 上关于 x 轴对称的两个点,证明直线 PM 和 QN 的交点在定直线上.

分析: 本题中, P,Q 两点并不在双曲线上,似乎不能直接使用完全四边形的相关结论(命题10.14)导出极点极线关系,为此,我们回顾命题10.14的证明过程,考虑该命题成立所需要的条件. 在本题中,如图10.53所示,PQ 与 MN 的交点为 A,与命题10.14类似地,我们设 QM 与 PN 交于点 S,PM 和 QN 交于点 T,不妨记直线 ST 为 l_A(稍后将证明它就是 A 的极线),由对称性知 l_A 与 y 轴平行.

设 MN 与 l_A 交于点 Y,则根据定理10.5.1可知 A,Y 调和分割 MN. 但是,与命题10.14的情况不同的是,另一条割线 PQ 与 l_A 平行,并没有公共点,为此,我们对调和分割的定义做如下的推广,即规定允许“无穷远点”的存在:

定义 10.8 (调和分割). 直线 l 上有线段 ST 和点 X,Y,若 $\dfrac{XS}{XT}=-\dfrac{YS}{YT}$(这里线段长度均为有向长度),则称 X,Y 调和分割线段 ST.

特别地,我们允许“无穷远点”的存在,设点 Y 为无穷远点,并且规定 $\dfrac{YS}{YT}=1$,$\forall S,T,S\neq T$. 由此立刻得到,当 X 点平分线段 ST 时,X,Y 调和分割线段 ST.

我们在"延拓的 *Euclid* 平面"上考虑问题，即认为每条直线都有一个无穷远点（两端的无穷远点是同一个点），且平行直线的无穷远点也是同一点（即：平行直线交于无穷远点），在这样的规定下，延拓的 *Euclid* 平面满足：任意两条相异直线有且仅有一个公共点.[5]

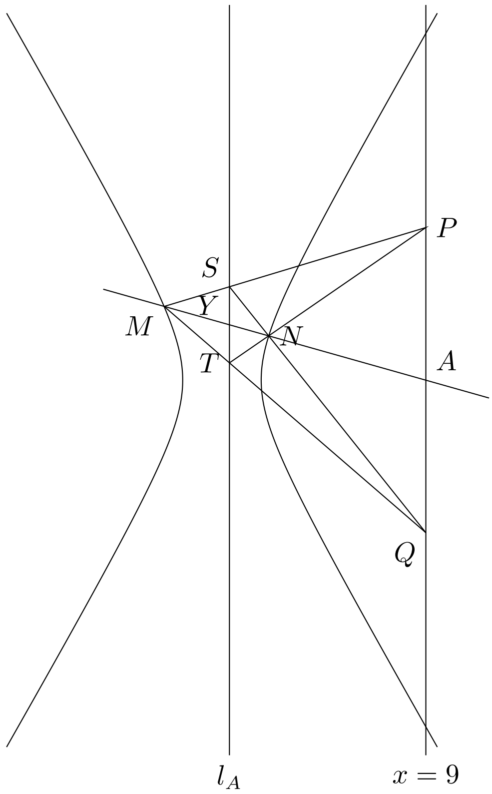


图 10.53:

有了上述定义，我们就可以说，PQ 与 l_A 的交点为 X，其中 X 既是直线 PQ 的无穷远点，也是直线 l_A 的无穷远点. 在直线 PQ 上考虑点 P,X,A,Q，则根据规定，$\dfrac{XP}{XQ}=1$，又因为 P,Q 关于 x 轴对称，所以 $\dfrac{AP}{AQ}=-1$，根据上述定义可知 A,X 调和分割线段 PQ.

这样我们就得到了两组调和分割关系：A,X 调和分割 PQ 以及 A,Y 调和分割 M,N，根据定理10.5.1以及无穷远点的规定可知，X,Y 都在 A 的极线上，再根据两点确定一条直线可知 S,T 都在 A 的极线上，即 l_A 就是 A 的极线. 所以所求定直线为 $x=\dfrac{1}{3}$.

下面是解析法过程，和例10.41中的两个问题在处理思路上是完全一致的.

解. (1) 双曲线 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{39}=1$.

(2)

证明. 设直线 MN 的方程是 $x=my+9$，与双曲线的方程联立得 $(13m^2-1)y^2+234my+1014=0$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(9,t),Q(9,-t)(t\in\mathbb{R},t\neq 0)$，由二次方程根与系数的关系可得 $y_1+y_2=-\dfrac{234m}{13m^2-1},y_1y_2=\dfrac{1014}{13m^2-1}$.

---

[5] 参考资料：俞正光，鲁自群，林润亮. 线性代数与几何（下）. 北京：清华大学出版社，2009

$l_{PM}: y=\dfrac{y_1-t}{x_1-9}(x-9)+t, l_{QN}: y=\dfrac{y_2+t}{x_2-9}(x-9)-t$，联立两个方程立刻得，交点的横坐标 x 满足：

$$2t=(\frac{y_2+t}{x_2-9}-\frac{y_1-t}{x_1-9})(x-9)=(\frac{y_2+t}{my_2}-\frac{y_1-t}{my_1})=\frac{y_1+y_2}{my_1y_2}t(x-9)=\frac{-234m}{1014m}t(x-9)=-\frac{3}{13}t(x-9).$$

所以 $x=\dfrac{1}{3}$. □

♡

例 10.46 (“手电筒”模型：斜率之和为零，斜率为定值). 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，并且过点 $P(2,-1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 Q 在椭圆 C 上，且 PQ 与 x 轴平行，过点 P 作两条直线分别交椭圆于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，若直线 PQ 平分 $\angle APB$，证明 AB 的斜率为定值，并求出这一定值.

分析：先给出如下命题：

命题 10.15. 椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，点 $A(x_0,y_0)$ 是 E 的定点，B,C 是 E 上的动点. 若 $k_{AB}+k_{AC}=0$，则直线 BC 的斜率为定值 $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

这个命题是“手电筒”定点模型的补充.

在这个问题中，当 A,B 两点无限接近时，直线 AB 的极限是 Q 点处的切线，因为 $Q(-2,-1)$，所以点 Q 处的切线为 $-\dfrac{2x}{8}-\dfrac{y}{2}=1$，其斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，所以斜率为定值 $-\dfrac{1}{2}$.

下面是解析法的过程：

解. (1) 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2) 由题意，直线 PA 的斜率存在，设直线 PA 的方程为：

$$y+1=k(x-2).$$

联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=8,\\ y=k(x-2)-1,\end{cases}$ 得

$$(4k^2+1)x^2-8(2k^2+k)x+16k^2+16k-4=0.$$

所以 $2x_1=\dfrac{16k^2+16k-4}{1+4k^2}$，即 $x_1=\dfrac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}$. 又直线 PQ 平分 $\angle APB$，即直线 PA 与直线 PB 的斜率互为相反数，设直线 PB 的方程为

$$y+1=-k(x-2).$$

同理求得 $x_2=\dfrac{8k^2-8k-2}{4k^2+1}$，所以有 $x_1-x_2=\dfrac{16k}{4k^2+1}$.

另一方面，$y_1-y_2=(k(x_1-2)-1)-(-k(x_2-2)-1)=k(x_1+x_2)-4k$. 即

$$y_1-y_2=k(x_1+x_2)-4k=k\cdot\frac{16k^2-4}{4k^2+1}-4k=-\frac{8k}{4k^2+1}.$$

所以直线 AB 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-\frac{8k}{4k^2+1}}{\frac{16k}{4k^2+1}}=-\frac{1}{2}.$$

♡

例 10.47 (“手电筒” 模型: 斜率之积为 $\frac{b^2}{a^2}$, 斜率为定值). 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(2,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，不经过坐标原点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B，且线段 AB 的中点为 D，直线 OD 的斜率为 1，记直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，证明 k_1k_2 为定值.

分析：先给出如下命题：

命题 10.16. 在椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 点 A 是 E 上的定点, B,C 是 E 上的动点, 若 $k_{AB}\cdot k_{AC}=\frac{b^2}{a^2}$, 则直线 BC 斜率为定值. 反之，若直线 BC 斜率为定值，则 $k_{AB}\cdot k_{AC}$ 为定值 $\frac{b^2}{a^2}$.

在本题中，根据椭圆中点弦结论，$k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{k_{OD}}=-\frac{1}{2k_{OD}}=-\frac{1}{2}$. 当 A,B 无限接近时，两者的极限均为点 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，此时 $k_1=k_2=\frac{1-(-\sqrt{2})}{2-(-\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，此时 $k_1k_2=\frac{1}{2}$，即斜率之积为定值 $\frac{1}{2}$. 解. 点差法（过程留给读者）可得 $k_l=-\frac{1}{2}$.

设 $l:y=-\frac{1}{2}x+t$，与椭圆方程联立得

$$3x^2-4tx+4t^2-12=0.$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由二次方程根与系数的关系可得

$$x_1x_2=\frac{4t^2-12}{3},x_1+x_2=\frac{4t}{3}.$$

从而

$$\begin{aligned}
k_1k_2&=\frac{(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\\
&=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{t-1}{2}(x_1+x_2)-2t+t^2+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\\
&=\frac{\frac{t^2-3}{3}-\frac{t-1}{2}\cdot\frac{4t}{3}-2t+t^2+1}{\frac{4(t^2-3)}{3}-2\cdot\frac{4t}{3}+4}\\
&=\frac{\frac{2t^2}{3}-\frac{4t^2}{3}}{\frac{4t^2}{3}-\frac{8t}{3}}\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

♡

例 10.48 (“手电筒” 模型: 直线过定点, 斜率之积为定值). 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左顶点为 A，右焦点为 F，已知 $|AF|=3$，过点 F 且斜率存在的直线交椭圆于 P,N 两点，P 关于原点的对称点为 M.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设直线 AM,AN 的斜率分别为 k_1,k_2，证明:$\exists\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $k_1=\lambda k_2$ 恒成立.

分析：在本题中，直线 PN 过定点，所以 $k_{AN}k_{AP}=$ 定值，当 $PN\perp x$ 轴时，$PF=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{3}{2}$，所以 $k_{PA}=\dfrac{\frac{3}{2}}{1+2}=\dfrac{1}{2}$，$k_{AN}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $k_{AP}k_{AN}=-\dfrac{1}{4}$.

另一方面，由椭圆的第三定义知 $k_{AM}k_{AP}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$. 所以 $k_{AM}/k_{AN}=3$，所以存在 $\lambda=3$，使得 $k_1=3k_2$ 成立. 下面是解析法的过程：

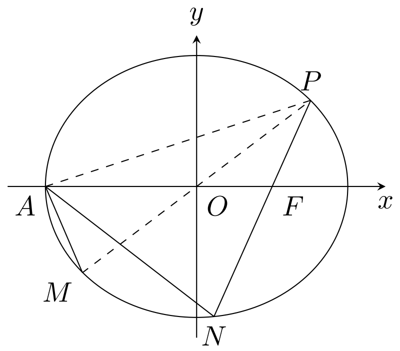


图 10.54:

解. (1) 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)

证明. 取 AP 的中点 B,连接 OS,点差法(过程留给读者)可得 $k_{OS}\cdot k_{AP}=-\dfrac{3}{4}$,所以 $k_{AM}\cdot k_{AP}=-\dfrac{3}{4}$.

设 $P(x_1,y_1)$，$M(x_2,y_2)$，设直线 $PN:x=ty+1$，与椭圆方程联立得

$$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0.$$

由二次方程根与系数的关系，$y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4},y_1y_2=-\dfrac{9}{3t^2+4}$.

$k_{AN}k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{y_1y_2}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9}$

代入化简得

$$k_{AN}k_{AP}=\frac{-9}{-9t^2+3t\cdot(-6t)+9(3t^2+4)}=-\frac{1}{4}.$$

因为 $k_{AP}\neq 0$，所以 $\dfrac{k_{AM}}{k_{AN}}=3$，所以存在 $\lambda=3$，使得 $k_{AM}=\lambda k_{AN}$ 恒成立. □

♡

10.5.2 椭圆中的求值、求范围问题

椭圆中的求值、求范围问题，其基本思路也是将所求几何量转化为与坐标之和、坐标之积有关的表达式，进而根据二次方程根与系数的关系设而不求地整体代入.

例如，求圆锥曲线的弦长：设直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $E:\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ 交于 $P(x_1,y_1)$ 和 $Q(x_2,y_2)$ 两点，将直线 l 的方程与椭圆方程联立，消去 y 得到关于 x 的二次方程：

$$ax^2+bx+c=0.$$

其中系数 a,b,c 与椭圆和直线的参数都有关.

此时，弦长 $d=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

在具体求解几何量的时，关键在于选取合适的计算方案，使得所求几何量可以表示成关于两根之和和两根之积的表达式.

例 10.49. *已知动直线 l 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相切，与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 相交于不同的两个点 A, B. 求原点到 AB 中垂线的最大距离.*

分析：本题是求范围问题，应当以直线 l 的斜率 k 为变量，设 $l: y=kx+m$，根据直线与圆相切的充分必要条件可知 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 即 $|m|=\sqrt{1+k^2}$.

AB 的中点与两根之和有关，可以通过设而不求的方式得到 AB 中点坐标的表达式，进而给出 AB 中垂线的方程，再根据两点之间的距离公式即可求出 O 到 AB 中垂线的距离 $d(k)$，这是一个关于 k 的函数，求这个函数的最大值即可.

下面是解析法的过程：

解. 依题意，若直线 l 的斜率不存在，则 AB 的中垂线就是 x 轴，此时原点到 AB 中垂线的距离为 0.

当 l 的斜率存在时，设 $l: y=kx+m$，因为 l 与椭圆有两个交点，所以 $k\neq 0$. 因为直线 l 与定圆 $x^2+y^2=1$ 相切，即 O 到 l 的距离为 1，即

$$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

依题意，这样的直线必与椭圆交于不同两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立得 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+y^2-9=0, \end{cases}$ 得

$$(9k^2+1)x^2+18kmx+9m^2-9=0.$$

得到 $x_1+x_2=-\dfrac{18km}{9k^2+1}$.

所以 AB 中点 M 的坐标为 $(-\dfrac{9km}{1+9k^2},\dfrac{m}{1+9k^2})$.$AB$ 的中垂线方程为

$$y-\frac{m}{9k^2+1}=-\frac{1}{k}(x+\frac{9km}{9k^2+1}).$$

化简得到 $x+ky+\dfrac{8km}{9k^2+1}=0$.$O$ 到中垂线的距离为

$$d=\frac{|\frac{8km}{9k^2+1}|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|8k|}{|1+9k^2|}=\frac{|8k|}{|1+9k^2|}.$$

下面求 $d(k)=\dfrac{|8k|}{|1+9k^2|}$ 的最大值，根据基本不等式

$$d(k)=\frac{8}{\frac{1}{|k|}+9|k|}\leq\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

其中等号成立当且仅当 $|k|=\dfrac{1}{3}$，所以当 $|k|=\dfrac{1}{3},|m|=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 时，原点到 AB 中垂线的距离取最大值 $\dfrac{4}{3}$. ♡

例 10.50. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点为 M，下顶点为 N，T 是直线 $y=2$ 上的动点，过点 T 的直线 TM,TN 分别交 C 于 E,F 两点，若 $\triangle TMN$ 的面积是 $\triangle TEF$ 面积的 k 倍，求 k 的最大值.

分析：设 EF 与 y 轴的交点为 S，则根据命题10.14可知 T 点在 S 的极线上，而因为 T 在直线 $y=2$ 上，因此 S 就是 $y=2$ 的极点，即 EF 过定点 $(0,\dfrac{1}{2})$. 在本题中，与10.41类似，应以直线 T 的横坐标 s 为参量. 下面是解析法过程.

解. 设直线点 $T(s,2)$，其中 $s\in\mathbb{R}$，则直线 TM 的方程为 $y=\dfrac{1}{s}x+1$，与椭圆的方程联立，消去 y 得 $(4+s^2)x^2+8sx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-\dfrac{8s}{4+s^2}$，所以 $x_E=-\dfrac{8s}{4+s^2}$，点 E 的坐标为 $(-\dfrac{8s}{4+s^2},\dfrac{s^2-4}{4+s^2})$. 同理，直线 TN 的方程为 $y=\dfrac{3}{s}x-1$，与椭圆方程联立消去 y 得 $(s^2+36)x^2-24sx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{24s}{s^2+36}$，所以 $x_F=\dfrac{24s}{s^2+36}$，点 F 的坐标 $(\dfrac{24s}{s^2+36},\dfrac{36-s^2}{s^2+36})$.

设直线 EF 与 y 轴的交点是 $S(0,u)$，若直线 EF 的斜率存在，则由 $k_{EF}=k_{ES}=k_{FS}$ 可知

$$\frac{\frac{s^2-4}{4+s^2}-u}{-\frac{8s}{4+s^2}}=\frac{\frac{36-s^2}{s^2+36}-u}{\frac{24s}{s^2+36}}.$$

整理得 $s^2-2us^2-24u+12=0$.

不妨取 $s=0$，解得 $u=\dfrac{1}{2}$，经检验可知 $u=\dfrac{1}{2}$ 时，$s^2-2us^2-24u+12=0$ 成立，$\forall s\in\mathbb{R}$，所以直线 EF 过定点 $S(0,\dfrac{1}{2})$.

所以：

$$S_{\triangle TMN}=\frac{1}{2}\cdot|s|\cdot 2=|s|.$$

$$S_{\triangle MEF}=\frac{1}{2}|x_E-x_F|\cdot|MS|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\frac{24s}{s^2+36}+\frac{8s}{4+s^2}|=|2s|\cdot|\frac{3s}{s^2+36}+\frac{s}{4+s^2}|.$$

$$S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}|x_F|\cdot 2=|\frac{24s}{s^2+36}|.$$

$$k=\frac{S_{\triangle TMN}}{S_{\triangle TEF}}=\frac{S_{\triangle TMN}}{S_{\triangle TMN}-S_{\triangle FMN}+S_{\triangle MEF}}=\frac{|s|}{|s|-|\frac{24s}{s^2+36}|+|2s|\cdot|\frac{3s}{s^2+36}+\frac{s}{4+s^2}|}=\frac{s^4+40s^2+144}{s^4+24s^2+144}.$$

下面求 $k(s)$ 的最大值，分离常数并根据基本不等式可得

$$k(s)=1+\frac{16s^2}{s^4+24s^2+144}=1+\frac{16}{s^2+\frac{144}{s^2}+24}\le 1+\frac{16}{2\sqrt{144}+24}=\frac{4}{3}.$$

♡

例 10.51. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $M(0,2)$，且右焦点为 $F(2,0)$.

(1) 写出椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F 的直线 l 与椭圆交于 A,B，交 y 轴于点 P，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{PB}=n\overrightarrow{BF}$，求证 $m+n$ 为定值；

(3) 在 (2) 的条件下，若点 P 不在椭圆 C 的内部，点 Q 是点 P 关于原点的的对称点，试求 $\triangle QAB$ 面积的最小值.

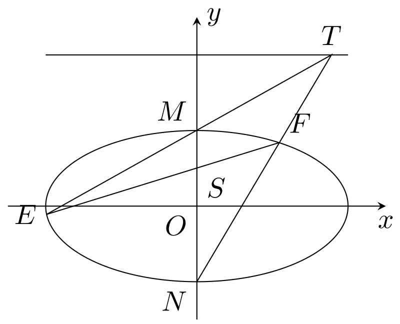


图 10.55:

解. (1)$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)

证明. 设 A,B,P 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$(0,t)$，由 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{AF}$ 可知:

$$(x_1,y_1-t)=m(2-x_1,-y_1).$$

所以 $x_1=2m-mx_1, y_1-t=-my_1$，所以 $x_1=\frac{2m}{m+1}, y_1=\frac{t}{m+1}$.

因为 A 点在椭圆上，所以

$$\frac{(\frac{2m}{m+1})^2}{8}+\frac{(\frac{t}{m+1})^2}{4}=1.$$

整理得 $2m^2+8m-t^2+4=0$.

同理，根据 $\overrightarrow{PB}=n\overrightarrow{BF}$，同理可得 $2n^2+8n-t^2+4=0$.

因为 $A\neq B$，即 $m\neq n$，所以 m,n 为二次方程

$$2x^2+8x-t^2+4=0.$$

的两个根，所以 $m+n=-4$，为定值. □

(3) 根据题意，直线 l 的方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{t}=1$，即 $y=-\frac{t}{2}(x-2)$，与椭圆 C 的椭圆方程联立，消去 y 并整理，得

$$(2+t^2)x^2-4t^2x+4t^2-16=0.$$

根据二次方程根与系数的关系，$x_1+x_2=\frac{4t^2}{t^2+2}, x_1x_2=\frac{4t^2-16}{t^2+2}$.

此时，

$$S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}\cdot|2t|\cdot|x_1-x_2|=|t||x_1-x_2|.$$

所以

$$S^2_{\triangle QAB}=t^2(x_1-x_2)^2=t^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=t^2(\frac{16t^4}{(t^2+2)^2}-\frac{16t^2-64}{t^2+2})=t^2\cdot\frac{32t^2+128}{(t^2+2)^2}=32[1-\frac{4}{(t^2+2)^2}].$$

因为 P 不在 C 的内部，所以 $|t|\geq 2$，所以 $t^2\geq 4$，所以 $S^2_{\triangle QAB}$ 的最小值为 $32\times\frac{8}{9}=\frac{256}{9}$，即 $\triangle QAB$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$. ♡

10.5.3 椭圆中的探究性问题

椭圆中的探究性问题的设问形式常常为"是否存在 ⋯⋯，满足 ⋯⋯"，即判定一个命题的真假. 解答这类问题时，有时需要先假设断言成立，然后按要求证明该断言或者导出矛盾. 这类问题最终通常会转化成前面介绍过的问题，或者是用到前面介绍过的方法.

例 10.52. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其短轴长为 4，离心率为 e_1. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 的渐近线为 $y=\pm x$，离心率为 e_2，且 $e_1e_2=1$.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设椭圆 E 的右焦点为 F，过点 $G(4,0)$ 作斜率不为零的直线交椭圆 E 于 M,N 两点，设 FM，FN 的斜率分别是 k_1,k_2，试判断 k_1+k_2 是否为定值？如果是，试求该定值，如果不是，请说明理由.

在这个问题中，如图10.56所示，$x=4$ 是椭圆的准线，因此是点 F 的极线. 过点 G 作 GN 关于 x 轴的对称直线交椭圆于 M',N'，则根据椭圆的对称性可知 M,M' 和 N,N' 分别关于 x 轴对称，连接 $M'N$，MN'，则根据极点极线的几何定义可知 F 就是 $M'N$ 和 MN' 的交点，由此可知 $\angle MFG=\angle FGN'+\angle FN'G=\angle FNG+\angle FGN=\angle NFO$. 即 $k_1+k_2=0$. 下面是解析法过程:

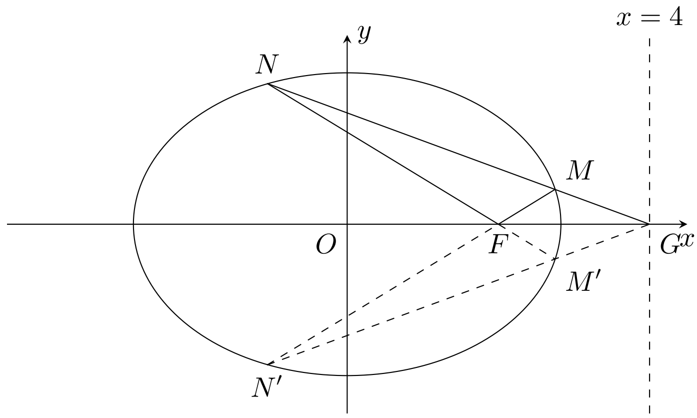


图 10.56:

解. (1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) 设 $MN:y=k(x-4),k\neq 0$，联立 $\begin{cases}y=k(x-4),\\x^2+2y^2=8,\end{cases}$ 消去 y 整理可得

$$(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-8=0.$$

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{32k^2-8}{2k^2+1}$.
此时

$$\begin{aligned}k_1+k_2&=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k(x_1-4)}{x_1-2}+\frac{k(x_2-4)}{x_2-2}\\&=k\cdot\frac{(x_1-4)(x_2-2)+(x_2-4)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=k\cdot\frac{2x_1x_2-6(x_1+x_2)+16}{(x_2-2)(x_2-2)}.\end{aligned}$$

代入化简得

$$2x_1x_2-6(x_1+x_2)+16=\frac{64k^2-16}{2k^2+1}-\frac{96k^2}{2k^2+1}+\frac{32k^2+16}{2k^2+1}=0.$$

即 $k_1+k_2=0$. ♡

例 10.53. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，点 F_1,F_2 分别为其左、右焦点，其右焦点 F_2 到点 $E(-2,-1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$，一个动圆过点 F_2，且与直线 $x=-1$ 相切，记动圆圆心的轨迹为 G.

(1) 在轨迹 G 上有两个点 M,N，椭圆 C 上有两点 P,Q，满足 $\overrightarrow{MF_2}//\overrightarrow{NF_2}$，$\overrightarrow{PF_2}//\overrightarrow{QF_2}$，且 $\overrightarrow{MF_2}\perp\overrightarrow{PF_2}$，求四边形 $MPQN$ 面积的最小值；

(2) 过点 F_1 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A,B，问在直线 $y=x$ 上是否存在点 D，使得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12}$ 是与 k 无关的常数.

分析：在 (1) 中，根据条件有点 G 到 $x=-1$ 的距离和点 G 到点 F 的距离相等. 根据抛物线的定义可知点 G 的轨迹为抛物线 $y^2=4x$. 根据题意知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

设 PQ 的倾斜角为 θ，则直线 MN 的倾斜角为 $\theta\pm\frac{\pi}{2}$. 根据椭圆和抛物线焦点弦长的极坐标方程可知：

$$|PQ|=\frac{3}{1-\frac{1}{4}\cos^2\theta}=\frac{12}{4-\cos^2\theta}.$$

$$|MN|=\frac{4}{\sin^2(\theta\pm\frac{\pi}{2})}.$$

所以四边形 $PMQN$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\frac{12}{4-\cos^2\theta}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{24}{(4-\cos^2\theta)\cos^2\theta}\geq 8.$$

取等号当且仅当 $\cos^2\theta=1$ 即 $\theta=0$，此时四边形 $PMQN$ 的面积取得最小值 8.

对于第 (2) 小问，先假设存在 $D(d,d)$，使得命题成立，然后通过计算 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12}$ 求出满足条件的 d 的值.

解. (1) 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

根据条件有点 G 到 $x=-1$ 的距离和点 G 到点 F 的距离相等. 根据抛物线的定义可知点 G 的轨迹为抛物线 $y^2=4x$.

设 PQ 的倾斜角为 θ，则直线 MN 的倾斜角为 $\theta\pm\frac{\pi}{2}$. 根据椭圆和抛物线焦点弦长的极坐标方程可知：

$$|PQ|=\frac{3}{1-\frac{1}{4}\cos^2\theta}=\frac{12}{4-\cos^2\theta}.$$

$$|MN|=\frac{4}{\sin^2(\theta\pm\frac{\pi}{2})}.$$

所以四边形 $PMQN$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\frac{12}{4-\cos^2\theta}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{24}{(4-\cos^2\theta)\cos^2\theta}\geq 8.$$

(2) 假设存在 $D(d,d)$，使得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12}$ 是与 k 无关的常数.

设直线 $l: y=k(x+1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由 $y=k(x+1)$ 与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$ 联立方程组得

$$(4k^2+3)x^2+8k^2x+4k^2-12=0.$$

所以 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

所以

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12} &= (d-x_1,d-x_2)\cdot(d-x_2,d-y_2)+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=(d-x_1)(d-x_2)+(d-y_1)(d-y_2)+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=x_1x_2-d(x_1+x_2)+d^2+y_1y_2-d(y_1+y_2)+d^2+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=x_1x_2-d(x_1+x_2)+d^2+k^2(x_1x_2+x_1+x_2+1)-dk(x_1+x_2+2)+d^2+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=(1+k^2)x_1x_2+(x_1+x_2)(k^2-dk-d)+2d^2-2dk+k^2+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=(1+k^2)\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}(k^2-dk-d)+2d^2-2dk+k^2+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=(1+k^2)\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}(k^2-dk-d)+2d^2-2dk+k^2+\frac{3k+36}{16k^2+12}\\
&=\frac{(8d^2+8d-5)k^2+(\frac{3}{4}-6d)k+6d^2-3}{4k^2+3}
\end{aligned}$$

令 $\frac{8d^2+8d-5}{4}=\frac{6d^2-3}{3}$，解得 $d=\frac{1}{8}$.

此时 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12}=-\frac{31}{32}$ 是与 k 无关的常数.

所以在之前 $y=x$ 上存在 $D(\frac{1}{8},\frac{1}{8})$，使得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{3k+36}{16k^2+12}$ 是与 k 无关的常数. ♡

10.5.4 与抛物线有关的解析几何问题

我们在讨论抛物线的几何性质，尤其是有关焦点弦的几何性质时曾大量用到了解析几何方法，这是因为抛物线的标准方程形式简单，与有关直线联立时很方便. 当抛物线以 x 轴为对称轴时，其标准方程为 $y^2=2px$，此时我们常常以 t 为直线的参数，即设直线方程为 $x=ty+m$，此时代入抛物线方程时形式很简洁. 同样地，当抛物线以 y 轴为对称轴时，其标准方程是 $x^2=2py$，这时候我们则通常以 k 作为直线的参数，即设直线方程 $y=kx+m$.

另外，抛物线的标准方程 $y^2=2px$ 给出 $x=f(y)=\frac{y^2}{2p}$，其本身具有参数方程的特性，换言之，抛物线 $y^2=2px$ 也可以看成是由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{y^2}{2p}, \\ y=y, \end{cases}$ (y 为参数，$y\in\mathbb{R}$) 给出的.

在抛物线有关的解析几何问题中，也常常用到有关抛物线中点弦、切点弦和焦点弦的相关性质，建议读者自己回顾一下这部分内容.

下面我们给出几个“手电筒模型”的相关命题.

命题 10.17. 设 $P(x_P,y_P)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的定点，A,B 是抛物线上两个动点且满足 $k_{AP}+k_{BP}=\lambda$，其中 λ 为常数且 $\lambda\neq 0$，则直线 AB 过定点.

与椭圆类似，我们可以先考虑一些特殊情形来将定点确定下来. 首先考虑 A 和 B 无限接近的情况，此时直线 AB 极限是点 P 关与 x 轴的对称点 $P'(x_P, -y_P)$ 处的切线：

$$-y_P y = p(x + x_P).$$

另一方面，当 A 点和 P 点无限接近时，直线 PA 的极限是 A 点处的切线，而直线 AB 与直线 PB 重合.A 点处的切线方程是 $y_P y = p(x + x_P)$，其斜率为 $\dfrac{p}{y_P}$，所以此时直线 PB 斜率的极限 $k_{PB} = \lambda - \dfrac{p}{y_P}$，所以 $k_{AB} = \lambda - \dfrac{p}{y_P}$. 此时直线 AB 的方程为

$$y - y_P = (\lambda - \frac{p}{y_P})(x - x_P).$$

联立 $\begin{cases} y = -\dfrac{p}{y_P}(x + x_P), \\ y - y_P = (\lambda - \dfrac{p}{y_P})(x - x_P), \end{cases}$ 得
$x = x_P - \dfrac{2y_P}{\lambda}$，$y = \dfrac{2p}{\lambda} - y_P$. 所以该定点为 $(x_P - \dfrac{2y_P}{\lambda}, \dfrac{2p}{\lambda} - y_P)$.
下面我们用解析几何方法证明上述命题.

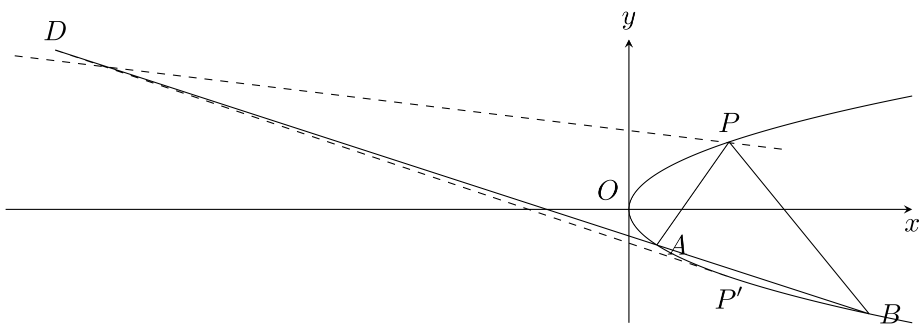


图 10.57:

证明. 设直线 $AB: x = ty + a$，代入抛物线方程得 $y^2 - 2pty - 2pa = 0$. 根据二次方程根与系数的关系，$y_A + y_B = 2pt, y_A y_B = -2pa$(注意，我们已经知道抛物线焦点弦的两端点的横坐标之积和纵坐标之积都与焦点弦所在直线的倾斜角无关，更一般的结论是，对于任意的弦，其两端点的横坐标之积和纵坐标之积都与该弦所在直线的倾斜角无关，而只依赖于该直线的截距).

$k_{AP} + k_{BP} = \dfrac{p}{\frac{y_A + y_P}{2}} + \dfrac{p}{\frac{y_B + y_P}{2}} = 2p \cdot \dfrac{2y_P + y_A + y_B}{y_A y_B + y_P(y_A + y_B) + y_P^2}$.

代入化简得

$$k_{AP} + k_{BP} = \frac{2p(2y_P + 2pt)}{2pty_P - 2pa + y_P^2} = \frac{4p(y_P + pt)}{2pty_P - 2pa + y_P^2}.$$

所以 $a = a(t) = \dfrac{1}{2p}(y_P^2 + 2pty_P - \dfrac{4p}{\lambda}(y_P + pt))$.

直线的方程为：$x = ty + a(t) = t(y + y_P - \dfrac{2p}{\lambda}) + \dfrac{y_P^2}{2p} - \dfrac{2y_P}{\lambda}$.

所以 AB 过定点 $D(x_P - \dfrac{2y_P}{\lambda}, \dfrac{2p}{\lambda} - y_P)$. □

命题 10.18. 设 $P(x_P, y_P)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的定点，A, B 是抛物线上两个动点且满足 $k_{AP} + k_{BP} = 0$，则直线 AB 的斜率为定值.

我们考虑 A,B 两点无限接近的情况,则此时直线 AB 的极限为 P 点关于 x 轴的对称点 $P'(x_P,-y_P)$ 处的切线，由此立刻知斜率的定值为 $-\dfrac{p}{y_P}$.

证明. 设直线 $AB: x=ty+a$，代入抛物线方程得 $y^2-2pty-2pa=0$. 根据二次方程根与系数的关系，$y_A+y_B=2pt, y_Ay_B=-2pa$.

和上一个问题的证明相同的过程，得到 $k_{AP}+k_{BP}=\dfrac{4p(y_P+pt)}{2pty_P-2pa+y_P^2}=0$，所以 $y_P+pt=0$，解得 $t=-\dfrac{y_P}{p}$ 为定值，故斜率为定值 $-\dfrac{p}{y_P}$. □

命题 10.19. 设 $P(x_P,y_P)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的定点，A,B 是抛物线上两个动点且满足 $k_{AP}k_{BP}=c$，其中 c 为常数，则直线 AB 过定点.

在证明这个命题之前，同样可以先通过特殊位置将定点确定下来. 首先考虑直线 PB 的斜率趋近于 0 即直线 PB 无限接近 “横线” 时，直线 PA 的斜率趋近于无穷，设点 P 关于 x 轴的对称点为 P'，则此时点 A 与点 P' 重合，而直线 AB 的斜率趋于 0，故直线 AB 的极限为 $y=-y_P$.

另一方面，当 A 点和 P 点无限接近时，直线 PA 的极限是 A 点处的切线，此时直线 AB 与直线 PB 重合.A 点处的切线方程为 $y_Py=p(x+x_P)$，其斜率为 $\dfrac{p}{y_P}$，所以此时直线 PB 的斜率的极限为 $k_{PB}=\dfrac{cy_P}{p}$，所以 $k_{AB}=\dfrac{cy_P}{p}$. 此时直线 AB 的方程为

$$y-y_P=\frac{cy_P}{p}(x-x_P).$$

联立 $\begin{cases} y=-y_P, \\ y-y_P=\dfrac{cy_P}{p}(x-x_P), \end{cases}$

解得定点为 $(x_P-\dfrac{2p}{c},-y_P)$.

证明. 设直线 $AB: x=ty+a$，代入抛物线方程得 $y^2-2pty-2pa=0$. 根据二次方程根与系数的关系，$y_A+y_B=2pt, y_Ay_B=-2pa$.

$k_{AP}k_{BP}=\dfrac{4p^2}{(y_A+y_P)(y_B+y_P)}=\dfrac{4p^2}{y_Ay_B+y_P(y_A+y_B)+y_P^2}$.

代入化简得

$$k_{AP}k_{BP}=\frac{4p^2}{-2pa+2pty_P+y_P^2}=c.$$

此时 $a=a(t)=\dfrac{2pty_Pc+cy_P^2-4p^2}{2pc}=ty_P+\dfrac{y_P^2}{2p}-\dfrac{2p}{c}=ty_P+x_P-\dfrac{2p}{c}$.

所以直线方程为 $x=ty+a(t)=t(y+y_P)+x_P-\dfrac{2p}{c}$.

所以直线 AB 过定点 $D(x_P-\dfrac{2p}{c},-y_P)$. □

下面我们通过一个例题给出经过抛物线上两点的直线过定点的充分必要条件.

例 10.54. A,B 是抛物线 $y^2=2px$ 上两个动点，其坐标分别为 $(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1)$ 和 $(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2)$，则直线 AB 过定点 (a,b)，当且仅当对于 y_1,y_2，成立 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$.

证明. 若直线 AB 的斜率不存在，则 $y_1=-y_2$，且 $\frac{y_1^2}{2p}=\frac{y_2^2}{2p}=a$，验证等式：$(y_1-b)(y_2-b)=y_1y_2-b(y_1+y_2)+b^2=-y_1^2+b^2=b^2-2pa$，等式成立. 另一方面，若 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$ 且 $y_1=-y_2$，由此解出 $y_1^2=y_2^2=2pa$，即直线 AB 过 (a,b).

若直线 AB 的斜率不存在，则由抛物线中点弦的结论可知 $k=\frac{2p}{y_1+y_2}$，所以直线 AB 过点 (a,b) 当且仅当直线的方程为 $y=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-a)+b$，这等价于 $(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$ 和 $(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$ 两个点满足该方程，即

$$y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(\frac{y_1^2}{2p}-a)+b,y_2=\frac{2p}{y_1+y_2}(\frac{y_2^2}{2p}-a)+b.$$

也即 $(y_1+y_2)b=y_1y_2+2pa$，即 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$. □

对于抛物线中的直线过定点问题，只要根据题给条件能够得到形如 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$ 的式子，我们都可以断言直线过定点. 另外，如果直线过定点，我们同样可以迅速得到纵坐标之间满足的关系.

这两个过程，本质上都是直线方程与抛物线联立，然后利用二次方程根与系数的关系.

例 10.55. 过点 $P(1,2)$ 作倾斜角互补的直线 PA,PB 分别交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B.

(1) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹;

(2) 设点 P 在线段 AB 上方，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

分析：这是手电筒模型，根据前面的命题可知直线 AB 斜率为定值 -1，所以其中点的纵坐标为 $\frac{2}{-1}=-2$，而直线 AB 要满足与抛物线有两个交点，考虑 AB 与直线相切的情况知轨迹应满足 $x>1$，另外，若从 P 点引出的两条直线中其中一条为 P 点处的切线，而另一条是与切线倾斜角互补的直线，这时候可认为 P 和 A 重合，这个位置的横坐标也应该挖掉.

解. (1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$，AB 方程：$x=ty+a$，代入抛物线方程可得

$$y^2-4ty-4a=0.$$

根据二次方程根与系数的关系，$y_1+y_2=4t$，故 $y_1y_2=-4a$，所以 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1-1}+\frac{y_2-2}{x_2-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2-4}{4}}+\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2-4}{4}}=4\cdot(\frac{1}{y_1+2}+\frac{1}{y_2+2})=\frac{4(4+y_1+y_2)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}=\frac{4(4+4t)}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}=0.$

所以 $4+4t=0$，所以 $t=-1$，所以 $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{2(y_1-y_2)}=\frac{4(x_1-x_2)}{2(y_1-y_2)}=2t=-2$. 而直线 $AB:x=-y+a$，代入 $y^2=4x$ 得 $y^2+4y-4a=0$，由 $\Delta=16+16a>0$ 得 $a>-1$，所以 $x=a+2>1$.

又因为 P 点处的切线斜率为 $\frac{1}{x'(y)}|_{y=2}=\frac{1}{\frac{1}{2}y}|_{y=2}=1$，此时认为 A 点与 P 点重合，PB 的方程为 $y-2=-(x-1)$ 即 $x=-y+3$，代入抛物线方程得 $y^2+4y-12=0$，解得 $y=2$ 或 $y=-6$，即 $y_B=-6$，$x_B=\frac{y_B^2}{4}=9$，$x_M=\frac{x_B+x_A}{2}=\frac{x_B+x_P}{2}=5$.

所以点 M 的轨迹为 $y=-2(x>1\text{且}x\neq 5)$，这是一条切线去掉端点和 $(5,-2)$.

(2) 由上一问可知，$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{32(a+1)}$，点 P 到 AB 的距离 $d=\frac{|3-a|}{\sqrt{2}}$，所以

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=2\sqrt{a^3-5a^2+3a+9}.$$

因为 P 在 AB 上方，所以 $1+2-a>0$ 即 $-1<a<3$，设 $f(a)=a^3-5a^2+3a+9$，则 $f'(a)=3a^2-10a+3$，所以 f 在 $(-1,\dfrac{1}{3})$ 递增，在 $(\dfrac{1}{3},3)$ 递减，所以当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时 f 有最大值 $\dfrac{256}{27}$，即 $S_{\triangle PAB}$ 有最大值 $\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$. ♡

例 10.56. 已知抛物线 $\Gamma: y^2=2px$，$p>0$，其焦点为 F，P 为 Γ 上一个点，且在第一象限，且满足 $\overrightarrow{FP}=(2,2\sqrt{3})$.

(1) 求抛物线 Γ 的标准方程；

(2) 已知经过点 $A(3,-2)$ 的直线与抛物线 Γ 交于 M,N 两点，经过定点 $B(3,-6)$ 和 M 的直线与 Γ 交于另一个点 L，问直线 NL 是否过定点，如果过定点，求出该定点，否则说明理由.

分析：根据上面的例题，设 $N(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$L(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，则欲得到 NL 过定点，只需要推出式子形如 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$.

在这个问题中，设 $M(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，且 MN 和 ML 分别过定点 A 和 B，反过来考虑前面的命题可以得知纵坐标满足如下关系式：

$$(y_0+2)(y_1+2)=(-2)^2-4\times 3,(y_0+6)(y_1+6)=(-6)^2-4\times 3.$$

我们希望得到保留 y_1 和 y_2，因此消去 y_0 得：

$$y_0=\frac{-8}{y_1+2}-2=\frac{24}{y_2+6}-6.$$

化简得 $y_1y_2=12=-4\times(-3)$，所以过定点 $(-3,0)$.

也可以通过几何直观找到定点：考虑 L,N 两者无限接近，则此时 NL 的极限为点 $M_2(3,-2\sqrt{3})$ 处的切线，而点 M 为 M_2 关于 x 轴的对称点 $M_1(3,2\sqrt{3})$，则根据对称性可知 M_1 处的切线与 M_2 处的切线的交点一定是定点. 因为直线 M_1M_2 的方程为 $x=3$，其极点为 $(-3,0)$，根据切点弦的相关结论知这就是定点.

以下是解析法过程：

解. 设 $M(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，$N(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$L(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$.

设直线 $MN: x=t(y+2)+3$，代入抛物线方程得 $y^2-2pt(y+2)-12=0$，所以 $y_0+y_1=2pt$，$y_0y_1=-4pt-12$，即 $y_0y_1=-2(y_0+y_1)-12$，即 $y_0y_1+2(y_0+y_1)=-12$，即 $y_0y_1+2(y_0+y_1)+4=4-12$，即 $(y_0+2)(y_1+2)=4-12$.

同理，$(y_0+6)(y_1+6)=36-12$，由以上两个式子消去 y_0 得：

$$y_0=\frac{-8}{y_1+2}-2=\frac{24}{y_2+6}-6.$$

化简得 $y_1y_2=12$. 显然直线 LN 的斜率不为 0，所以可设直线 $LN: x=my+a$，代入抛物线方程得 $y^2-4my-4a=0$，根据二次方程根与系数的关系可知 $y_1y_2=-4a=12$，所以 $a=-3$，所以直线 LN 过点 $(-3,0)$. ♡

评注 10.56.1. 在这个问题中我们可以注意到，一般地，对于过定点 A 的直线 PQ 与抛物线 $y^2=2px$ 相交时，交点纵坐标的关系式由如下情况：

1° A 是焦点 F，根据前面的讨论，$y_1y_2=-p^2$.

2° A 在对称轴上，特别地，A 的坐标为 $(a,0)$，则有 $y_1y_2=-2pa$.

3° A 是任意一点，坐标为 (a,b)，则有 $(y_1-b)(y_2-b)=b^2-2pa$.

前两种情况都是第三种情况的特殊形式.

评注 10.56.2. 感兴趣的同学可以考虑这类问题的一般形式，即给定 A,B 两个定点 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2)，对于抛物线上的任一点 M，MA,MB 分别与抛物线交于点 N 和点 L，则：如果满足 $p(a_1+a_2)=b_1b_2$，那么直线 NL 过定点.

我们给出该命题的证明，事实上就是把这道题的过程重复一遍：

证明. 和这道例题使用相同的记号.

根据 MN 过定点 A：

$$(y_0-b_1)(y_1-b_1)=b_1^2-2pa_1.$$

根据 ML 过定点 B：

$$(y_0-b_2)(y_1-b_2)=b_2^2-2pa_2.$$

消去 y_0：

$$y_0=\frac{b_1^2-2pa_1}{y_1-b_1}+b_1=\frac{b_1^2-2pa_1+b_1y_1-b_1^2}{y_1-b_1}=\frac{b_1y_1-2pa_1}{y_1-b_1}.$$

同理：

$$y_0=\frac{b_2y_2-2pa_2}{y_2-b_2}.$$

根据以上两个式子得

$$\frac{b_1y_1-2pa_1}{y_1-b_1}=\frac{b_2y_2-2pa_2}{y_2-b_2}.$$

这样我们已经消去了 y_0，交叉相乘化简得

$$b_2y_1y_2-b_2b_1y_2-2pa_2y_1+2pa_2b_1=b_1y_1y_2-b_1b_2y_1-2pa_1y_2+2pa_1b_2.$$

化简得

$$(b_1-b_2)y_1y_2+(2pa_1-b_1b_2)y_1+(b_1b_2-2pa_1)y_2+2pa_1b_2-2pa_2b_1=0.(*)$$

设 LN 过定点 $C(a_3,b_3)$，则有

$$(y_1-b_3)(y_2-b_3)=b_3^2-2pa_3-b_3^2.$$

展开得，

$$y_1y_2-b_3y_1-b_3y_2+2pa_3=0.$$

注意到 $b_1-b_2\neq 0$，上式与 $(*)$ 式比对得到

$$b_3=\frac{2pa_2-b_1b_2}{b_2-b_1}=\frac{b_1b_2-2pa_1}{b_2-b_1}.$$

以及

$$2pa_3=\frac{2pa_1b_2-2pa_2b_1}{b_1-b_2}.$$

也即 $2pa_2 - b_1b_2 = b_1b_2 - 2pa_1$.

也即

$$p(a_1 + a_2) = b_1b_2.$$

□

应用到本题当中, $A(3,-2)$, $B(3,-6)$, 验证: $p(a_1+a_2) = 2\times(3+3) = 12$, $b_1b_2 = (-2)\times(-2) = 12$, 因此成立 $p(a_1 + a_2) = b_1b_2$, 此时根据

$$b_3 = \frac{2pa_2 - b_1b_2}{b_2 - b_1} = \frac{b_1b_2 - 2pa_1}{b_2 - b_1}.$$

以及

$$2pa_3 = \frac{2pa_1b_2 - 2pa_2b_1}{b_1 - b_2}.$$

$b_3 = 0$, $4a_3 = 4 \times 3 \times (-1) = -12$, 所以 $a_3 = -3$, 所以定点是 $C(-3, 0)$.

我们注意到在抛物线中, 直线与抛物线联立所得到的形式总是很简洁的, 读者在面对具体问题时, 应当大胆地通过这样的解析几何的技巧来找出纵坐标之间的关系.

习题 10.5

第一部分. 椭圆中的定点、定直线、定值问题

1. 已知椭圆 $C : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1(a > b > 0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A,B, 线段 AB 的中点为 M. 证明:

   (1) 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值 $-\dfrac{a^2}{b^2}$;

   (2) 若 l 过点 (b, a), 延长线段 OM 与 C 交于点 P, 当四边形 $OAPB$ 为平行四边形时, 则直线 l 的斜率 $k_l = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{a}{b}$.

2. 已知动点 A、B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上, 且线段 AB 的垂直平分线始终过点 $P(-1, 0)$.

   (1) 求线段 AB 中点 M 的轨迹方程;

   (2) 求线段 AB 长度的最大值.

3. 设直线 $l : y = x + b$ 与椭圆 $C : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 不相交. 过直线 l 上的点 P 作椭圆 C 的切线 PM、PN, 切点分别为 M、N , 联结 MN.

   (1) 当点 P 在直线 l 上运动时, 证明: 直线 MN 恒过定点 Q;

   (2) 当 $MN//l$ 时, 定点 Q 平分线段 MN.

4. 已知 F 为椭圆 $C : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, 点 P 为直线 $x = 4$ 上的动点, 过点 P 作椭圆 C 的切线 PA、PB, A、B 为切点.

   (1) 求证: A、F、B 三点共线;

   (2) 求 $\triangle PAB$ 面积的最小值.

5. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 及点 $P(1,\dfrac{1}{2})$，过点 P 作直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，过 A、B 两点分别作 C 的切线交于点 Q.

(1) 求点 Q 的轨迹方程；

(2) 求 $\triangle ABQ$ 的面积的最小值.

6. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 $y=k(x-2)$ 交椭圆于 P,Q 两点 $(k\neq 0)$. 若 P,Q 的中点为 N,O 为原点，直线 ON 交直线 $x=3$ 于 M.

(1) 求 $\angle MFQ$ 的大小；

(2) 求 $\dfrac{PQ}{MF}$ 的最大值.

7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点 F_1、F_2 与椭圆短轴的一个端点构成边长为 4 的正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

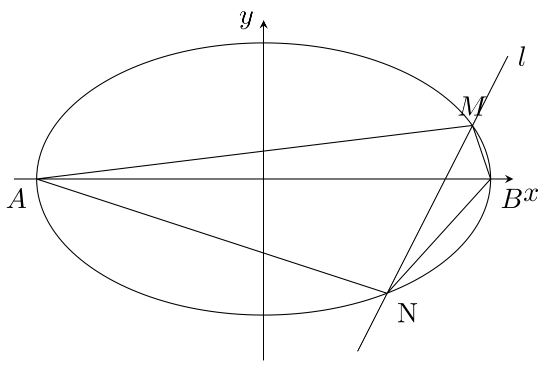
(2) 过椭圆 C 上任意一点 P 做椭圆 C 的切线与直线 F_1P 的垂线 F_1M 相交于点 M，求点 M 的轨迹方程；

(3) 若切线 MP 与直线 $x=-2$ 交于点 N，求证：$\dfrac{|NF_1|}{|MF_1|}$ 为定值.

8. (参见第10.5.1章例10.38) 如图所示, 已知,A,B 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右顶点, 直线 l 与椭圆 C 交于点 M,N. 设 AM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2, 且 $k_1:k_2=1:9$.

(1) 证明: 直线 l 过定点；

(2) 记 $\triangle AMN,\triangle BMN$ 的面积分别为 S_1,S_2, 求 S_1-S_2 的最大值.



9. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，椭圆短轴的上下两个端点分别为 A,B. 以 A 为圆心，椭圆长半轴长为半径的圆与椭圆交于 C,D 两点，CD 的中点的纵坐标为 $6-3\sqrt{3}$.

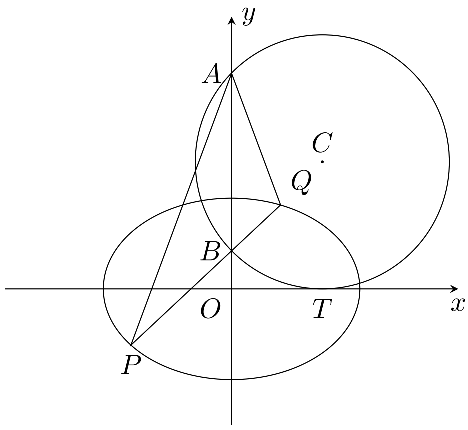
(1) 求椭圆的方程；

(2) 直线 l 过椭圆的右焦点 F 且不垂直于 x 轴，l 与椭圆交于 M,N 两点，设点 N 关于 x 轴的对称点为 N'，问直线 MN' 是否经过定点？若经过定点，求出这个定点，否则，说明理由.

10. 如图，圆 C 与 x 轴相切于 $T(2,0)$，与 y 轴的正半轴相交于 A,B 两点，(A 在 B 的上方)，且 $|AB|=3$.

(1) 求圆 C 的方程；

(2) 设过点 B 的直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相交于 P,Q 两点，求证：AB 射线平分 $\angle PAQ$.



11. 已知 F 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，椭圆 C 上任意一点 P 到点 F 的距离与点 P 到直线 l：$x=m$ 的距离之比为 $\dfrac{1}{2}$.

(1) 求直线 l 方程；

(2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点，过点 F 的直线交椭圆 C 于 D、E 两点，直线 AD、AE 与直线 l 分别相交于 M、N 两点. 以 MN 为直径的圆是否恒过一定点？若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由.

12. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P(-2,1)$ ，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。过点 P 作两条互相垂直的直线分别交椭圆于 A,B 两点（A,B 与点 P 不重合)。
求证：直线 AB 过定点，并求该定点的坐标。

13. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，右顶点为 A，P 为椭圆 C 上任意一点. 已知 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值为 3，最小值为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 M、N 两点（M、N 不是左右顶点)，且以 MN 为直径的圆过点 A. 求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的上顶点为 A，不经过点 A 的直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点，且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$.

(1) 直线 l 是否过定点？若是，求出定点坐标；若不是，说明理由.

(2) 过 P,Q 两点分别作椭圆的切线，两条切线交于点 B，求 $\triangle BPQ$ 面积的取值范围.

15. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作两条垂直的弦 AB、CD，设 AB、CD 的中点分别为 M、N.

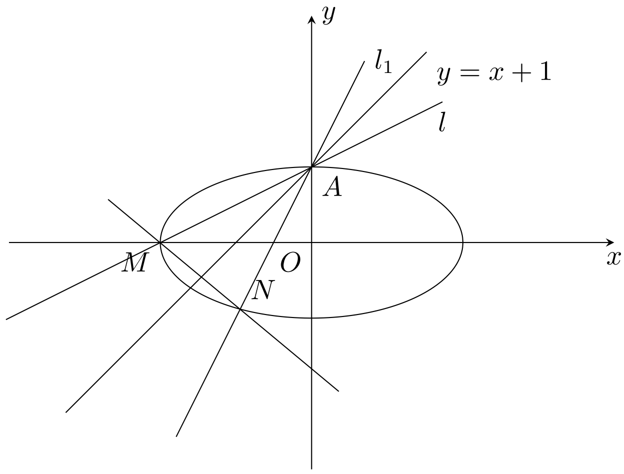
(1) 求证：直线 MN 必过定点，并求出这个定点；

(2) 若弦 AB、CD 的斜率均存在，求 $\triangle FMN$ 的面积的最大值.

16. 如图所示，设 $k>0$ 且 $k\neq 1$，直线 $l: y=kx+1$ 与 $l_1: y=k_1x+1$ 关于直线 $y=x+1$ 对称，直线 l 与 l_1 分别交椭圆 $E: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 于点 A、M 和 A、N.

(1) 求 $k\cdot k_1$ 的值；

(2) 求证：对任意的实数 k，直线 MN 恒过定点.



17. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，并且过点 $P(2,-1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 Q 在椭圆 C 上,且 PQ 与 x 轴平行,过 P 点作两条直线分别交椭圆于两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，若直线 PQ 平分 $\angle APB$，求证直线 AB 的斜率是定值，并求出这个定值.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(2,1)$ 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上，不经过坐标原点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，且线段 AB 的中点为 D，直线 OD 的斜率为 1. 记直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，求证：k_1k_2 为定值.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $M: \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过点 $P(2,2)$ 作直线 l_1,l_2 与椭圆 M 分别交于 A,B 和 C,D . 且直线 l_1,l_2 的斜率互为相反数.

(1) 证明：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$；

(2) 记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，求证：k_1+k_2 为定值.

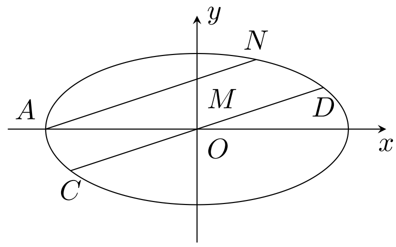
第二部分. 椭圆中的求值、求范围问题

1. 已知过椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点 $F(-c,0)(c>0)$ 的直线 l 与此椭圆交于 A、B 两点，线段 AB 的垂直平分线交此椭圆于 C、D 两点，若 $AC\perp AD$，试求直线 l 的方程.

2. 设直线 $y=x+\sqrt{2}$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于点 M,N，且 $OM\perp ON$(O 为原点). 若 $MN=\sqrt{6}$，求椭圆的方程.

3. 已知动直线 l 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相切，与椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 相交于不同的两点 A,B。求原点到 AB 的中垂线的最大距离。

4. 如图，CD 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条直径，过椭圆长轴的左顶点 A 作 CD 的平行线，交椭圆于另一点 N，交椭圆短轴所在直线于 M，证明:$AM\cdot AN=CO\cdot CD$.



5. 设过原点且斜率为正值的直线与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于点 E,F，点 $A(2,0),B(0,1)$. 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

6. 已知椭圆的中心在原点 O，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. 设不过原点 O 的直线 l 与该椭圆交于点 P 和 Q ，且直线 OP ，PQ ，OQ 的斜率构成等比数列，求 $\triangle OPQ$ 面积的取值范围.

7. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点为 M, 下顶点为 N ，$T(t,2)(t\neq 0)$ 为直线 $y=2$ 上一点，过点 T 的直线 TM,TN 分别与椭圆 C 交于 E,F 两点，若 $\triangle TMN$ 的面积是 $\triangle TEF$ 的面积的 k 倍，问：当 t 为何值时，k 为最大值?

8. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，右焦点为圆 $C_2:(x-\sqrt{3})^2+y^2=7$ 的圆心.

   (1) 求椭圆 C_1 的方程;;

   (2) 若直线 l 与曲线 C_1、C_2 都只有一个公共点，记直线 l 与圆 C_2 的公共点为 A，求点 A 的坐标.

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，经过点 $P(3,\frac{16}{5})$，离心率为 $\frac{3}{5}$. 过椭圆 C 的右焦点作斜率为 k 的直线 l，交椭圆于 A,B 两点，记 PA ，PB 的斜率为 k_1,k_2.

   (1) 求椭圆的标准方程;

   (2) 若 $k_1+k_2=0$ ，求实数 k 的值.

10. 已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3},1)$ 在椭圆 C 上，且 $\triangle F_1PF_2$ 的垂心为 $H(\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{5}{3})$.

    (1) 求椭圆 C 的方程;

    (2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点，过点 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 D,E 两点，记直线 AD,AE 的斜率分别为 k_1,k_2 ，若 $k_1+k_2=-\frac{1}{2}$，求直线 l 的方程.

11. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{1}{2})$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，动点 $M(2,t)(t>0)$.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 求以 OM 为直径且被直线 $3x-4y-5=0$ 截得的弦长为 2 的圆的方程；

(3) 设 F 是椭圆的右焦点，过点 F 作直线 OM 的垂线与以 OM 为直径的圆交于点 N，证明线段 ON 的长为定值，并求出这个定值.

12. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $M(0,2)$，且右焦点为 $F(2,0)$.

(1) 写出椭圆 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，交 y 轴于点 P，若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{PB}=n\overrightarrow{BF}$，求证:$m+n$ 为定值，

(3) 在（2）的条件下，若点 P 不在椭圆 C 的内部，点 Q 是点 P 关于原点 O 的对称点，试求三角形 QAB 面积的最小值.

13. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $y=2x-1$ 与 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=\dfrac{8\sqrt{5}}{9}$.

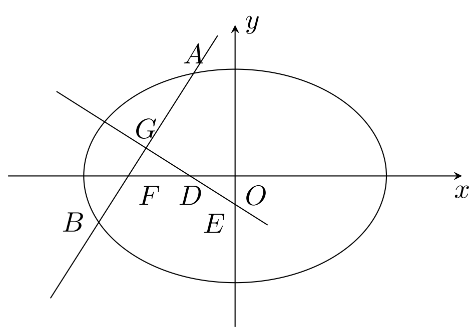
(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 $M(2,0)$ 的直线 l（斜率不为零）与椭圆 C 交于不同的两点 E、F（E 在点 F、M 之间），记 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle OME}}{S_{\triangle OMF}}$，求 λ 的取值范围.

14. 如图，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F，过点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，$|AF|$ 的最大值是 M，BF 的最小值是 m，满足：$M\cdot m=\dfrac{3}{4}a^2$.

(1) 求该椭圆的离心率；

(2) 设线段 AB 的中点为 G，AB 的垂直平分线与 x 轴和 y 轴分别交于 D、E 两点，O 是坐标原点. 记 $\triangle GFD$
的面积为 S_1，$\triangle OED$ 的面积为 S_2，求 $\dfrac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2}$ 的取值范围.



第三部分. 椭圆中的探究性问题

1. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右顶点为 C，A 为第一象限内的椭圆周上任意一点，点 A 关于原点的对称点为 B，过点 A 作 x 轴的垂线交 BC 于 D，比较 $|AC|^2$ 与 $|CD|\cdot|CB|$ 的大小，并给出证明.

2. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，若 $ab=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

   (1) 求椭圆方程；

   (2) 现有一条斜率为 k 的直线 l 过椭圆的右焦点 F，且与椭圆交于 A、B 两点，P 为直线 $x=3$ 上的一点. 问：是否存在这样的直线 l，使 $\triangle ABP$ 为等边三角形? 若存在，求出直线 l 的方程；若不存在, 说明理由.

3. 设 O 为椭圆的中心，点 A 为椭圆上异于顶点的任意一点，过点 A 作长轴的垂线，垂足为 M，联结 AO 并延长与椭圆交于另一点 B，联结 BM 并延长与椭圆交于点 C. 问：是否存在椭圆，使得 $BA\perp CA$?

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,\sqrt{3})$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，l 经过椭圆 C 的右焦点 F 交椭圆于 A,B 两点，点 A,F,B 在直线 $x=4$ 的射影依次是 D,K,E。

   (1) 求椭圆 C 的方程;

   (2) 连接 AE,BD，试探求当直线 l 的倾斜角变化时，直线 AE 与 BD 是否相交于定点? 若是，请求出定点的坐标并给予证明；否则，说明理由。

5. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 其短轴为 4, 离心率为 e_1. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$ 的渐近线为 $y=\pm x$，离心率为 e_2，且 $e_1\cdot e_2=1$.

   (1) 求椭圆 E 的方程;

   (2) 设椭圆 E 的右焦点为 F，过点 $G(4,0)$ 作斜率不为 0 的直线交椭圆 E 于 M、N 两点. 设直线 FM 和 FN 的斜率为 k_1、k_2，试判断 k_1+k_2 是否为定值，若是定值，求出该定值；若不是定值，请说明理由.

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 F_1、F_2 分别为其左、右焦点，其右焦点 F_2 到点 $E(-2,-1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$ ，一动圆过点 F_2，且与直线 $x=-1$ 相切，记动圆圆心的轨迹为 G.

   (1) 在轨迹 G 上有两点 M、N，椭圆 C 上有两点 P、Q，满足 $\overrightarrow{MF_2}//\overrightarrow{NF_2}$，$\overrightarrow{PF_2}//\overrightarrow{QF_2}$，且 $\overrightarrow{MF_2}\perp\overrightarrow{PF_2}$，求四边形 $MPQN$ 面积的最小值;

   (2) 过点 F_1 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 A、B，问在直线 $y=x$ 上是否存在点 D，使得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\dfrac{3k+36}{16k^2+12}$ 是与 k 无关的常数?

7. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，不过原点的直线 l 和椭圆相交于两点 A、B.

   (1) 求三角形 $\triangle OAB$ 面积的最大值;

(2) 是否存在椭圆 C_1，使得对于 C_2 的每一条切线和椭圆 C_1 均相交，设交于 A、B 两点，且 $S_{\triangle OAB}$ 恰取最大值？若存在，给出该椭圆；若不存在，说明理由.

第四部分. 与抛物线有关的解析几何问题

1. 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A,B 两点，抛物线在 A,B 两点处的切线交于点 E.

(1) 求证：$EF\perp AB$；

(2) 设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，当 $\lambda\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$ 时，求 $\triangle ABE$ 的面积 S 的最小值.

2. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，直线 l 与抛物线 C 相交于 A、B 两点，连结 A 及抛物线顶点 O 的直线交准线于 B'，连结 B 及 O 的直线交准线于 A'，并且 AA' 与 BB' 都平行于 x 轴.

(1) 证明：直线 l 过定点；

(2) 求四边形 $ABB'A'$ 的面积的最小值.

3. 已知抛物线 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$ 与直线 $l:y=kx-1$ 没有公共点. 设点 P 为直线 l 上的动点，过 P 作抛物线 C 的两条切线，A,B 为切点.

(1) 证明：动直线 AB 恒过定点 Q；

(2) 设点 P 与（1）中的定点 Q 的连线交抛物线 C 于 M,N 两点，证明：$\dfrac{PM}{PN}=\dfrac{QM}{QN}$.

4. 过直线 $x-2y+13=0$ 上一动点 A（A 不在 y 轴上）作抛物线 $y^2=8x$ 的两条切线，M、N 为切点，直线 AM、AN 分别与 y 轴交于点 B、C.

(1) 证明直线 MN 恒过一定点；

(2) 证明 $\triangle ABC$ 的外接圆恒过一定点，并求该圆半径的最小值.

5. 已知抛物线 $y^2=2px$ 过定点 $C(1,2)$，在抛物线上任取不同于点 C 的一点 A，直线 AC 与直线 $y=x+3$ 交于点 P，过点 P 作 x 轴的平行线交抛物线于点 B.

(1) 求证：直线 AB 过定点；

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

6. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ ，以 $M(1,2)$ 为直角顶点作该抛物线的内接直角三角形 MAB.

(1) 求证：动直线 AB 过定点；

(2) 过点 M 作 AB 的垂线交 AB 于点 N，求点 N 的轨迹方程.

7. 已知抛物线 $E:y=x^2$ 的焦点为 F，过 y 轴正半轴上一点 M 的直线 l 与抛物线 E 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$.

(1) 求证：直线 l 过定点；

(2) 设点 F 关于直线 OB 的对称点为 C，求四边形 $OABC$ 面积的最小值.

8. 过点 $P(1,2)$ 作倾斜角互补的相异直线 PA、PB 分别与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点.

(1) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹;

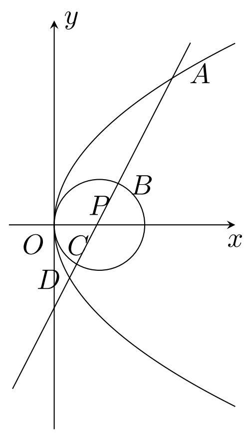
(2) 若 P 在 AB 的上方, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

9. 已知抛物线 $y=ax^2$ 过点 $P(-1,1)$, 过点 $Q(-\dfrac{1}{2},0)$ 作斜率大于 0 的直线 l 交抛物线于 M,N 两点（点 M 在 Q,N 之间), 过点 M 作 x 轴的平行线, 交 OP 于 A, 交 ON 于 B, $\triangle APM$ 与 $\triangle OAB$ 的面积记为 S_1,S_2 , 比较 S_1 与 $3S_2$ 的大小, 说明理由.

10. 设直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A、B 两点, 过点 A、B 的圆与 $y^2=2px(p>0)$ 交于另外两个不同点 C、D. 证明: $AB\perp CD$.

11. 已知 A 为抛物线 $y^2=2x$ 上的动点, 顶点 B 的坐标为 $(2,0)$, 以 AB 为直径作圆 C, 若圆 C 截直线 $l\ x+ky-\dfrac{3}{2}=0$ 所得的弦长为定值, 求此弦长和实数 k 的值.

12. 给定圆 $P:x^2+y^2=2x$ 及抛物线 $S:y^2=4x$, 过圆心 P 作直线 l, 此直线与上述两曲线的四个交点, 自上而下顺次记为 A、B、C、D, 如果线段 AB、BC、CD 的长按此顺序构成一个等差数列, 求直线 l 的方程.

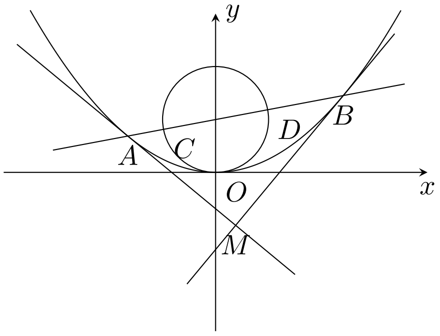


13. 已知抛物线 G 的顶点在原点, 焦点在 y 轴正半轴上, 点 $P(m,4)$ 到其准线的距离等于 5.

(1) 求抛物线 G 的方程;

(2) 如图, 过抛物线 G 的焦点的直线依此与抛物线 G 及圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 交于 A,C,D,B 四点, 试证明 $|AC|\cdot|BD|$ 为定值;

(3) 过 A,B 分别作抛物线 G 的切线 l_1,l_2, 且 l_1,l_2 交于点 M, 试求 $\triangle ACM$ 与 $\triangle BDM$ 面积之和的最小值.



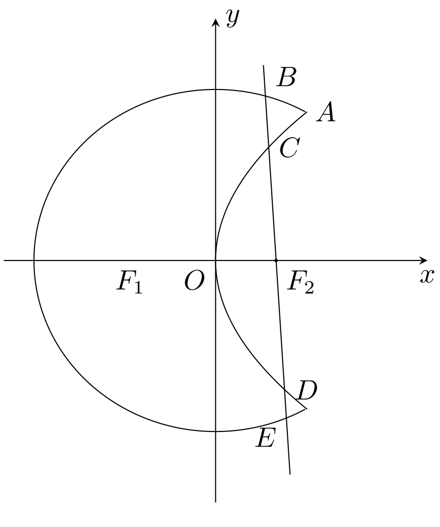
14. 如图，曲线 C_1 是以原点 O 为中心，F_1、F_2 为焦点的椭圆的一部分，曲线 C_2 是以 O 为顶点、$F_2(1,0)$ 为焦点的抛物线的一部分，$A(\dfrac{3}{2},\sqrt{6})$ 为曲线 C_1 与 C_2 的交点.

    (1) 求曲线 C_1 与 C_2 所在的椭圆与抛物线的方程.

    (2) 过点 F_2 作一条与 x 轴不垂直的直线，分别与曲线 C_1 和 C_2 交于点 B,C,D,E.

    (1) 求 $\triangle CDF_1$ 面积取值范围.

    (2) 若 G,H 分别为 CD、BE 的中点，问：$\dfrac{|BE|\cdot|GF_2|}{|CD|\cdot|HF_2|}$ 是否为定值? 若是，求出定值；若不是，请说明理由.



第十一章　导数

导数的概念最初源于力学上瞬时速度的计算，以及几何上关于曲线切线斜率的计算. 在 17 世纪中叶牛顿 (Isaac Newton) 和莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 等人在前人的探索和研究的基础上，凭借他们敏锐的思维和丰富的想象力创立了微积分学，导数已经成为了微积分的核心内容之一，是现代数学的基本概念.

导数是高中数学中最抽象，符号语言最多，理解难度也最大的部分，一直以来困扰着很多同学，因此解决较复杂的导数问题是对同学们的一个挑战，也是训练同学们思维能力的重要载体.

（编者：本章初稿由周皓然同学完成，再次感谢他为本书做出的重要工作！）

11.1 导数的概念

11.1.1　从平均变化率讲起

定义 11.1. 将 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 称为函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率，称 x_2-x_1 是自变量 x 的增量，记为 Δx (增量的值可正可负，因为并没有规定 x_2 和 x_1 的大小关系)，称 $f(x_2)-f(x_1)$ 为函数值 y 的关于 Δx 的增量，记为 Δy.

则平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

在几何上，平均变化率可以理解为曲线的一条割线的斜率，如图11.1 所示.

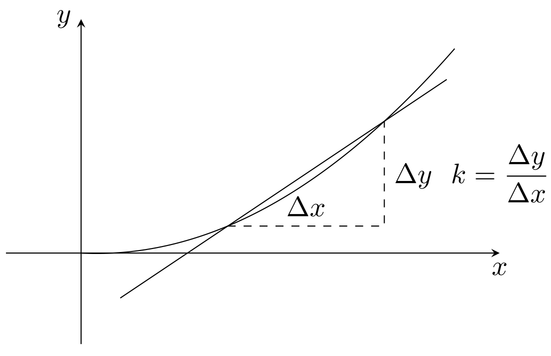


图 11.1:

例 11.1. 求 $y=-\dfrac{6}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上的平均变化率.

解. 根据定义，在 $[1,2]$ 上，$\Delta x=2-1=1$，$\Delta y=f(2)-f(1)=-3-(-6)=3$，所以平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3.$ ♡

从直观上理解，当 x_0 到 $x_0+\Delta x_0$ 的增量 Δx 越小时，平均变化率将越接近于 x_0 处的瞬时变化率；另一方面，当 Δx 趋于零时，加入割线有一个极限位置，那么在这个极限位置上的直线就是该点处曲线的切线，因此我们可以将此切线看成是过点 $(x_0,f(x_0))$ 的一系列割线的极限位置，如图11.2所示.

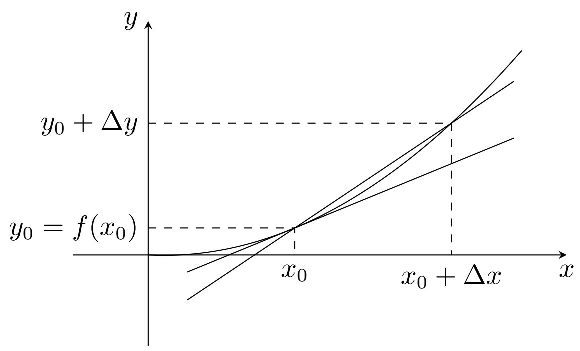


图 11.2:

物体沿直线运动的瞬时速度概念就是位移关于时间的函数 $x(t)$ 在某处的瞬时变化率，以某质点的自由落体运动为例，已知其运动规律为 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，则在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间间隔内，其平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t\Delta t+\Delta t^2)\cdot\frac{1}{\Delta t}=gt+\Delta t.$$

当 Δt 无限接近于零时，平均速度将无限接近 gt，按照上面的说法，这就是质点在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$. 在数学上，我们把这里的 gt 叫做**“当 Δt 无限趋近于零时，$\bar{v}$ 的极限”**，记为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt.$$

用同样的方法可以得到瞬时加速度的概念，将速度 $v(t)$ 关于 Δt 的增量 Δv 除以 Δt 得到平均加速度，再让 Δt 趋于 0，由平均加速度取极限即得瞬时加速度:

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

按照 $v(t)=gt$ 计算得

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-gt}{\Delta t}=g.$$

即自由落体的瞬时加速度为常数 g.

我们再来考虑曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，在曲线上取另外一点 $(x,f(x))$，则从 $(x_0,f(x_0))$ 到 $(x,f(x))$ 之直线为曲线的一条割线，其斜率为

$$k_{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

显然，割线斜率依赖于 Δx，当 Δx 趋于零时，假定割线有一个极限位置，那么在此极限位置上的直线就是切线，所以切线斜率为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}k_{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

也就是说，我们认为切线的斜率就是割线斜率的极限，这样的看法使得我们将求切线斜率的问题归结为求函数增量与自变量增量之比的极限问题，在形式上它与求瞬时速度时所遇到的情况完全相同.

例 11.2. 一质点 m 按规律 $x(t)=2t^2+3$ 做直线运动，求 m 在 $t=2$ 时的瞬时速度.

解.

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(2+\Delta t)^2+3-(2\times 2^2+3)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}(8+2\Delta t)\\
&= 8.
\end{aligned}$$

♡

11.1.2 导数与导函数

除了瞬时速度和曲线在某点处的切线以外，我们还可以举出许多其他问题，要求人们根据一个已知的函数 $y=f(x)$，去计算函数值的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与自变量的增量 Δx 之比的极限，这个极限如果存在，就被称做**导数**.

定义 11.2. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，就说函数在 x_0 处可导，并称这个极限值为函数在点 x_0 处的**导数**，记作 $f'(x_0)$. 从图形上去看，导数就是函数曲线在相应点处切线的斜率.

求函数在某点处的导数，可以直接根据其定义求出：

例 11.3. $(1)f(x)=\dfrac{4}{x^2}$，求 $f'(2)$;
$(2)g(x)=\sqrt{x+2}$，求 $g'(2)$.

解. (1)

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{4}{(2+\Delta x)^2}-\frac{4}{2^2}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x^2+4\Delta x)}{\Delta x(\Delta x+2)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}[-\frac{\Delta x+4}{(\Delta x+2)^2}]=-\frac{4}{2^2}=-1.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
g'(2) &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{g(2+\Delta x)-g(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2+\Delta x+2}-\sqrt{2+2}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2+2+2\Delta x-(2+2)}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+4}+\sqrt{4})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x+4}+2}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

♡

评注 11.3.1. 本题第二小问的难点在于分子有理化，这值得引起我们的注意，当我们遇到一些不好处理的结构如根式分式结构等等，不妨先尝试能否进行分子有理化或分母有理化以简化结构.

若在区间 (a,b) 内每一点 x 处函数 $f(x)$ 都可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，这时候每一个 $x\in(a,b)$ 都对应一个导数值 $f'(x)$，这样便定义出了一个新的函数 $f'(x)$，它被称为 $f(x)$ 的**导函数**，有时也简称为**导数**.

求某函数的导函数，可以使用定义法.

例 11.4. 设 $f(x)\equiv c$, 即常数函数, 这时对于任意一点 x 及 $\Delta x\neq 0$, 总有 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$，因而 $f'(x)\equiv 0$. 即常数函数的导函数恒等于 0.

评注 11.4.1. 这个例子的几何意义是十分明显的，在坐标平面上，一条水平直线上每一点的切线都是水平的（斜率为 0）.

例 11.5. (1) 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 的导数.
(2) 求曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}-3$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

解. (1) 用定义法，对于任意一点 x 和 $\Delta x\neq 0$，对应的

$$\Delta y=\frac{1}{(x+\Delta x)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-[x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x+1]}{[x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x+1](x^2+1)}.$$

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-x-2\Delta x}{[x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x+1](x^2+1)}$.
所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
(2)

> (分析：首先求函数在点 $x=2$ 处的切线斜率，再根据切点为 $(2,f(2))$ 及直线的点斜式方程得到直线方程.)

设 $y=f(x)$，则 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-3$.
所以对于点 $x=2$ 以及任意的 $\Delta x\neq 0$，

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}-3\times(2^2+\frac{1}{2}-3)\\&=4\Delta x+(\Delta x)^2+\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}=4\Delta x+(\Delta x)^2-\frac{\Delta x}{2(2+\Delta x)}.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4+\Delta x-\dfrac{1}{2(2+\Delta x)}$, 所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x-\dfrac{1}{2(2+\Delta x)})=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$，即曲线在 $x=2$ 处的切线斜率为 $\dfrac{15}{4}$，又因为 $f(2)=4+\dfrac{1}{2}-3=\dfrac{3}{2}$，根据直线的点斜式方程得

$$y-\frac{3}{2}=\frac{15}{4}(x-2).$$

整理得

$$y=\frac{15}{4}x-6.$$

♡

评注 11.5.1. 由解析几何知识可知，一条直线由两个要素构成：点和方向 *(斜率)*，而欲求出一个函数图像在某点处的切线方程，可以有如下思考：由于已知函数的解析式，就相当于我们知道了一个点，所以我们可以寻找切线的方向. 而切线斜率则可以通过函数的导数来确定，故形成以上过程.

11.1.3 导数的运算法则

在讲解这一小节之前，我们先介绍两个重要的极限[1].

定理 11.1.1. 当 $n\to\infty$[2]时，$(1+\dfrac{1}{n})^n$ 有极限，且极限为 e（自然对数的底数，$\mathrm{e}\approx 2.718281828.$）即：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}.$$

我们知道这个极限最初是由伯努利（*Bernoulli*）在研究复利计算时发现的，而欧拉（*Leonhard Euler*）引进常数 e 来代替它.

定理 11.1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

这个极限的重要性在后面讨论基本初等函数的导数时会看出：利用它导出 $\sin x$ 的导数为 $\cos x$.

我们考虑 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 的情况，作图11.3，其中圆的半径为 1，圆弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为 x，也即它所对的角的弧度数为 x，而 $AB=\sin x$，当 x 趋于零时，点 A 和点 B 都将无限地接近点 D，所以 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的值会无限接近于 1.

事实上，根据第三章中的重要不等式

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，根据上式可知，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 也必以 1 为极限.

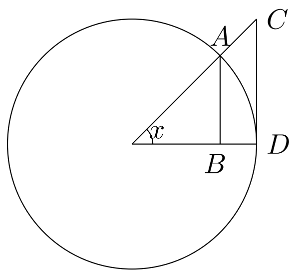


图 11.3:

例 11.6. $(\sin x)'=\cos x.$

证明. 对于任意给定的 x 以及增量 $\Delta x\neq 0$，

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

差化积，得

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

[1]关于以下两个定理的严格证明需要用到高等数学中的极限理论，显然超出了本书的要求，所以在本书中仅作简要说明而不提供严格的证明.

[2]n 趋于无穷时的数列极限的严格定义需要用到高等数学的说法，读者对此可以仅作直观上的理解.

因而[3],

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0} 2\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

□

评注 11.6.1. 正弦函数的导函数为余弦函数这一简单优美的性质是建筑在重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的基础之上的，而且这一极限公式的成立又是建立在自变量 x 采用弧度制的基础之上的，如果不采用弧度制（例如采用角度制），那么 $\sin x$ 和 x 之比在 $x\to 0$ 时的极限将不再是 1 而是一个其他的常数，这会导致正弦函数的导函数是余弦函数再乘上某一个常数，这无疑是令人讨厌的. 这也从反面说明了采用弧度制定义下的三角函数的科学性.

例 11.7. 设 α 是正整数，则 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

证明. 事实上，对于任意的 x 和增量 $\Delta x\neq 0$,

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha\\ &= \alpha x^{\alpha-1}\Delta x+\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^\alpha,\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}+\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{\alpha-1}.$$

注意到上面的式子中从第二项开始每一项都包含 Δx 的方幂，因此它们在 $\Delta x\to 0$ 时都等于 0，这就得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

□

这就是正整数次幂函数的导数公式. 事实上还能证明，上式对于实数次幂函数 (α 不是自然数而是一般的实数时) 也成立.

例 11.8. $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

这是一个非常奇妙的事实：函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的导数值处处等于函数本身的值！常见的函数中除了 $y=C\mathrm{e}^x$ 之外再无其他函数具有这种性质.

证明. 对于给定的一点 x 及增量 $\Delta x\neq 0$，我们有

$$\Delta y=\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x}-1).$$

[3]这里的推导并不严格，严格的推导需要用到极限四则运算法则，以及余弦函数的连续性概念等高等数学知识，同样，读者仅在直观上理解即可.

为方便起见我们记 $\eta = \mathrm{e}^{\Delta x} - 1$，则显然当 $\Delta x \to 0$ 时候有 $\eta \to 0$. 另外，$\Delta x = \ln(1+\eta)$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \mathrm{e}^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\ &= \mathrm{e}^x \lim_{\eta\to 0}\frac{\eta}{\ln(1+\eta)} = \mathrm{e}^x \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\ln(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}}.\end{aligned}$$

根据重要极限，$\lim\limits_{\eta\to 0}(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}} = \lim\limits_{\xi\to\infty}(1+\frac{1}{\xi})^{\xi} = \mathrm{e}$.

所以 $\lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+\eta)^{\frac{1}{\eta}}} = 1$, 从而立即得到我们的结论. □

根据导数的定义[4]，我们可以给出导数的四则运算法则.

定理 11.1.3 (导数的四则运算法则). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个共同的区间 (a,b) 上的每一点 x 处都可导，那么我们有：

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x),$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

特别地，对于任意的常数 c，

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

当 $g(x)\neq 0$ 时，

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

证明. 关于函数和与差的导数公式，很容易由导数的定义直接推出，下面我们证明函数乘积的导数公式，首先我们将函数值的增量 $\Delta(f\cdot g)$ 作变形：

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)f(x) + g(x+\Delta x)f(x) - f(x)g(x)\\ &= [f(x+\Delta x)-f(x)]\cdot g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)],\end{aligned}$$

用 Δx 除上式并取极限，得

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}\\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).\end{aligned}$$

即得到了函数乘积的导数公式. 有些读者或许不能接受 “$g(x+\Delta x)$” 取极限后 Δx“神秘消失” 这件事（事实上，$g(x+\Delta x)\to g(x)(\Delta x\to 0)$，这里用到了 g 的连续性），一种避免用到函数连续性的方法是通过另一个对偶式 $\Delta y = f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-(x)] + g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]$，两式相加并取极限可以直接得到 $2[f(x)\cdot g(x)]' = 2[f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]$，也可以得到上述结果，此处不再赘述.

[4]严格推导还需用到函数的连续性，以及极限的四则运算法则.

类似地，当 $g(x)\neq 0$ 时，由

$$\begin{aligned}\Delta(\frac{f}{g})=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\&=\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{g(x)g(x+\Delta x)}.\end{aligned}$$

对上式取极限，即得两函数之商的导数公式. □

现在我们讨论复合函数和反函数的导数，有了前面的结果，再加上这两条法则，所有初等函数的导数我们就全都会算了.

设有函数 $y=g(x)$，并假设复合函数 $z=f[g(x)]$ 满足复合函数定义域的要求，那么该如何求它的导函数呢?

对于定义域内任意给定的一点 x，以及自变量 x 的一个增量 $\Delta x\neq 0$，

$$\Delta z=f[g(x+\Delta x)]-f[g(x)].$$

我们记中间变量 y 对 Δx 的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，用 Δx 除上式并取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta x}.$$

这就是关于 x 的复合函数 $z=f[g(x)]$ 的导函数，现在我们做如下讨论:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}]\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=f'(y)g'(x)\end{aligned}$$

上述讨论忽略了几个细节问题：首先上述讨论中有一步将 $\Delta x\to 0$ 换成了 $\Delta y\to 0$，这样做需要一定的条件，即当 $\Delta x\to 0$ 时有 $\Delta y\to 0$，根据函数的连续性可知，这是成立的.

其次，在 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 可能为 0，这时用 Δy 去除 Δz 会变得没有意义，这是上述推导过程的一个缺憾，但是如果忽略掉某些细节而把上述过程当成一个不够严谨的讨论，不失为理解问题的一个方案. 总之，关于复合函数求导法则有如下定理:

定理 11.1.4 (复合函数求导法则). 设复合函数 $z=f[g(x)]$ 的内层函数 $y=g(x)$ 和外层函数 $z=f(y)$ 在各自的定义域内都可导，则关于复合函数的导函数有如下公式

$$z'=f'[g(x)]g'(x).$$

或者简写成

$$z'=f'(y)g'(x)\text{或 } z'_x=z'_y y'_x.$$

其中记号 $f'(y)$（或 z'_y）表示将 z 视为 y 的函数时对 y 的导数，这就是说，求复合函数的导数时应先求 z 对中间变量 y 的导数，再求中间变量 y 对自变量 x 的导数，这样“从外到内”先后求导，两者的乘积就是复合函数的导数.

复合函数的求导公式是求导运算中非常基本的公式，读者应该通过多做练习熟练地掌握它.

例 11.9. $(\cos x)' = -\sin x$.

证明.

$$\cos x = \sin\Big(-x + \frac{\pi}{2}\Big).$$

令 $z = f(y) = \sin y$，其中 $y = g(x) = -x + \dfrac{\pi}{2}$，$y$ 为中间变量，那么

$$z' = f'(y)g'(x) = \cos y \cdot (-1) = -\cos\Big(-x + \frac{\pi}{2}\Big) = -\sin x.$$

这样就证明了 $\cos x$ 的导函数是 $-\sin x$. □

例 11.10. 对于一般的指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$，我们有

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

证明.

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

令 $z = f(y) = \mathrm{e}^y$，其中 $y = g(x) = x \ln a$，y 为中间变量，那么

$$z' = f'(y)g'(x) = \mathrm{e}^y \cdot \ln a = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

□

我们看到以 e 为底的指数函数求导数时的表达式最简单. 也正是这个原因，引入 e 和自然对数会给我们带来很多方便，大家知道这要归功于欧拉.

对于初学者而言，一开始时引入中间变量可能是必要的，但是做过一定练习之后就不必将中间变量明确地写出，只要在心中默记什么是中间变量就可以了.

例 11.11. $(\tan x)' = (\dfrac{\sin x}{\cos x})' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$(\cot x)' = (\dfrac{\cos x}{\sin x})' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

例 11.12. 求函数 $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x^2}$ 的导数.

解.

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\sin x^2})' &= \mathrm{e}^{\sin x^2}(\sin x^2)' = \mathrm{e}^{\sin x^2} \cos x^2 (x^2)' \\ &= 2x \cos x \mathrm{e}^{\sin x^2}.\end{aligned}$$

♡

评注 11.12.1. 这个问题中用一个中间量不够，尚须引入多个，但是即使是这样的情形我们发现也没有必要把两个中间变量写出，而只需要一次次地在心中将某部分的表达式当成一个整体反复运用复合函数的公式就可以了，例如我们先将 $\sin x^2$ 看成一个整体（当成中间变量），用一次复合函数求导公式 $\cdots$ 从外层到内层多次使用复合函数求导公式，即可得到结果.

下面讨论一个函数的导数和它的反函数的导数之间存在什么关系.

定理 11.1.5. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，则

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}.$$

式中 $g'(f(x))$ 指的是 $g(x)$ 先对 x 求导得到 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$，然后再将 $f(x)$ 代入到 $g'(x)$ 的表达式得到的结果.

证明. 这个结论可以由复合函数求导公式直接得到，根据反函数定义可得

$$g[f(x)]=x.$$

对此式两边求导立刻得 $g'(f(x))f'(x)=1$. □

这就是说，**一个函数在一点的导数与其反函数在对应点的导数互为倒数**，即设 $y=f(x)$，$g(x)=f^{-1}(x)$，则 $f'(x)g'(y)=1$.

例 11.13. 证明 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}(x>0)$，$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0且\ a\neq 1, x>0)$.

证明. 函数 $y=\ln x$ 是 $x=\mathrm{e}^y$ 的反函数，根据定理11.1.5 可知

$$(\ln x)'=\frac{1}{\mathrm{e}^y}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

对数函数的导数竟然是一个十分简单的函数——倒数函数.

对于函数 $y=\log_a x$，它是 $x=a^y$ 的反函数，根据定理11.1.5 可知

$$(\log_a x)'=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{a^{\log_a x}\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

□

正如以 e 为底的指数函数求导数的表达式最简单一样，以 e 为底的对数函数求导数的表达式也最简单.

例 11.14. 证明：设 $\alpha\in\mathbb{R}$，则有

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}(x>0).$$

证明. 当 $\alpha=0$ 时，$x^\alpha=1$ 恒成立，所以其导数为 0，符合上式.

当 $\alpha\neq 0$ 时，将 x^α 写成

$$x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}.$$

根据复合函数求导法则可知

$$(x^{\alpha\ln x})'=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

□

评注 11.14.1. 这是以前我们曾证明过的当 α 为正整数时，x^α 的导数为 $\alpha x^{\alpha-1}$ 这一结论的推广.

至此，我们已经计算了全部基本初等函数的导函数，现在列表如下：

(I) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$.

(II) $(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

(III) $(a^x)' = a^x \ln a$，特别地，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

(IV) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}(x > 0)$，特别地，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}(x > 0)$.

有了这张表，再加上导数的四则运算和复合运算法则，我们就可以计算所有初等函数的导数. 初等函数在其定义域内的任意一个开区间都可导，且导函数仍是初等函数，读者尽可放心使用这张表.

例 11.15. 求函数 $y = x^x(x > 0)$ 的导函数.

解. 我们将这个函数改写为

$$y = \mathrm{e}^{x \ln x}.$$

用复合函数求导法则，

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \\ &= \mathrm{e}^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1). \end{aligned}$$

♡

评注 11.15.1. 先取对数再求导可以将幂指函数简化，另外还可以将乘法运算化为加法运算，将除法运算化为减法运算，因此利用先取对数再求导的方法再有些情况下会带来方便.

例 11.16. 求函数 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ 的导函数.

解.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + a^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot (1 + \frac{(x^2 + a^2)'}{2\sqrt{x^2 + a^2}}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot (1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

♡

例 11.17. 若以下讨论到的函数在定义域内都可导，证明：奇函数的导函数是偶函数，偶函数的导函数是奇函数.

▌（分析：写出对应的函数方程，再根据复合函数求导法则求出导函数即可证明相应结论.）

证明. 设 $f(x)$ 是定义域内可导的奇函数，$g(x)$ 是定义域内可导的偶函数.

因为

$$f(x) = -f(-x).$$

两边同时求导数得

$$f'(x) = -[f'(-x) \times (-1)] = f'(-x).$$

所以 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是偶函数.

同理，因为

$$g(x) = g(-x).$$

两边同时求导数得

$$g'(x) = g'(-x) \times (-1) = -g'(-x).$$

所以 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$ 是奇函数. □

例 11.18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，函数

$$f(x) = x(x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_7).$$

若 $f'(0) = 0$，则（　　　　）.

(A) $\{\lg a_n\}$ 为单调递增的等差数列　　(B) $0 < q < 1$

(C) $\{S_n - \dfrac{a_1}{1-q}\}$ 为单调递增的等比数列　　(D) 使得 $T_n > 1$ 的 n 的最大值为 6

解. 根据乘积的求导运算法则

$$f'(x) = (x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_7) + x[(x + a_1)(x + a_2)\cdots(x + a_7)]'.$$

将 $x = 0$ 代入，并根据等比数列的性质可得

$$f'(0) = a_1 a_2 \cdots a_7 = a_4^7 = 1.$$

所以 $a_4 = a_1 q^3 = 1$，又因为首项 $a_1 > 1$，所以 $0 < q^3 < 1$，所以 $0 < q < 1$，B 项正确.

因为

$$\lg a_n = \lg(a_1 q^{n-1}) = \lg a_1 + (n-1)\lg q,$$

又因为 $0 < q < 1$，所以 $\lg q < 0$，即数列 $\{\lg a_n\}$ 为单调递减的等差数列，A 项不正确.

根据等比数列的前 n 项和公式可知

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{q-1} q^n.$$

因为 $0 < q < 1, a_1 > 1$，所以数列 $\{S_n - \dfrac{a_1}{1-q}\}$ 为单调递增的等比数列，C 项正确.

因为 $T_7 = a_1 a_2 \cdots a_7 = 1$，$a_4 = 1$，$0 < q < 1$，所以当 $n \geq 5$ 时，$a_n = a_4 q^{n-4} < a_4 = 1$，进一步知当 $n \geq 8$ 时，$T_n = T_7 a_8 a_9 \cdots a_n < T_7 < 1$，

另一方面，$T_6 = \dfrac{T_7}{a_7} > T_7 = 1$，所以使得 $T_n > 1$ 成立的 n 的最大值是 6，D 项正确. ♡

例 11.19 (利用导数求切线方程). (1) 若函数 $f(x)-\sin(x+\varphi)$ 是偶函数，$f(x)-\cos(x+\varphi)$ 是奇函数，已知存在点 $P(x_1,f(x_1))$，$Q(x_1+\dfrac{\pi}{2},f(x_1+\dfrac{\pi}{2}))$，使曲线 $y=f(x)$ 在 P,Q 处的切线斜率互为倒数，那么 $\cos\varphi$=__________________.

(2) 已知函数 $f(x)=\sin x$ 的图像与直线 $kx-y-k\pi=0,k>0$ 恰有三个不同的公共点，这三个点的横坐标从小到大分别为 x_1,x_2,x_3，则 $\dfrac{\tan(x_2-x_3)}{x_1-x_2}$ =__________________.

(1) *解.* 由 $f(x)-\sin(x+\varphi)$ 是偶函数得函数方程

$$f(x)-\sin(x+\varphi)=f(-x)-\sin(-x+\varphi),$$

由 $f(x)-\cos(x+\varphi)$ 是奇函数得函数方程

$$f(x)-\cos(x+\varphi)=-f(-x)+\cos(-x+\varphi),$$

两式相加，整理得

$$f(x)=\frac{1}{2}[\sin(x+\varphi)-\sin(-x+\varphi)+\cos(x+\varphi)+\cos(-x+\varphi)].$$

和差化积，得

$$f(x)=\cos\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x.$$

所以

$$f'(x)=\cos\varphi(\cos x-\sin x).$$

所以 $y=f(x)$ 在 P 处的斜率

$$k_1=\cos\varphi(\cos x_1-\sin x_1),$$

在 Q 处的斜率

$$k_2=\cos\varphi(\cos\Big(x_1+\frac{\pi}{2}\Big)-\sin\Big(x_1+\frac{\pi}{2}\Big))=\cos\varphi(-\sin x_1-\cos x_1).$$

因为 $k_1k_2=\cos^2\varphi(\sin^2 x_1-\cos^2 x_1)=-\cos 2x_1\cos^2\varphi=1$.

根据余弦函数的有界性，上式当且仅当 $\cos 2x_1=-1,\cos^2\varphi=1$ 时成立，所以 $\cos\varphi=\pm1$. ♡

(2) *解.* 直线 $kx-y-k\pi=0$ 过定点 $(\pi,0)$ 且斜率为正，画出草图，数形结合可知仅当直线与 $y=\sin x$ 相切时恰有三个不同的公共点.

下面我们求切线斜率，根据图像结合正弦函数的中心对称性可知

$$x_1+x_3=2x_2=2\pi.$$

因为 x_1 和 x_3 对应的点是切点，所以 x_1 和 x_3 处的切线斜率都等于 k. 因为

$$f'(x)=\cos x.$$

所以 $k=\cos x_1=\cos x_3$, 所以直线方程为 $y=\cos x_3(x-\pi)$，将点 $(x_3,\sin x_3)$ 代入得

$$\sin x_3=\cos x_3(x_3-\pi),$$

所以 $\tan x_3 = x_3 - \pi$.

所以

$$\frac{\tan(x_3-x_3)}{x_1-x_3}=\frac{\tan(\pi-x_3)}{2\pi-x_3-x_3}=\frac{-\tan x_3}{2\pi-2x_3}=\frac{\pi-x_3}{2\pi-2x_3}=\frac{1}{2}.$$

♡

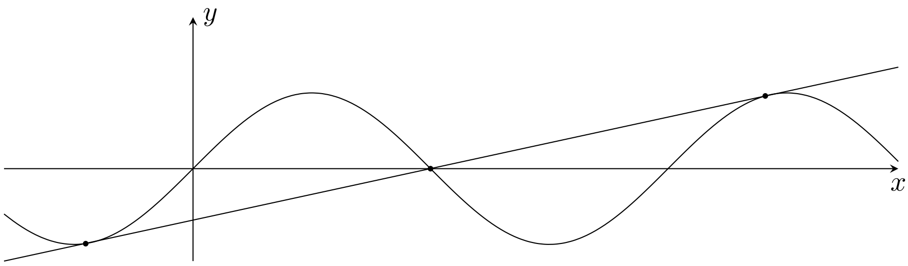


图 11.4:

评注 11.19.1. 利用导数解决曲线的切线问题，最根本的是抓住切点处的切线斜率等于对应点处的导数值，有时并不明确地知道切点的具体坐标，此时可以设出切点，再根据其他题给条件求出切线方程.

例 11.20. (1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$，($\ln x$ 是以 e 为底的自然对数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$) 若存在实数 $m,n(m<n)$ 满足 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的最小值为______.

(2) 已知 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 满足 $2b-a=3$，$d=\ln c$，求 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值.

解. (1) 数形结合，画出 $f(x)$ 的图像，如图11.5 所示.

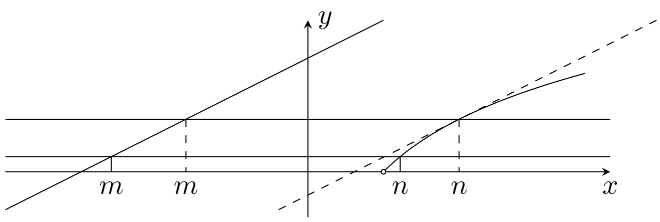


图 11.5:

根据图像可知，$n-m$ 实际上是将直线向右平移，使得直线与 $y=\ln x$ 有公共点的最小平移量，显然当平移后的直线与 $y=\ln x$ 相切时平移量最小，此时 n 处的切线斜率等于 $\frac{1}{2}$.

因为 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$，解得 $n=2$，此时 $f(n)=\ln 2=f(m)$.

所以 $\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}=\ln 2$，所以 $m=2\ln 2-3$.

所以 $n-m$ 的最小值为 $5-2\ln 2$.

(2) 由题设

$$b=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2},d=\ln c.$$

所以 (a,b) 是直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 上的点，而 (c,d) 是 $y=\ln x$ 上的点.

另一方面，$(a-c)^2+(b-d)^2$ 可以理解为点 (a,b) 和点 (c,d) 间距离的平方，问题转化成求 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 上一点到 $y=\ln x$ 上一点的最短距离.

对于固定的点 (c,d) 到直线上点的距离中，垂线段（即点到直线的距离）最短，问题转化为求 $y=\ln x$ 上一点到直线距离的最小值.

当 (c,d) 处的切线与直线平行时，(c,d) 到直线的距离取得最小值，结合 (1) 的结果可知最短距离 l 为

$$l=(5-2\ln 2)\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln 2.$$

所以 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $(\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ln 2)^2$. ♡

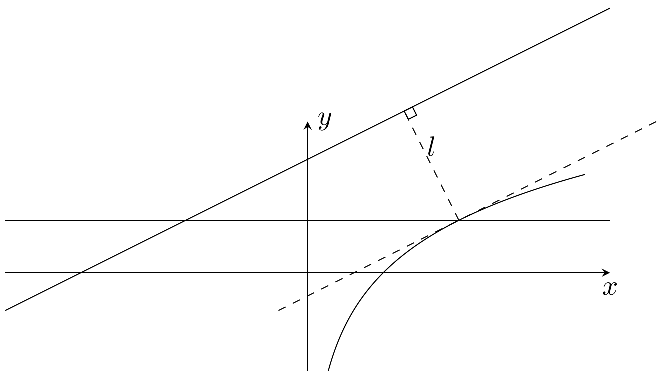


图 11.6:

有时候我们需要解决不是由显式表达式给出的函数的在某点处的导数问题，例如求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程，如何用导数解决这个问题呢？

事实上从椭圆方程中我们可以解得两个函数

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}(-a\le x\le a).$$

这两个函数都是由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所确定的隐函数.

一般说来，若函数 $y=f(x)$ 代入二元方程 $F(x,y)=0$ 时使得 $F(x,f(x))=0$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是方程 $F(x,y)$ 所确定的**隐函数**.

在椭圆这个例子中尽管可以从方程中解出 y 并求出 y 的导函数，但是这样处理比较麻烦，而且在有些情况下甚至无法将 y 表示成 x 的初等函数，**隐函数求导法则**能够使得我们在不求解方程 $F(x,y)=0$ 的情况下得到 y 对 x 的导数.

定理 11.1.6 (隐函数求导法则). [5] 通过方程 $F(x,y)=0$ 给出的隐函数 y 的导数可以按下式计算：

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

其中 F'_x 指的是 $F(x,y)$ 形式上对 x 的导函数（求导时将 y 看成常数），F'_y 指的是 $F(x,y)$ 形式上对 y 的导函数（求导时将 x 看成常数）.

[5] 该定理的严格证明需要用到高等数学知识.

我们以求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为例:

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,$$

所以

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},F'_y=\frac{2y}{b^2}.$$

所以

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

将 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入，则 (x_0,y_0) 处的切线斜率为

$$k=y'\Big|_{(x_0,y_0)}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

根据点斜式方程可知切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0).$$

整理得

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

因为 (x_0,y_0) 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，所以上式可以化简为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

这与我们用“半代换”得到的结果是一致的.

可见，在上面的过程中我们始终没有求出 y 关于 x 的表达式；另外，隐函数求导的结果 $y'=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$ 中仍含有 y，这是可以接受的，因为 y 往往难以表示成 x 的明显表达式，而且这个结果的确能够帮助我们解决求曲线上某点处切线斜率的问题.

习题 11.1

1. 已知函数 $f(x)=x^3$ 对应的曲线在点 $(a_k,f(a_k))(k\in\mathbb{N}^*)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(a_{k+1},0)$，若 $a_1=1$，则 $\dfrac{f(\sqrt[3]{a_1})+f(\sqrt[3]{a_2})+\cdots+f(\sqrt[3]{a_{10}})}{1-(\frac{2}{3})^{10}}=$______.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$，($\ln x$ 是以 e 为底的自然对数，$e=2.71828\cdots$) 若存在实数 $m,n(m<n)$ 满足 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的取值范围为______.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{4}x$，$g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，且 $\exists x_1,x_2$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $|x_2-x_1|$ 的最小值为______.

4. 已知点 P 在曲线 $y=e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值是______.

5. 已知 $a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}^+$ ，e 为自然对数的底数，则 $(e^a-\ln b)^2+(a-b)^2$ 的最小值为______.

6. 设 $x, y \in \mathbb{R}$，则 $P = (x+1-\cos y)^2 + (x-1+\sin y)^2$ 的最小值为______.

7. 设点 P, Q 分别在函数 $y = 2^x$ 和函数 $y = \log_2 x$ 的图像上，则 $|PQ|$ 的最小值 =______.

8. 已知实数 $x, y \in (1, +\infty)$，且 $xy - 2x - y + 1 = 0$，求 $\dfrac{3}{2}x^2 + y^2$ 的最小值.

11.2 导数在研究函数性质中的应用 I

11.2.1 导数与函数的单调性

定理 11.2.1. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导.

如果当 $x \in (a, b)$ 时，$f'(x) > 0$，那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增.

如果当 $x \in (a, b)$ 时，$f'(x) < 0$，那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减.

特别地，如果当 $x \in (a, b)$ 时 $f'(x) = 0$ 恒成立，那么 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上恒等于一个常数，即 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是常函数；反过来，如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是常函数，则必有当 $x \in (a, b)$ 时 $f'(x) = 0$ 恒成立.

这个定理告诉我们，函数的一阶导函数在某个区间上的正负决定了函数在这个区间上的单调性. 这是很自然的事情，因为函数在某点处的导数决定了该点处的瞬时变化率，所以如果在区间 (a, b) 上 $f'(x) > 0$，那么 $f(x)$ 在 (a, b) 上的瞬时变化率就处处为正，即函数是单调递增的；同理，如果在区间 (a, b) 上 $f'(x) < 0$，那么 $f(x)$ 在 (a, b) 上的瞬时变化率就处处为负，函数就是单调递减的了.

特别在这里指出，如果当 $x \in (a, b)$ 时 $f'(x) \geq 0$，则不能作出 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上递增的判断（当然，这里的递增指的是严格递增）. 事实上，如果 $\exists (m, n) \subseteq (a, b)$ 使得当 $x \in (m, n)$ 时候 $f'(x) = 0$ 恒成立，那么 $f(x)$ 在 (a, b) 的一个子区间 (m, n) 上是一个常函数，从而 $f(x)$ 在 (a, b) 上不单调递增.

由此可见，如果希望从 $f'(x) \geq 0$ 推出 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上递增，则必须保证不存在区间 $(m, n) \subseteq (a, b)$ 使得当 $x \in (m, n)$ 时候 $f'(x) = 0$ 恒成立，即 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上只能存在有限个点使得 $f'(x) = 0$，换句话说，只能有有限个零点而没有“零段”. 在满足这个条件的前提下，我们就可以说 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增.

$f'(x) \leq 0$ 的情况同理.

单调性是函数的重要不等式性质，我们曾经利用函数的单调性解决了有关函数性质的许多问题，在此之前我们除了用定义判断之外，只能利用函数四则运算与复合运算的相关结论，现在学习了导数与函数的单调性之后，就可以根据一阶导函数的符号来直接判断函数在某个区间上的单调性，可谓非常方便.

例 11.21. 已知函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{x+1}{x-1}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

（分析：求出函数的一阶导函数并判断在定义域内各区间上导数的符号，从而判断单调性.）

解. 分离常数得

$$f(x) = \ln x - \frac{2}{x-1} - 1.$$

可以看出函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上也单调递增. ♡

例 11.22. 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$,

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

> （分析：求出函数的一阶导函数，判断在各区间内导数的符号，从而判断单调性. 这里函数的表达式含有两个参数 a,b，而参数的取值范围会影响导函数的正负，所以应当分类讨论.）

解.

$$f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\frac{a}{3}).$$

分 $a>0$，$a=0$ 和 $a<0$ 三种情况讨论.

1°　若 $a=0$，则 $f'(x)=6x^2\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增.

2°　若 $a>0$,

则当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<\dfrac{a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>\dfrac{a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

3°　若 $a<0$,

则当 $x<\dfrac{a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $\dfrac{a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ♡

例 11.23. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=\mathrm{e}^2$ 且对于任意的 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x)>f'(-x)$，则不等式 $f(x+2)>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ 的解集为__________.

> （分析：条件 $f(x)>f'(-x)$ 看上去与要求解的不等式难以建立联系，注意到 $f(x)$ 是偶函数，所以条件转化为 $f(x)-f'(x)>0$，注意到 $[\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}]'=\dfrac{f(x)+f'(x)}{\mathrm{e}^x}$，考虑构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，则根据题给条件可以判断出其单调性，进一步利用单调性解函数不等式.）

解. 因为 $f(x)$ 偶函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，因为 $f(x)>f'(-x)=f'(x)$，即 $f(x)-f'(x)>0$,

根据商的求导法则可知

$$[\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}]'=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}<0,$$

构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，则 $g(x)$ 单调递减,

$f(x+2)>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ 等价于 $f(-x-2)\mathrm{e}^x>1$，进一步等价于

$$\frac{f(-x-2)}{\mathrm{e}^{-x-2}}>\mathrm{e}^2=\frac{f(0)}{\mathrm{e}^0}\text{即}g(-x-2)>g(0).$$

进一步等价于 $-x-2<0$，即 $x>-2$，所以不等式的解集为 $(-2,+\infty)$.

另解 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f'(-x)$ 是奇函数，所以

$$f(x)-f'(-x)=f(x)+f'(-x)>0.$$

所以

$$[\mathrm{e}^x f(x)]'=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]>0.$$

构造函数 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则 $g(x)$ 单调递增.

$f(x+2)>\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ 等价于 $\mathrm{e}^x f(x+2)>1$, 进一步等价于 $\mathrm{e}^{x+2}f(x+2)>\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^0 f(0)$ 即 $g(x+2)>(0)$.

进一步等价于 $x+2>0$，所以 $x>-2$，即不等式的解集为 $(-2,+\infty)$. ♡

评注 11.23.1. 这类问题称为**构造函数**问题，处理这类问题时我们要注意“瞻前顾后”，即一方面要关注题给条件，考虑能够造出哪种函数的导函数，另一方面也要关注设问，考虑构造什么函数能解出函数不等式.

关于构造函数的常见形式在此总结如下：

(1) 利用幂函数和 $f(x)$ 构造函数：

$$[xf(x)]'=f(x)+xf'(x),$$

$$[x^2f(x)]'=2xf(x)+x^2f'(x)=x(2f(x)+xf'(x)),$$

$$[x^3f(x)]'=3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^2(3f(x)+xf'(x)),$$

$$[x^nf(x)]'=nx^{n-1}f(x)+x^nf'(x)=x^{n-1}(nf(x)+xf'(n)).$$

$$[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}[xf'(x)-f(x)],$$

$$[\frac{f(x)}{x^2}]'=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{1}{x^3}[xf'(x)-2f(x)],$$

$$[\frac{f(x)}{x^3}]'=\frac{x^3f'(x)-3x^2f(x)}{x^6}=\frac{1}{x^4}[xf'(x)-3f(x)],$$

$$[\frac{f(x)}{x^n}]'=\frac{x^nf'(x)-nx^{n-1}f(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{n+1}}[xf'(x)-nf(x)].$$

由上可知，若条件中有 $xf'(x)\pm kf(x)$ 的形式，考虑用幂函数和 $f(x)$ 构造函数，注意系数问题即可.

(2) 利用指数函数和 $f(x)$ 构造函数：

$$[\mathrm{e}^x f(x)]'=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)],$$

$$[\mathrm{e}^{2x} f(x)]'=\mathrm{e}^{2x}[f'(x)+2f(x)],$$

$$[\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}]'=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x},$$

$$[\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{2x}}]'=\frac{f'(x)-2f(x)}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

由上可知，若条件中有 $f'(x)\pm kf(x)$ 的形式，考虑用指数函数和 $f(x)$ 构造函数，同样要注意系数问题.

(3) 由 (1)(2) 两条可总结出构造函数求解导数问题的一般流程：首先根据 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 是否为线性判断使用指数函数还是幂函数，其次根据系数 k 确定函数的幂次，最后根据正负号决定是“乘”还是“除”.

例 11.24. $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 上的可导函数，且满足 $2f(x) + xf'(x) > x^2$，则不等式 $(x+2022)^2 f(x+2022) > f(-1)$ 的解集为________________.

解. 先顾后，需要求解的函数不等式可以变形为

$$(x+2022)^2 f(x+2022) > (-1)^2 f(-1),$$

考虑构造函数 $F(x) = x^2 f(x)$，则原不等式等价于 $F(x+2022) > F(-1)$.

再瞻前，$F'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x[2f(x) + xf'(x)]$ 结合已知条件可知 $x[2f(x) + xf'(x)] < x^3 < 0$，所以 $F(x)$ 递减，

$F(x+2022) > F(-1)$ 等价于 $x + 2022 < -1$，所以 $x < -2023$，即原不等式的解集为 $(-2023, +\infty)$. ♡

11.2.2 导数与函数的极值

定理 11.2.2 (极值的必要条件). 我们称一个点 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点，如果该函数在 x_0 附近存在一个小区间 (m, n) $(x_0 \in (m, n))$，使得

$$\text{对于}\forall x \in (a, b), f(x) \geq f(x_0)$$

或

$$\text{对于}\forall x \in (a, b), f(x) \leq f(x_0)$$

在前一种情况下，我们称 x_0 是 $f(x_0)$ 的**极小值点**，$f(x_0)$ 是**极小值**；而在后一种情况下，我们称 x_0 是 $f(x_0)$ 的**极大值点**，$f(x_0)$ 为**极大值**. 极大值和极小值统称**极值**，极大值点和极小值点统称**极值点**.

从定义中可以看出，极值可以理解为小开区间内的最值. 过去我们曾谈论过闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的最大值和最小值，而极大值和极小值只是在一个局部范围内函数的最大值和最小值，在整个闭区间上它们未必是最大值和最小值.

反过来，一个函数在闭区间的最大值和最小值也未必是极大值和极小值. 事实上，一个连续函数在某个闭区间的最值必在端点或区间内部的极值点处取得，因此有时函数的最值是在端点处而不是区间内部的点处达到的.

过去我们以二次函数为例探讨过闭区间最值问题，现在有了极值的概念我们就可以将这个理论推广到一般的连续函数：**寻求一个函数在一个闭区间上的最值，只要找到它在区间内部的所有极值点，再将这些点所对应的函数与端点处的函数值作比较就够了.**

下面着重探讨如何找到一个函数的极值点，即极值点的充分条件和必要条件.

在利用导数研究函数的单调性时，我们知道一阶导函数的正负号决定了函数在某个区间上的增减，如果函数在某些点的导数为 0，那么这些点处的函数有什么性质呢?

若一个函数具有极小值，则在极小值点附近的一个小开区间内存在这种图像，如图11.7所示

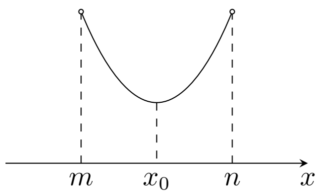


图 11.7:

即在 x_0 的左侧有 $f'(x) \le 0$，在 x_0 的右侧有 $f'(x) \ge 0$，又因为 $f'(x)$ 是连续函数，于是必然有 $f'(x_0) = 0$.

对于 x_0 是极大值的情况，道理完全类似，留给读者自己叙述.

总之，我们得到了极值的必要条件，即极值点处的导数值必得零.

这个命题反之不成立，即导数值为 0 的点不一定是极值点，例如函数 $f(x) = x^3$，我们有 $f'(x) = 3x^2$，虽然 $f'(0) = 0$，但是无论当 $x > 0$ 还是 $x < 0$ 时恒有 $f'(x) > 0$，即函数 $f(x) = x^3$ 在 0 附近的小区间上是增函数，所以 0 不是函数 $f(x) = x^3$ 的极值点. 由此可见，**一般地，函数 $y = f(x)$ 在某一点的导数值得 0 是函数 $y = f(x)$ 在这一点达到极值的必要非充分条件.** 正因如此，我们在利用导数值得 0 解出极值点后，**必须验证其充分性**.

定理11.2.2 为我们提供了寻找极值点的一般方法，我们可以利用导数寻找函数的极值，从而求出函数在闭区间上的最值.

例 11.25. *(1) 已知 a 为实数，且对任意 $k \in [-1, 1]$，当 $x \in (0, 6]$ 时，$6\ln x + x^2 - 8x + a \le kx$ 恒成立，则 a 的最大值是______.*
(2) 设函数 $f(x) = \mathrm{e}^x(x^3 - 3x + 3) - a\mathrm{e}^x - x(x \ge -2)$. 若不等式 $f(x) \le 0$ 在 $[0, 2]$ 上有解，则实数 a 的最小值为______.

解. (1) 分离参数，因为 $x > 0$，所以 $6\ln x + x^2 - 8x + a \le kx$ 恒成立等价于

$$k \le \frac{6\ln x}{x} + x - 8 + \frac{a}{x}$$

对任意的 $k \in [-1, 1]$ 和 $x \in (0, 6]$ 恒成立，进一步等价于，

$$-1 \le \frac{6\ln x}{x} + x - 8 + \frac{a}{x}$$

对任意的 $x \in (0, 6]$ 恒成立，再分离参数，进一步等价于

$$a \le -x^2 - 6\ln x + 7x$$

对任意的 $x \in (0, 6]$ 恒成立，记 $h(x) = -x^2 - 6\ln x + 7x, x \in (0, 6]$，这又等价于

$$a \le h_{\min}(x).$$

由

$$h'(x) = -2x - \frac{6}{x} + 7 = -\frac{(2x-3)(x-2)}{x}.$$

当 $x \in (\frac{3}{2}, 2)$ 时 $h'(x) > 0$，$h(x)$ 是增函数；当 $x \in (0, \frac{3}{2})$ 和 $(2, 6]$ 时，$h'(x)$ 为减函数，所以 $h(x)$ 的最小值是极小值 $h(\frac{3}{2})$ 和端点处的函数值 $h(6)$ 两者中的较小者.

$$h(\frac{3}{2}) = \frac{33}{4} - 6\ln\frac{3}{2}, h(6) = 6 - 6\ln 6, h(\frac{3}{2}) - h(6) = \frac{9}{4} + 12\ln 2 > 0,$$

所以 $h_{\min}(x) = h(6) = 6 - 6\ln 6$，从而 a 的最大值是 $6 - 6\ln 6$.

评注 11.25.1. 再次强调，寻求一个函数在一个闭区间上的最值，只要找到它在区间内部的所有极值点，再将这些点所对应的函数与端点处的函数值作比较就够了.

(2) 分离参数，则原不等式等价于

$$a \geq x^3 - 3x + 3 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

在 $[0, 2]$ 上能成立，记 $h(x) = x^3 - 3x + 3 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}, x \in [0, 2]$ 这进一步等价于

$$a \geq h_{\max}(x).$$

而

$$h'(x) = 3x^2 - 3 - \frac{1-x}{\mathrm{e}^x} = 3(x-1)(x+1) + (x-1)\frac{1}{\mathrm{e}^x} = (x-1)(3x + 3 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}).$$

所以当 $x \in (0, 1)$ 时 $h'(x) > 0$，$h(x)$ 递增，当 $x \in (1, 2)$ 时 $h'(x) < 0$，$h(x)$ 递减，所以

$$h_{\min}(x) = h(1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

即 a 的最小值是 $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. ♡

例 11.26 (解一个闭区间最值问题，参见例题11.22). 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$,
(2) 是否存在这样的实数 a, b，使得 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的最小值是 -1 且最大值为 1？若存在，请求出 a, b，若不存在，说明理由.

解. 假设存在这样的 a, b，那么

1° 若 $a \leq 0$，由 (1) 可知，$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，无极值，所以

$$\begin{cases} f(x)_{\min} = f(0) = b = -1, \\ f(x)_{\max} = f(1) = 2 - a + b = 1. \end{cases}$$

解得 $a = 0, b = -1$.

2° 若 $a \geq 3$，由 (1) 可知，$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，无极值，所以

$$\begin{cases} f(x)_{\min} = f(1) = 2 - a + b = -1, \\ f(x)_{\max} = f(0) = b = 1. \end{cases}$$

解得 $a = 4, b = 1$.

3° 若 $0<a<3$，由 (1) 可知，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{a}{3},1)$ 上单调递增，在 $x=\dfrac{a}{3}$ 处达到极小值，所以

$$f(x)_{\min}=f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}+b=-1.$$
$$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{b,2-a+b\}.$$

(i) 当 $a\in(0,2]$ 即 $b\le 2-a+b$ 时

$$\begin{cases}f(x)_{\max}=2-a+b=1,\\ f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{3})=-\dfrac{a^3}{27}+b=-1.\end{cases}$$

解得 $a=0,b=1$（舍）或 $a=\pm3\sqrt{3}$，$b=\pm3\sqrt{3}-1$ （舍）.

(ii)(i) 当 $a\in(2,3)$ 即 $b>2-a+b$ 时

$$\begin{cases}f(x)_{\max}=b=1,\\ f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{3})=-\dfrac{a^3}{27}+b=-1.\end{cases}$$

解得 $a=3\sqrt[3]{2}$ （舍）.

综上所述，存在 $a=0,b=-1$ 或 $a=4,b=1$ 符合题意. ♡

例 11.27 (用导数知识处理一组关于指对幂函数大小关系的界值问题). (1) 若 $a^x>x^n(a>1,n>0)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的范围是________________.

(2) 若 $x^n>\log_b x(b>1,n>0)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 b 的范围是________________.

(3) 已知集合 $A=\{x|x^2<x\}$，集合 $B=\{x|x^2<\log_a x\}$，若 $B\subsetneqq A$，则 a 的取值范围是________________.

(4) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}\log_a x-a^{\frac{x}{\mathrm{e}}}(a>1)$ 没有零点，则实数 a 的取值范围是 (　　　　).

(A) $(\mathrm{e},+\infty)$　　(B) $(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$　　(C) $(1,+\infty)$　　(D) $(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},+\infty)$

(1)

> (分析：回忆指对幂函数增长的比较可知，当 x 足够大时总是有 $a^x>x^n(a>1,n>0)$，本题即寻找对于一个给定的幂函数，使得指数函数恒大于幂函数的底数的临界值.)

解. 分离参数，由 $a^x>x^n$ 恒成立可知 $x\ln a>n\ln x$ 恒成立，即 $\ln a>\dfrac{n\ln x}{x}$ 恒成立.

设 $f(x)=\dfrac{n\ln x}{x}$，则只需求出 $f(x)$ 的最大值.

因为

$$f'(x)=n\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时 $f'(x)>0,f(x)$ 递增，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时 $f'(x)<0,f(x)$ 递减，所以 $f(x)$ 的最大值

$$f_{\max}(x)=f(\mathrm{e})=\frac{n}{\mathrm{e}}.$$

所以 $\ln a>\dfrac{n}{\mathrm{e}}$, 即 a 的范围是 $(\mathrm{e}^{\frac{n}{\mathrm{e}}},+\infty)$.

反映在函数图像上，当 $a=\mathrm{e}^{\frac{n}{\mathrm{e}}}$ 时，曲线 $y=a^x$ 和 $y=x^n$ 有公切线. ♡

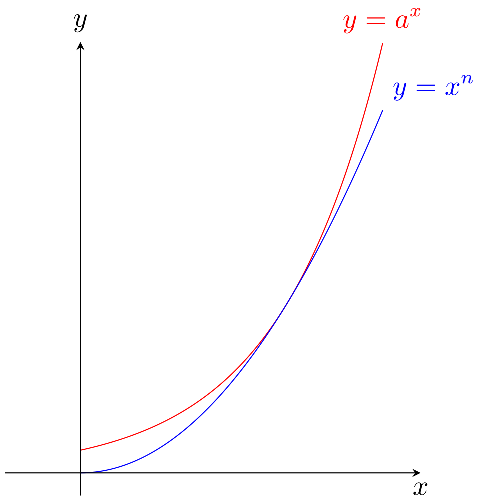


图 11.8: $a = \mathrm{e}^{\frac{n}{\mathrm{e}}}$

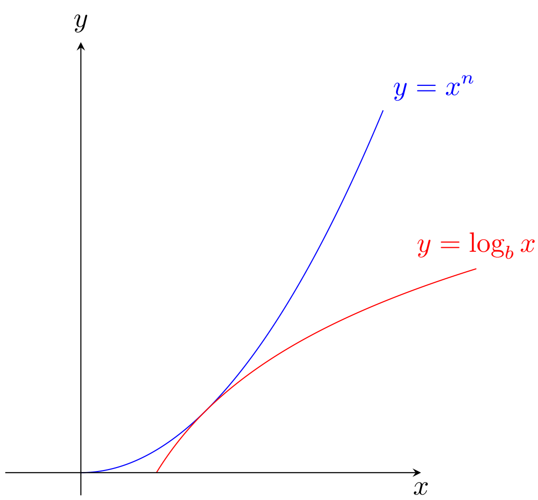


图 11.9: $b = \mathrm{e}^{\frac{1}{n\mathrm{e}}}$

评注 11.27.1. 函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0, \mathrm{e})$ 上递增，在 $(\mathrm{e}, +\infty)$ 上递减，在 e 处取得最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)

> (分析：回忆指对幂函数增长的比较可知，当 x 足够大时总是有 $x^n > \log_b x(b > 1, n > 0)$，本题即寻找对于一个给定的幂函数，使幂函数恒大于对数函数的底数的临界值.)

解. 分离参数，由 $x^n > \log_b x$ 恒成立可知 $\ln b > \dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{\ln x^n}{nx^n}$ 恒成立.

设 $f(x) = \dfrac{\ln x^n}{nx^n}$，则只需求出 $f(x)$ 的最大值，根据评注11.27.1可知

$$f_{\max}(x) = f(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{n\mathrm{e}}.$$

所以 $\ln b > \dfrac{1}{n\mathrm{e}}$，即 b 的范围是 $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n\mathrm{e}}}, +\infty)$.

反映在函数图像上，当 $b = \mathrm{e}^{\frac{1}{n\mathrm{e}}}$ 时，曲线 $y = x^n$ 和 $y = \log_b x$ 有公切线. ♡

(3) 解. 数形结合，因为 $A = \{x | 0 < x < 1\}$，所以当 $a \in (0, 1)$ 时，由图形可知显然成立，如图11.10所示.

当 $a > 1$ 时，分析可知只有当集合 B 为空集时满足条件，即只有当 $x^n \geq \log_a x$ 恒成立时满足条件，根据 (2) 的结论可知这要求

$$a \geq \mathrm{e}^{\frac{1}{2\mathrm{e}}}.$$

所以 a 的取值范围是 $(0, 1) \cup [\mathrm{e}^{\frac{1}{2\mathrm{e}}}, +\infty)$. ♡

(4) 解. 即 $\log_{a^{\frac{1}{\mathrm{e}}}} < (a^{\frac{1}{\mathrm{e}}})^x$ 恒成立，根据 (1) 和 (2) 的结论：

当 $a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时 $\log_{a^{\frac{1}{\mathrm{e}}}} < x < (a^{\frac{1}{\mathrm{e}}})^x$ 恒成立，所以 $a > \mathrm{e}$，选 A 项. ♡

评注 11.27.2. 事实上，指数函数 $y = a^x$ 和对数函数 $y = \log_a x$ 相切，当且仅当 $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

例 11.28. 已知 a 为实常数，函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x + ax(x \in [0, 2\pi])$.

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，求 $g(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 的极大值、极小值恰好各有一个，求实数 a 的取值范围.

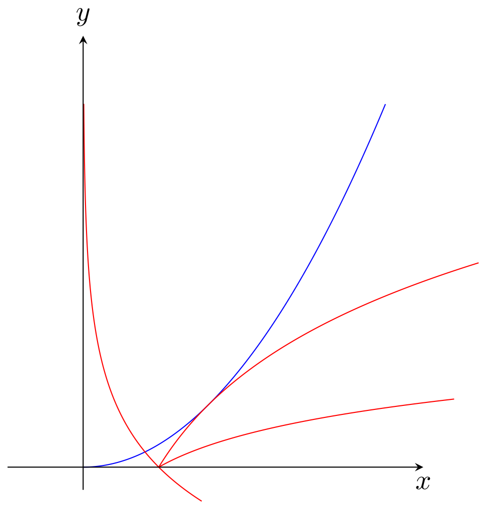


图 11.10:

(1)

> (分析：欲求函数的单调区间，先求出一阶导函数，并判断导函数在不同区间上的正负号，进而判断单调区间.)

解. 因为 $f(x)=\mathrm{e}^{-\sin x}+ax$，所以

$$g(x)=f'(x)=a-\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x).$$

于是

$$g'(x)=-2\mathrm{e}^{-x}\cos x$$

所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减.
当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增.
所以函数 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 的单调地增区间是 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，单调递减区间是 $[0,\frac{\pi}{2})$、$(\frac{3\pi}{2},2\pi]$. ♡
(2)

> (分析：求函数 $f(x)$ 的极值点，可以归结为求 $g(x)$ 的零点，而根据第一小问的分析可以得到 $g(x)$ 的单调性和极值情况，进而根据零点存在定理分析出 $g(x)$ 的零点情况.)

解. 由 (1) 得 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取得极小值，在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处取得极大值，$g(0)=a+1$，$g(\frac{\pi}{2})=a-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$，$g(\frac{3\pi}{2})=a+\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}}$，$g(2\pi)=a+\mathrm{e}^{-2\pi}$.

我们可以将以上讨论画成如下的表格，更加清晰：

	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	↘	极小	↗	极大	↘

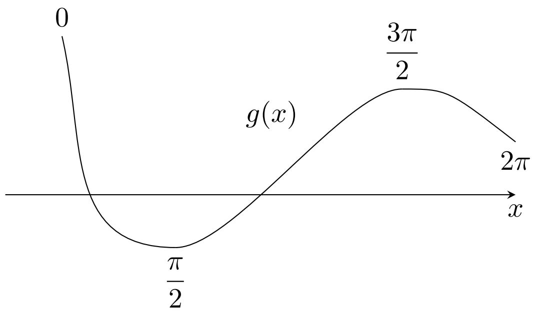


图 11.11:

显然，$g(0) > g(\frac{3\pi}{2}) > g(2\pi) > g(\frac{\pi}{2})$，下面根据这些函数值的取值讨论 $g(x)$ 的零点情况.

1° 如果 $g(\frac{\pi}{2}) \geq 0$，则 $g(x) \geq 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内单调递增，从而 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内无极值，不符合题意.

2° 如果 $g(\frac{\pi}{2}) < 0$ 而 $g(2\pi) \leq 0$，

当 $g(\frac{3\pi}{2}) \leq 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内至多有一个零点，因此 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内至多有一个极值点，不符合题意.

当 $g(\frac{3\pi}{2}) > 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有 3 个零点，且这 3 个零点均是 $f(x)$ 的极值点，因此 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有 3 个极值点，不符合题意.

3° 如果 $g(\frac{\pi}{2}) < 0$ 而 $g(2\pi) > 0$，则 $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 和 $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ 内各有一个极值点，

相应地，$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 和 $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ 内分别有一个极大值和一个极小值.

所以，$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的极大值、极小值恰好分别有一个的充要条件是

$$\begin{cases} g(2\pi) = a + \mathrm{e}^{-2\pi} > 0, \\ g(\frac{\pi}{2}) = a - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 0. \end{cases}$$

解得，$-\mathrm{e}^{-2\pi} < a < \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$. 所以所求实数 a 的取值范围是 $(-\mathrm{e}^{-2\pi}, \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}})$. ♡

定理11.2.2 告诉我们对于可导函数而言，极值点的必要条件是函数在该点处的导数为 0，其几何意义是曲线的极值点所对应的点处的切线与 x 轴平行，然而使导数等于零的点不一定就是极值点.

我们将导数等于零的点称为**驻点**，这个名词可能来源于物理上的概念，导数等于零意味着瞬时速度为零，似乎在这一瞬间运动着的物体将停驻在原处.

为了确定一个驻点是不是极值点，一般说来要考虑在驻点附近的左右两侧函数值的状态，比如在其左侧附近函数递增（或者等价地说，其导函数为正）而在右侧附近函数递减（或者导函数为负），这时候该驻点是极大值点.

一般说来，若导函数在驻点之两侧改变符号，那么该驻点就是极值点，**事实上，导函数的变号零点一定是函数的极值点**，这一结论通常称为**极值的第一充分条件**.

那么，导函数在其变号零点附近具有什么性质呢？事实上，如果导函数在其零点处的导数值不得零，就能够保证该零点是导函数的变号零点，如图所示，如果导函数在零点处的导数值得零（反映在图像上，零点处的切线沿 x 轴方向），那么就不能保证导函数在零点附近改变符号，从而不能保证该驻点成为极值点.

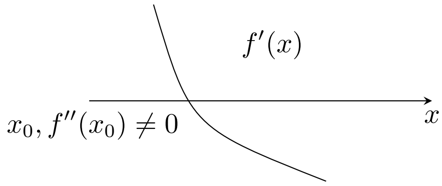


图 11.12: 驻点是极值点

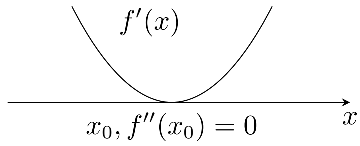


图 11.13: 驻点不是极值点

因此，考查函数在驻点处的二阶导数的符号也是确定该稳定点是否是极值点的一个方法.

定理 11.2.3 (**极值的第二充分条件**). 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，设 $g(x) = f'(x)$ 是 $f(x)$ 的一阶导函数，且 $f'(x_0) = 0$，则

(1) 当 $g'(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $g'(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3) 当 $g'(x_0) = 0$ 时，此判定方法失效，需要用其他方法来判断驻点 x_0 是否为极值点.

这个定理是可以推广的，对于更一般的情况：

定理 11.2.4 (**极值的第三充分条件**). 设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导,且 x_0 处至多 k 阶导数为 $0(k \in \mathbb{N}_+)$，即

$$f^{[1]}(x) = f^{[2]}(x) = \cdots = f^{[k]}(x) = 0\text{而}f^{[k+1]}(x) \neq 0,$$

那么

(1) 当 k 为奇数时，x_0 是 $f(x)$ 的极值点,

(2) 当 k 为偶数时，x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

其中 $f^{[n]}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导函数.

上述命题也可以表述为：若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处至多奇数阶导数值为 0，则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点，上述命题通常称为极值的第三充分条件.

对于极值的第三充分条件可以理解如下，不妨设 $f(x)$ 的驻点 x_0 处至多 5 阶导数为 0，因为 $f^{[6]}(x_0) \neq 0$，所以 $f^{[5]}(x)$ 在 x_0 两侧改变符号，不妨假设 x_0 是 $f^{[5]}(x)$ 由负变为正的零点，则可以作出以下图形：

由图形可以看出，如果 $f(x)$ 在 x_0 处至多 5 阶导数得零，那么 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，对于更高阶的导数也可以这样理解.

例 11.29. 已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2)\ln(1 + x) - 2x$.

(1) 若 $a = 0$，证明：当 $-1 < x < 0$ 时，$f(x) < 0$，当 $x > 0$ 时，$f(x) > 0$;

(2) 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

(1) 证明略，留给读者.

(2)

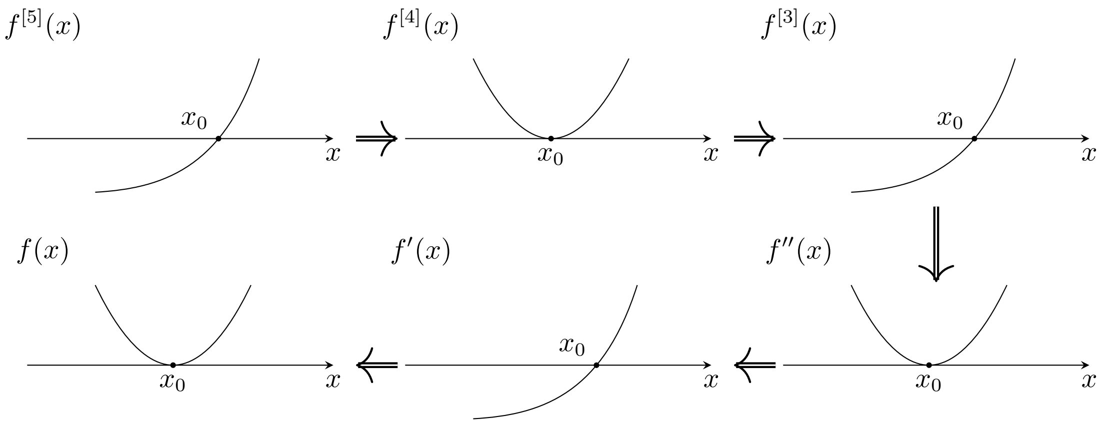


图 11.14: 极值的第三充分条件

> (分析：依次求出 n 阶导函数并计算 $x=0$ 处导函数的取值，再根据极值的充分条件求出参数 a 的值：
>
> $$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2, f'(0)=0,$$
>
> $$\text{记}f'(x)=g(x), g'(x)=2a\ln(x+1)+\frac{x(3ax+4a+1)}{(x+1)^2}, g'(0)=0,$$
>
> $$\text{记}g'(x)=h(x), h'(x)=\frac{2ax^2+6ax-x+6a+1}{(x+1)^3}, h'(0)=6a+1.$$
>
> $h'(x)$ 是 $f(x)$ 的三阶导函数，根据极值的第三充分条件可知，若 $h'(0)\neq 0$ 则 $f(x)$ 至多二阶导函数为 0，此时 0 不是极值点；若 $h'(0)=0$ 则 $f(x)$ 至多三阶导函数为 0(有兴趣的读者可以自己验证 0 处的四阶导函数不得零)，此时 0 是极值点，所以 $a=-\dfrac{1}{6}$.)

解.

$$f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\frac{2+x+ax^2}{x+1}-2, f'(0)=0,$$

$$\text{记}f'(x)=g(x), g'(x)=2a\ln(x+1)+\frac{x(3ax+4a+1)}{(x+1)^2}, g'(0)=0,$$

$$\text{记}g'(x)=h(x), h'(x)=\frac{2ax^2+6ax-x+6a+1}{(x+1)^3}, h'(0)=6a+1.$$

令 $h'(x)=0$ 解得 $a=-\dfrac{1}{6}$，下面证明 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

此时 $h'(x)=-\dfrac{x(x+6)}{3(1+x)^3}$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时 $h'(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $h'(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，因此 $g'(x)\leq g'(0)=0$.

所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 递减，当 $x\in(-1,0)$ 时 $f'(x)>f'(0)=0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 递增，在 $(0,+\infty)$ 递减，所以此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

另一方面，若 $a\neq-\dfrac{1}{6}$，则 $h'(0)\neq 0$.

1° 若 $h'(0)>0$，有以下两种情况：

(i) 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $h'(x)\geq 0$，任取 $c<0<d$，则 $g'(x)$ 在 (c,d) 递增，所以当 $c<x<0$ 时，$g'(x)<g'(0)=0$，当 $0<x<d$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以 $f'(x)$ 在 $(c,0)$ 递增，在 $(0,d)$ 递减，所以 $f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 (c,d) 递减，所以 0 不是 $f(x)$ 的极大值点.

(ii) 若 $\exists x_1 \in (-\infty, 0)$ 或 $x_2 \in (0, +\infty)$ 使得 $h'(x_1) < 0$ 或 $h'(x_2) < 0$，根据零点存在定理，必 $\exists c \in (x_1, 0)$ 使 $f(c) = 0$，且对 $\forall x \in (c, 0)$，$h'(x) > 0$，且存在 $d \in (0, x_2)$ 使 $h'(d) = 0$，且对 $\forall x \in (0, d)$，$f(x) > 0$，则 $g'(x)$ 在 (c, d) 递增，与 (i) 同理可得 0 不是 $f(x)$ 的极大值点.

2°　若 $h'(0) < 0$，同样有两种情况，与 1° 完全类似地，0 不是 $f(x)$ 的极大值点.

综上所述，若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则 $a = -\dfrac{1}{6}$. ♡

评注 11.29.1. 本题的解答思路是：先说明 $a = -\dfrac{1}{6}$ 符合题意，再说明 $a \neq -\dfrac{1}{6}$ 时，0 不是 $f(x)$ 的极大值点.

很容易说明 $a = -\dfrac{1}{6}$ 符合题意，只需找到一个包含 0 且使得使得 $h'(x)$ 在 0 的两侧先正后负的开区间，从而推出二阶导函数在这个区间上非正，进而推出一阶导函数在这个区间上递减，从而推出 $x = 0$ 是极大值点.

对于 $a \neq -\dfrac{1}{6}$ 的情况（以 $h'(0) > 0$ 的情况为例），只需找到一个区间包含 0 的区间 (c, d)，且使得 $h'(x)$ 在 (c, d) 上都为正，这时就能说明二阶导函数 $g'(x)$ 在 (c, d) 上递增，进而推出一阶导函数在这个区间上非负，从而推出 $f(x)$ 在 (c, d) 上单调，0 不是 $f(x)$ 的极值点.

事实上，根据函数的连续性可知，如果函数在 0 处的值是一个正数，那么在 0 附近必然存在一个小区间，使得在这个区间内函数值恒正. 这在直观上是很容易接受的，因为连续函数的图像是一个连续的曲线. 在高中阶段我们并没有给出过连续性的严格概念，但我们可以采用以下逻辑推理的方式来解释连续函数的这种特性：

⋆ 即证明，对于在区间 (a, b) 上有定义的连续函数 $f(x)$，且 $f(x_0) > 0$，则一定存在 $a \leq c < x_0 < d \leq b$，使得

$$\forall x \in (c, d), f(x) \geq 0.$$

证明. 分为两种情况：

$1^\circ \forall x \in (a, x_0)$，都有 $f(x) \geq 0$，此时显然存在符合条件的实数 c.

$2^\circ \exists x_1 \in (a, x_0)$，使得 $f(x_1) < 0$，

根据零点存在定理，必存在 $x_2 \in (x_1, x_0)$ 使得 $f(x_2) = 0$，且对于 $\forall x \in (x_2, x_0)$ 都有 $f(x) > 0$，取 $c = x_2$，那么对于 $\forall x \in (c, x_0)$，都有 $f(x) > 0$.

由 1° 和 2° 知存在实数 c 符合条件.

同理，存在实数 d 符合条件，因此存在 $a \leq c < x_0 < d \leq b$ 使得 $f(x)$ 在区间 (c, d) 上恒正.

对于 $f(x_0) < 0$ 的情况同理可证. □

上面的证明过程只用到了零点存在定理，即只要函数连续，上述命题就成立，而与函数的具体表达式无关.

习题 11.2[6]

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x \in \mathbb{R}$，有 $f(x) + f(-x) = x^2$，在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > x$. 若 $f(1 + a) - f(1 - a) \geq 2a$，则实数 a 的取值范围是______.

[6]在做这组习题中的解答题时，要注意答题规范.

2. 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)-2f(x)-4>0$，$f(0)=-1$，则不等式 $f(x)>e^{2x}-2$ 的解为______.

3. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)$ 上的可导函数，其导数为 $f'(x)$，且有 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，则不等式 $(x+2017)^2f(x+2017)-f(-1)>0$ 的解集为______.

4. 设函数 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x)(x\neq 0)$ 的导函数，$f(-1)=0$ ，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$ ，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是______.

5. 设函数 $f(x)=2x-\cos x$，$\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$______.

6. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2$ 在 $x=1$ 处有极值，则实数 a 的值是______.

7. 已知函数 $f(x)=e^x(x-ae^x)$ 恰有两个极值点 x_1、$x_2(x_1<x_2)$，则 a 的取值范围为______.

8. 设 $a>1$，若关于 x 的方程 $a^x=x$ 无实根，则实数 a 的取值范围为______.

9. 若方程 $a^x=x(a>0,a\neq 1)$ 有两个不等实根，则实数 a 的取值范围是______.

10. 已知 $A=\{x|x^2<x\}$，$B=\{x|x^2<\log_a x\}$ ，且 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的取值范围.

11. 若关于 x 的方程 $x^2=ae^x$ 恰有三个不同实根，则实数 a 的取值范围是______.

12. 已知函数 $f(x)=x^2e^x$ 与 $g(x)=2xe^x+a$ 的图象有且只有三个交点，则实数 a 的取值范围是______.

13. 已知 a 为实数，且对任意 $k\in[-1,1]$，当 $x\in(0,6]$ 时，$6\ln x+x^2-8x+a\leq kx$ 恒成立，则 a 的最大值是______.

14. 已知函数 $f(x)=x^2-2\ln x$，若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[\dfrac{1}{e},e]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})=f(x_n)$ 成立，求 n 的最大值.

15. 已知函数 $f(x)=9^x-m\cdot 3^x+m+1$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 的图像恒在 x 轴上方，则 m 的取值范围是______.

16. 设函数 $f(x)=4x^3+bx+1(b\in\mathbb{R})$，对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\geq 0$ 成立，求实数 b 的取值范围.

17. 设函数 $f(x)=e^x(x^3-3x+3)-ae^x-x(x\geq -2)$. 若不等式 $f(x)\leq 0$ 有解，则实数 a 的最小值为______.

18. 数列 $\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\}$，$n=1,2,\cdots$ ，中的最小项的值为______.

19. 已知不等式 $\ln x-a(1-\dfrac{1}{x})\geq 0$ 对任意的 $x\geq 1$ 均成立，求实数 a 的取值范围.

20. 已知实数 x、y 满足 $2x=\ln(x+y-1)+\ln(x-y-1)+4$，则 $2015x^2+2016y^3$ 的值是______.

21. 设函数 $f(x)=kx$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，如果关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{e},e]$ 内有两个实数解，则实数 k 的取值范围是______.

22. 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，任意 $a\in[1,2]$，都有 $(1+\dfrac{1}{n})^n\leq ax^2-2x+e-3a$ 恒成立（注：e 为自然对数的底数），则实数 x 的取值范围是______.

23. 设 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x^2}(x\in(0,1))$，则 $g(x)=f(x)+f(1-x)$ 的最小值为______.

24. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

    (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

25. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-a\ln x(a\in\mathbb{R},a>0)$.

    (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

26. 已知函数 $f(x)=ax-1-\ln x,(a\in\mathbb{R})$.

    (1) 讨论函数 $f(x)$ 在定义域内的极值点的个数;

27. 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}(a\in\mathbb{R})$.

    (1) 判断 $f(x)$ 在定义域内的单调性;

28. 已知 a 为常数，函数 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)-ax$.

    (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

    (2) 若 $a=-\dfrac{8}{3}$，求 $f(x)$ 的极值.

29. 已知函数 $f(x)=(a+\dfrac{1}{a})\ln x+\dfrac{1}{x}-x$.

    (1) 设 $a>1$，讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性;

    (2) 设 $a>0$，求 $f(x)$ 的极值.

30. 已知函数 $f(x)=\dfrac{mx-n}{x}-\ln x,m,n\in\mathbb{R}$.

    (1) 若函数 $f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $x-y=0$ 平行，求实数 n 的值;

    (2) 试讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上最大值;

31. 已知函数 $y=f(x)$, 点 A、B、$C\in$ 直线 l, 且 $\overrightarrow{OA}+(y-ax^2e^x-1)\overrightarrow{OB}-[(x-1)e^x+f'(0)]\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中 e 是自然对数的底数，$O\notin l$，$a\in\mathbb{R}$.

    (1) 若 $a<0$，求函数 $f(x)$ 及其单调区间;

32. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{ax}{x+1}(a\in\mathbb{R})$.

    (1) 当 $a=2$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程;

    (2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

33. 已知 a 为实常数，函数 $f(x)=e^{-x}\sin x+ax(x\in[0,2\pi])$.

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，求 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 的极大值、极小值恰好各有一个，求实数 a 的取值范围.

34. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\ln(x+1)-x$.

(1) 当 $a=1$ 时，若 $f(x)\geq m$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 m 的取值范围；

(2) 当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，若 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，求实数 a 的值.

11.3 导数在研究函数性质中的应用 II

11.3.1 三次函数的图像与性质

有关三次方程的知识在第四章有涉及，若读者尚不清晰可以回去简要复习一下.

形如 $y=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ 的函数称为**三次函数**.

三次函数是一个代数函数，利用导数研究三次函数将带来很多方便，设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$，则

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c.$$

可见三次函数的导数是一个二次函数，其对称轴为 $x=-\dfrac{b}{3a}$. 根据这个结果，我们可以得到三次函数的一个性质：

定理 11.3.1 (三次函数的中心对称性). 函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0$ 的图像关于 $(-\dfrac{b}{3a},f(-\dfrac{b}{3a}))$ 对称.

关于这个命题的理解可以参考例题11.17，即导函数的对称轴是原函数的对称中心. 也可以利用函数方程 $f(x)+f(-\dfrac{2b}{3a}-x)=2f(-\dfrac{b}{3a})$ 来完成，暴力化简即可，没有技术含量（zhr 语，lhe 注：牛哇），在此不再赘述.

由于 $f'(x)$ 未必有变号零点，所以三次函数可能有极值点，也可能没有极值点，如图11.15所示.

对于没有极值点的三次函数，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调，性质比较简单，下面我们着重讨论有极值点的情况.

设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 $a>0$，且 $4b^2-12ac>0$. 设方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的两根为 x_1 和 $x_2(x_1<x_2)$，则 x_1 和 x_2 分别是 $f(x)$ 的极大值点和极小值点.

设 x_1' 是方程 $f(x)-f(x_1)=0$ 异于 x_1 的另一根 (即 x_1' 满足 $f(x_1')=f(x_1)$ 且 $x_1'\neq x_1$)；x_2' 是方程 $f(x)-f(x_2)=0$ 异于 x_2 的另一根. 反映在图像上，x_1' 对应着三次函数图像上与极大值高度相同的另一点，x_2' 对应着三次函数图像上与极小值高度相同的零一点，如图所示.

则有如下性质：

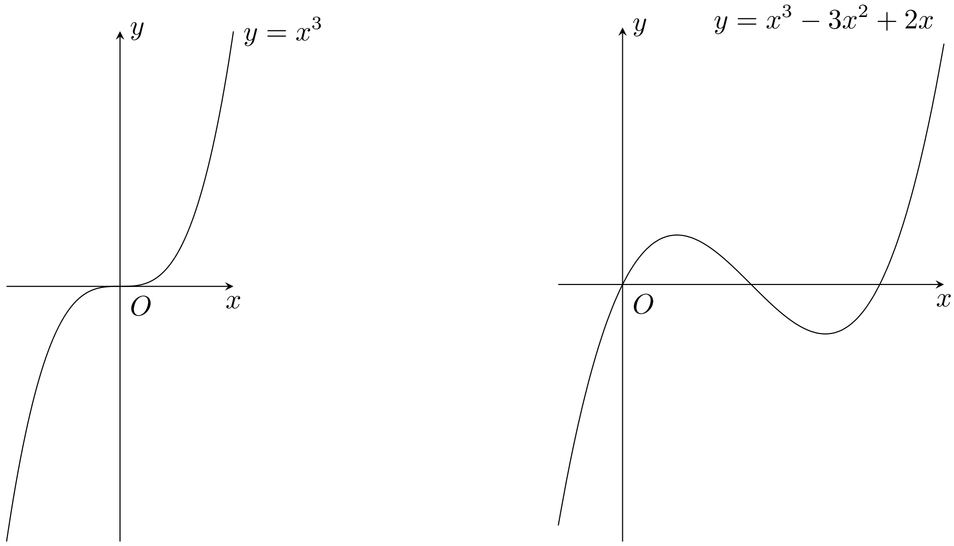


图 11.15: 不同三次函数的图像

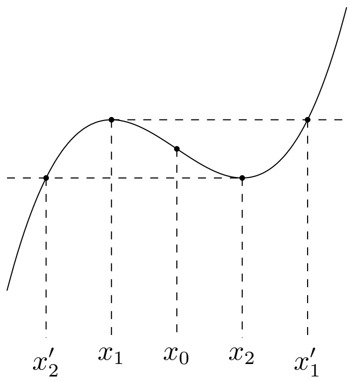


图 11.16: 三次函数的图像

定理 11.3.2.

$$x_1'-x_0=2(x_0-x_1),$$

也即 x_2',x_1,x_0,x_2,x_1' 成等差数列.

今日鸡汤：人生就像 $a>0$ 的三次函数，你用两个月的时间从极大值水平退步到了极小值水平，但是如果努力，只要一个月的时间就可以从极小值水平回到原来的水平（$x_2-x_1=2(x_1'-x_2)$）.

今日毒鸡汤：人生就像 $a<0$ 的三次函数，经过两个月的努力可以从极小值进步到极大值，但是一旦从此放纵自己，只要一个月的时间就会倒退到两个月前的极小值水平.

证明. 考虑方程 $f(x)-f(x_1)=0$，因为

$$f(x)-f(x_1)=a(x^3-x_1^3)+b(x^2-x_1^2)+c(x-x_1)=(x-x_1)[a(x^2+x_1x+x_1^2)+b(x+x_1)+c].$$

记 $p(x)=a(x^2+x_1x+x_1^2)+b(x+x_1)+c$，注意到

$$p(x_1)=3ax_1^2+2bx_1+c=f'(x_1)=0,$$

所以 x_1 是 $f(x)-f(x_1)=0$ 的二重根，

又因为 $f(x_1')-f(x_1)=0$，所以 x_1' 也是 $f(x)-f(x_1)=0$ 的根，由代数基本定理可知

$$f(x)-f(x_1)=a(x-x_1)^2(x-x_1').$$

根据三次方程根与系数的关系，

$$x_1+x_1+x_1'=-\frac{b}{a}=3x_0.$$

即 $x_1'-x_0=2(x_0-x_1)$，根据对称性可知

$$x_0-x_1=x_2-x_0, x_1'-x_0=x_0-x_2'.$$

所以 $x_2', x_1, x_0, x_2, x_1'$ 成等差数列. □

上面的证明思路主要基于研究方程 $f(x)-f(x_1)=0$ 根的情况，再利用三次方程根与系数的关系得到 x_0, x_1, x_1' 三者的关系. 虽说这个性质在直观上并不显然，但定理的形式却比较简洁.

例 11.30. *已知函数* $f(x)=(x-1)^3-ax-b$.

(1) *求函数* $f(x)$ *的单调区间;*

(2) *若* $f(x)$ *存在极值点* x_0，*且* $f(x_1)=f(x_0)(x_1\neq x_0)$，*证明：* $x_1+2x_0=3$;

(3) *设* $a>0$，*且* $|f(x)|=g(x)$，*证明：* $g(x)$ *在* $[0,2]$ *上的最大值不小于* $\dfrac{1}{4}$.

(1) *解.*
$$f'(x)=3(x-1)^2-a,$$

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增;

当 $a>0$ 时，当 $x>1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 或 $x<1-\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$f'(x)>0$，当 $1-\sqrt{\frac{a}{3}}<x<1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时 $f'(x)<0$，

可得 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,1-\sqrt{\frac{a}{3}})$，$(1+\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty)$，减区间为 $(1-\sqrt{\frac{a}{3}},1+\sqrt{\frac{a}{3}})$. ♡

(2)

> *(分析：* $f(x)$ *的图像关于* $(1,f(1))$ *对称，根据定理 11.3.2 可知 1 是* x_1 *和* x_0 *中靠近* x_0 *的三等分点，由定比分点立刻有* $2x_0+x_1=3$，*所以要做出这道证明题只需按照定理 11.3.2 的证明过程如法炮制即可. 在以下证明过程中我们规避使用三次方程根与系数的关系，而采用更加规范自然的因式分解的形式.)*

证明. 根据题意得，$f'(x_0)=3(x_0-1)^3-a=0$.

注意到 $f(x_0)-f(x_1)=0$，因为

$$f(x_0)-f(x_1)=(x_0-1)^3-(x_1-1)^3-a(x_0-x-1)=0,$$

所以

$$(x_0-1)^3-(x_1-1)^3-3(x_0-x_1)(x_0-1)^2=0.$$

变形得

$$\begin{aligned}f(x_0)-f(x_1)&=(x_0-1)^3-(x_1-1)^3-3(x_0-x_1)(x_0-1)^2\\&=(x_0-x_1)[(x_0-1)^2+(x_1-1)^2+(x_0-1)(x_1-1)]-3(x_0-x_1)(x_0-1)^2\\&=(x_0-x_1)[2(x_0-1)^2-(x_0-1)(x_1-1)-(x_1-1)^2]\\&=(x_0-x_1)[(x_0-1)-(x_1-1)][2(x_0-1)+(x_1-1)]\\&=(x_0-x_1)^2(2x_0+x_1-3)\\&=0.\end{aligned}$$

因为 $x_0-x_1\neq 0$，所以 $2x_0+x_1-3=0$，即 $2x_0+x_1=3$. □

(3)

> (分析：根据第二章介绍的公式可知
>
> $$|f(x)|_{\max}=\frac{f_{\max}(x)-f_{\min}(x)}{2}+|\frac{f_{\max}(x)+f_{\min}(x)}{2}|.$$
>
> 且注意到区间 $[0,2]$ 是关于 1 对称的，所以 $f_{\max}(x)+f_{\min}(x)=0$，则问题转化为求闭区间 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 的最大值和最小值的差.)

解. 根据 (1) 可知 $f(x)$ 在 $1-\sqrt{\frac{a}{3}}$ 处取到极大值，在 $1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 取到极小值，又因为 $f(x)$ 是连续函数，所以

当 $a\geq 3$ 即 $1-\sqrt{\frac{a}{3}}\leq 0<2\leq 1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 递减，

$$f(x)_{\max}=f(0),f(x)_{\min}=f(2),$$

此时

$$|f(x)|_{\max}=\frac{f_{\max}(x)-f_{\min}(x)}{2}+|\frac{f_{\max}(x)+f_{\min}(x)}{2}|=\frac{f_{\max}(x)-f_{\min}(x)}{2}=2a-2\geq 4,$$

符合题意.

当 $0<a<3$ 即 $0<1-\sqrt{\frac{a}{3}}<1+\sqrt{\frac{a}{3}}<2$ 时，

$$|f(x)|_{\max}=\max\{f(1-\sqrt{\frac{1}{3}}),f(2)\},f(x)_{\min}=\min\{f(1+\sqrt{\frac{1}{3}}),f(0)\}$$

因为 $f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b,f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b,f(2)=1-2a-b,f(0)-1-b,$

若 $f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})>f(2),f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})<f(0)$ 即 $\frac{3}{4}<a<3$，则

$$|f(x)|_{\max}=\frac{f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})-f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})}{2}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{1}{4}.$$

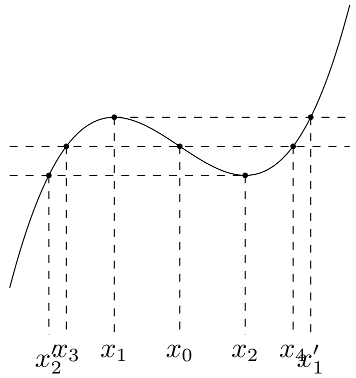
若 $f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})\geq f(2),f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})\leq f(0)$ 即 $\frac{3}{4}<a<3$，则

$$|f(x)|_{\max}=\frac{f(2)-f(0)}{2}=1-a\geq\frac{1}{4}.$$

综上所述，$g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$. ♡

例 11.31. *在定理11.3.2的前提下，设方程 $f(x)=f(x_0)$ 有异于 x_0 的两个根 x_3,x_4，证明：*

$$|x_4-x_3|=\sqrt{3}|x_2-x_1|.$$



解. 考虑方程 $f(x)-f(x_0)=0$，由题意可知这个三次方程的三个根分别为 x_3,x_0,x_4，根据三次方程根与系数的关系可知

$$x_3+x_0+x_4=3x_0,x_3x_0x_4=-\frac{d-f(x_0)}{a}=\frac{ax_0^3+bx_0^2+cx_0}{a}.$$

所以

$$x_3+x_4=2x_0,x_3x_4=x_0^2+\frac{b}{a}x_0+\frac{c}{a}.$$

所以

$$(x_3-x_4)^2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=4x_0^2-(4x_0^2+\frac{4b}{a}x_0+\frac{4c}{a})=-4(\frac{b}{a}\cdot(-\frac{b}{3a})+\frac{c}{a})=\frac{4b^2-12ac}{3a^2}.$$

又因为 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的两个根，根据二次方程根与系数的关系可知

$$x_1x_2=\frac{c}{3a},x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}.$$

所以

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{4c}{3a}=\frac{4b^2-12ac}{9a^2}.$$

所以 $(x_3-x_4)^2=3(x_1-x_2)^2$，即 $|x_4-x_3|=\sqrt{3}|x_2-x_1|$. ♡

例 11.32 (*). *已知点 $(\sin\alpha,\sin\beta)$ 是曲线 $y=f(x)=\sqrt[3]{x^3+t^3}$ 和曲线 $y=g(x)=3tx^2+(3t^2+1)x+t$ 的公共点，且满足 $|\alpha-\beta|\le 1$，证明：$|t|\le 1$.*

解. 由题意可知

$$\sin^3\beta=\sin^3\alpha+t^3.$$

$$\sin\beta=3t\sin^2\alpha+3t^2\sin\alpha+\sin\alpha+t.$$

注意到

$$\begin{aligned}\sin^3\beta+\sin\beta&=\sin^3\alpha+t^3+3t\sin^2\alpha+3t^2\sin\alpha+\sin\alpha+t\\&=(\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha t+3\sin\alpha t^2+t^3)+\sin\alpha+t\\&=(\sin\alpha+t)^3+\sin\alpha+t.\end{aligned}$$

构造函数 $h(x)=x^3+x$，则 $h'(x)=3x^2+1>0$，$h(x)$ 单调，

所以 $\sin\alpha+t=\sin\beta$，

所以 $\sin\alpha+t=3t^2\sin\alpha+3t\sin^2\alpha+\sin\alpha+t$，即

$$3t\sin^2\alpha+3t^2\sin\alpha=0.$$

也即

$$t\sin\alpha(t+\sin\alpha)=0.$$

所以 $t=0$ 或 $\sin\alpha=0$ 或 $t+\sin\alpha=0$.

当 $t=0$ 时，$|t|\le 1$ 显然成立；

当 $\sin\alpha=0$ 时，$t=\sin\beta$，所以 $|t|\le 1$ 成立；

当 $t+\sin\alpha=0$ 时，$t=-\sin\alpha$，所以 $|t|\le 1$ 成立. ♡

评注 11.32.1. 本题技巧性较强，要求读者对三次多项式配方的和立方公式

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

的形式非常熟悉，并要求读者具有“同构”的意识，构造函数来说明问题.

本题中 $|\alpha-\beta|\le 1$ 是多余条件.

例 11.33. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，现过 $(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3},f(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}))$ 作 $f(x)$ 图像的切线，求切线方程.

(分析: 按照求切线方程的一般流程: 设切点, 再通过求出一阶导函数在切点处的值得到切线斜率)

解. 不妨设切点为 $(x_0,f(x_0))$.

则切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

因为

$$f'(x)=3x^2-6x+2,$$

所以

$$f(1+\frac{\sqrt{3}}{3})-f(x_0)=(3x_0^2-6x_0+2)(1+\frac{\sqrt{3}}{3}-x_0).$$

为方便起见，记 $t=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 则

$$\begin{aligned}f(1+\frac{\sqrt{3}}{3})-f(x_0)&=t^3-3t^2+2t-x_0^3+3x_0^2-2x_0\\&=(t-x_0)(t^2+x_0t+x_0^2)-3(t-x_0)(t+x_0)+2(t-x_0)\\&=(t-x_0)[x_0^2+tx_0+t^2-3(t+x_0)+2]\\&=(3x_0^2-6x_0+2)(t-x_0).\end{aligned}$$

即

$$(x_0-t)(2x_0^2-(t+3)+3t-t^2)=(x_0-t)^2(2x_0+t-3)=0.$$

所以 $x_0 = t$ 或 $x_0 = \frac{3-t}{2}$.

当 $x_0 = t$ 时，直线方程为

$$y - f(t) = 0 即 y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

当 $x_0 = \frac{3-t}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，直线方程为

$$y - f(1-\frac{\sqrt{3}}{6}) = f'(1-\frac{\sqrt{3}}{6})(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}),$$

即

$$y - \frac{11\sqrt{3}}{72} = -\frac{3}{4}(x - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}),$$

整理得

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}+27}{36}.$$

综上所述，过点 $(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, f(1+\frac{\sqrt{3}}{3}))$ 能作 $f(x)$ 的两条切线，切线方程分别是 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 和 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}+27}{36}$. ♡

评注 11.33.1. 我们现在希望对这类问题进行一个一般性的讨论：过一点能作三次函数的几条切线？

不妨先考虑点在三次函数的图像上的情况，也就是过函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ 图像上一点 $(t, f(t))$，能作出 $f(x)$ 的几条切线？

根据前面的讨论可知此时应满足：

$$(x_0 - t)^2(2x_0 + t - 3) = 0.$$

当且仅当 $t = 1$ 时，上述方程仅有一个实数解，也即过点 $(t, f(t))$ 只能作 $f(x)$ 的一条切线；当 $t \neq 1$ 时，上述方程有两个实数解 $x_0 = t$ 和 $x_0 = \frac{3-t}{2}$, 也即过点 $(t, f(t))$ 能作 $f(x)$ 的两条切线.

$f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$, 所以 1 处的切线方程为 $y = -x + 1.1$ 恰好是三次函数对称中心的横坐标，过三次函数的对称中心只能作出一条切线，而过三次函数上除对称中心外的任意一点都能作出两条切线.

例 11.34. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$，若过平面内一点 $(a, b)(a > 1)$ 能作 $f(x)$ 图像的三条切线，证明：$1 - a < b < f(a)$.

证明. 不妨设切点为 $(x_0, f(x_0))$.

则切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

因为

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2,$$

所以

$$b - f(x_0) = (3x_0^2 - 6x_0 + 2)(a - x_0).$$

这是一个关于 x_0 的三次方程，过 (a,b) 能作 $f(x)$ 图像的三条切线，等价于该方程有 3 个不同的实数根. 这里我们选择构造函数，利用三次函数的图像与性质说明这一点.

记 $g(x)=b-f(x)-(3x^2-6x+2)(a-x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+b-2a$, 则条件等价于 $g(x)$ 有 3 个零点.

$$g'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a),$$

所以当 $x<1$ 或 $x>a$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $1<x<a$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，将上述讨论列成下表：

	$(-\infty,1)$	1	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

根据 $g(x)$ 的单调性和三次函数的图像，当极大值 $g(1)<0$ 或极小值 $g(a)>0$ 时，$g(x)$ 至多有 1 个零点，此时 $b>f(a)$ 或 $b<1-a$；

当 $g(1)=a+b-1=0$ 或 $g(a)=b-f(a)=0$ 时，$g(x)$ 有 2 个不同的零点，此时 $b=f(a)$ 或 $b=1-a$.

因此若 $g(x)$ 有 3 个零点，则

$$\begin{cases} g(1)=a+b-1>0, \\ g(a)=b-f(a)<0. \end{cases}$$

即 $1-a<b<f(a)$，证毕. □

我们对这个结果作一个简要讨论，以上几个结果的几何意义如下：

考虑对称中心处的切线 $y=1-x$ 和曲线 $y=f(x)$ 划分出的平面区域，每个平面区域都对应着当 (a,b) 在落在该区域内时能作出的切线条数.

如图11.17所示，过绿色区域内（包括对称中心处）的点能作 1 条切线，在蓝色区域内的点（三次函数图像上以及对称中心处的切线上除对称中心外的点）能作 2 条切线，过红色区域内的点能作 3 条切线.

11.3.2 凹凸性与函数图像

我们已经知道函数的一阶导函数的正负与函数的递增和递减相关，那么，一般地，函数二阶导函数在某个区间上的符号反映函数怎样的性质呢？

我们举一个很简单的例子，作自由落体运动的质点的位移关于时间的函数表达式为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其二阶导函数（即加速度）$s''=g$ 是一个常数且 $g>0$，因为二阶导函数是“变化率的变化率”，所以这反映了位移随着时间的增长速率越来越大，反映在图像上，$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的图像是一个向下凸的抛物线. 这个例子启示我们，函数的二阶导函数的正负或许与凹凸性有关.

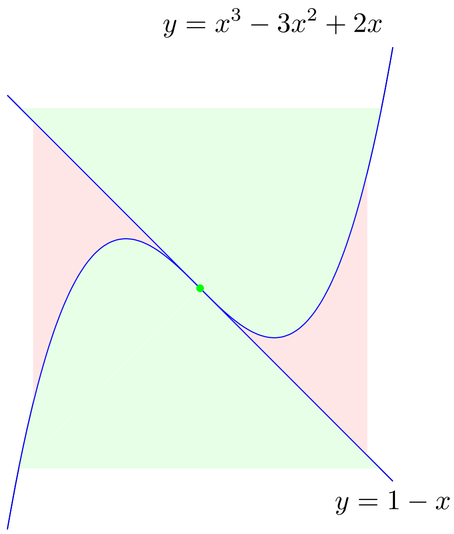


图 11.17: 过一点可作三次函数图像的切线条数

图 11.18: 二阶导函数与凹凸性

不同的教材对于凹凸性的定义在形式上虽然并不统一，但是可以证明这些众多的定义是相互等价的，[7] 此处采用其中一种定义：

定义 11.3. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，若对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 和任意的实数 $\lambda \in (0,1)$，都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 为**向下凸**（或简称为**凹**）的函数；

若对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 和任意的实数 $\lambda \in (0,1)$，都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 为**向上凸**（或简称为**凸**）的函数.

这种定义的描述方法具有明显的几何意义，这里以下凸的曲线为例简要说明这一点. 对于下凸的曲线而言，曲线上任意两点之间的曲线弧总是位于这两点的下方，设 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 是

[7] 此处不做探讨，有兴趣的同学可以阅读知乎专栏 https://zhuanlan.zhihu.com/p/32481805.

函数的下凸区间上两点，则这两点连线的方程为

$$y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

对于任意的 $\lambda \in (0,1)$，根据定比分点，可以将 x_1 和 x_2 之间的任意一点 x 表示为

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in (0,1).$$

曲线上两点间的曲线段始终位于两点连线的下方，等价于

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

也就是

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

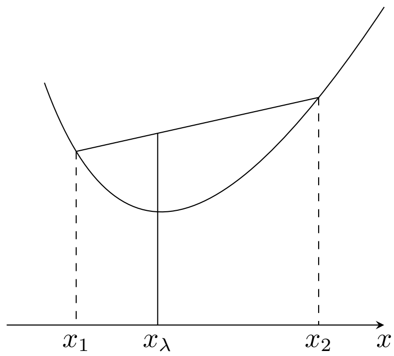


图 11.19:

这个不等式可以推广到 n 元的情况，即

$$f(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}.$$

该不等式通常被称为**琴生不等式**，要注意这个不等式成立的前提是函数在区间 (a,b) 上是一个下凸函数.

对于函数在 (a,b) 上是上凸函数的情况，说明方法与下凸函数完全类似，只要把所有的不等号反向就行了.

关于函数的凹凸性，我们有如下几个重要结论：

定理 11.3.3. *设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数 $f''(x)$，则*

$f(x)$ 在区间 (a,b) 上是下凸的，等价于对于每一点 $x \in (a,b)$，都有 $f''(x) > 0$;

$f(x)$ 在区间 (a,b) 上是上凸的，等价于对于每一点 $x \in (a,b)$，都有 $f''(x) < 0$.

这个定理告诉我们，函数的二阶导数值和凹凸性之间有着密切的联系，二阶导函数在某个区间上的正负决定了这个区间上函数的凹凸性，因此我们可以通过求二阶导函数来判定某个函数的凹凸性情况.

定理 11.3.4. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是可导函数，则

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是上凸函数，等价于对于每一点 $x_0 \in (a,b)$，对于 $\forall x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，都有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是下凸函数，等价于对于每一点 $x_0 \in (a,b)$，对于 $\forall x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

现在我们来解释上述不等式的几何意义，注意到

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

是曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处的切线方程，由此立刻发现向上凸的充要条件是曲线弧 $y = f(x)$ 总要在其切线的下方，而下凸的充要条件则是曲线弧 $y = f(x)$ 总要在其切线的上方. 这与我们从几何直观上了解的凸与凹是一致的 (见图11.20).

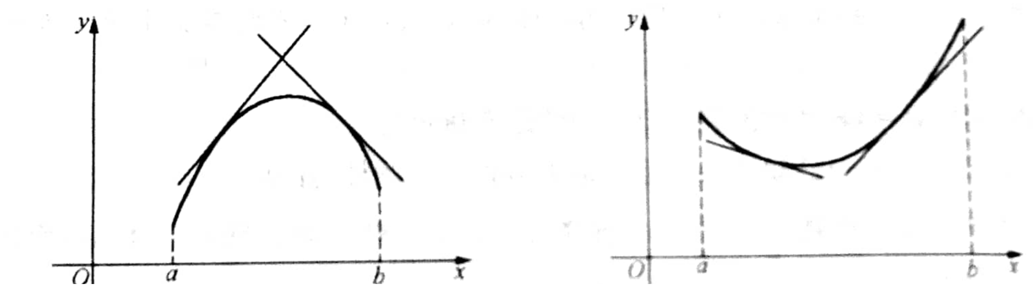


图 11.20:

证明. 以上凸函数为例，记 $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $h(x) = f'(x)$，则根据定理11.3.3，$h'(x) < 0$，所以 $h(x)$ 在 (a,b) 上单调递减.

构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$，所以

$$F'(x_0) = 0,$$

因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 上递减，所以 $F'(x)$ 在 (a,b) 上递减，所以当 $x \in (a,x_0)$ 时，$F'(x) > F'(x_0) = 0$，$F(x)$ 递增，当 $x \in (x_0,b)$ 时，$F'(x) < F'(x_0) = 0$，$F(x)$ 递减，将以上讨论列成下表:

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
F'	$+$	0	$-$
F	$\nearrow$	极大	$\searrow$

所以对于 $\forall x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$，都有 $F(x) < F(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$，即：$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

同理可证对于下凸函数，$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. $\square$

这个性质，在以后的“切线放缩”类型题目种会用到.

例 11.35. 求三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d(a > 0)$ 的凹凸性区间.

解. 很容易算得 $y'' = 6ax + 2b$，于是当 $x > -\dfrac{b}{3a}$ 时，$y'' > 0$，当 $x < -\dfrac{b}{3a}$ 时，$y'' < 0$，可见这个函数在 $(-\infty, -\dfrac{b}{3a})$ 向上凸，在 $(-\dfrac{b}{3a}, +\infty)$ 向下凸，如图11.21所示.

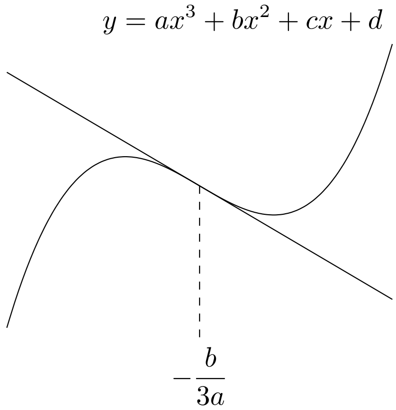


图 11.21:

可见在三次函数的对称中心两侧，函数的凹凸性恰好相反，且对称中心处的切线穿越曲线而过，将曲线分为中心对称的两部分，这两部分各自落在切线的一侧. 这就直观地解释了我们在11.3.1节最后探讨的切线条数与平面区域的问题，读者不妨回顾一下那个问题，画一画三次函数图像的切线，相信读者能够体会到凹凸性是理解那个问题的重要支撑.

若 $f(x)$ 在某一点 x_0 附近的两侧，函数的凹凸性恰好相反，则称该点为**拐点.** 例如三次函数的对称中心 $x = -\dfrac{b}{3a}$ 就是一个拐点.

对于具有连续的二阶导函数的函数而言，拐点的必要条件是函数在该点的二阶导数值为 0. ♡

定理 11.3.5 (拐点的必要条件). 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有连续的二阶导函数，若点 $c \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的拐点，那么 $f''(c) = 0$.

另外，二阶导函数的变号零点一定是函数的拐点，即：

定理 11.3.6 (拐点的充分条件). 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有连续的二阶导函数，若 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 在点 $c \in (a, b)$ 两侧改变符号，则 c 是 $f(x)$ 的拐点.

函数的凹凸性以及拐点的概念对于准确理解函数图像尤其重要，有一些导数问题是以凹凸性和拐点为背景设计的.

例 11.36. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln x - ax - b$，则下面说法中正确的是 (　　　　　　).

(A) $\exists a, b \in \mathbb{R}$，$f(x)$ 没有零点

(B) $\forall b \in \mathbb{R}$，$\exists a > 0$，函数 $f(x)$ 恰有 1 个零点

(C) $\forall a > 0$，$\exists b \in \mathbb{R}$，函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点

(D) $\forall b \in \mathbb{R}$，$\exists a > 0$，函数 $f(x)$ 恰有 3 个零点

解. 即讨论曲线 $y=g(x)=\mathrm{e}^x+\ln x$ 与直线 $y=ax+b$ 的交点个数.

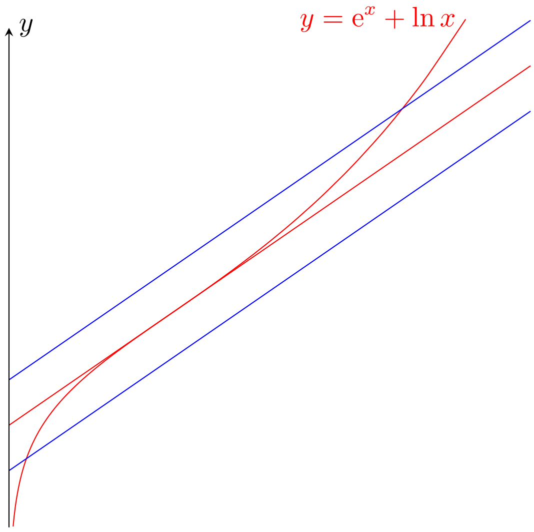
$g'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$，所以 $g(x)$ 递增，设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x^2}$, 显然存在唯一的 $x_0>0$ 使得 $h'(x_0)=0$，所以 $g(x)$ 有一个拐点 x_0.

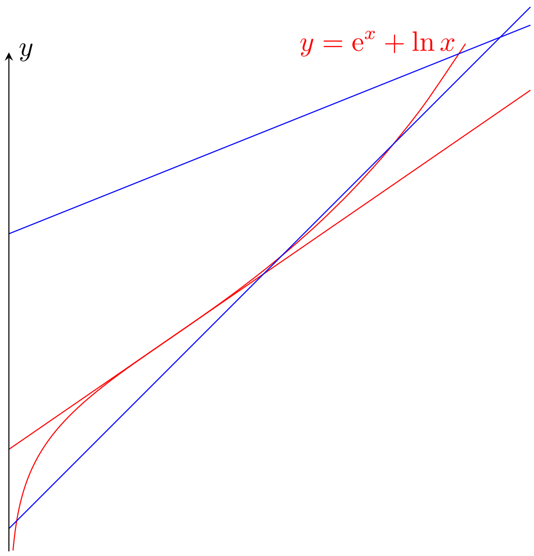
A: 对于任意的 a,b，根据指数增长的比较结合函数图像可知，$y=\mathrm{e}^x+\ln x$ 和直线 $y=ax+b$ 不可能没有交点，故 A 错误.

B: 结合图像可知, 当 a 恰好等于拐点处的切线斜率时, 不论 b 取何值, $y=\mathrm{e}^x+\ln x$ 和 $y=ax+b$ 都仅有 1 个交点，B 正确.

C: 结合图像可知，若 b 大于或等于拐点处切线的截距，则对 $\forall a>0$，直线与曲线都只有 1 个交点；若 b 小于拐点处切线的截距，则当 a 在 $(0,+\infty)$ 范围内任意变化时，直线和曲线可能有 0 个，1 个，2 个或 3 个交点，所以 C 错误.

D: 结合图像，对于任意的 $a>0$，当 b 足够大时直线和曲线总是只有 1 个交点，所以 D 错误.♡





给定一个函数的表达式，描绘它的图形对于我们直观地认识函数的性质是十分重要的，过去我们没有别的办法，只有描点法，一般说来如果要得到相对比较精确的图形就需要相当多的函数值，工作量很大. 现在，我们知道了单调区间、极值点、凹凸性和拐点的概念都具有明显的几何意义，有了这些概念作为指导，就能很快地把握住函数的特征，作出函数的图像.

【一】函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 和函数 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

记 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$f(x)$ 在 e 处达到极大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

记 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ 是 $f(x)$ 的拐点.

值得注意的是函数 $f(x)$ 的定义域不是有穷区间，所以要想较为准确地描绘函数的图像，还需要研究一下 $x\to0$ 和 $x\to+\infty$ 时函数值的变化趋势（即函数的极限）. 首先考虑 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}$，当 $x\to0$ 时, $\ln x\to-\infty$, 所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$. 其次考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, 当 $x\to+\infty$ 时, $\ln x\to+\infty$, $x\to+\infty$, 此时极限为 “$\dfrac{\infty}{\infty}$” 的形式，其变化趋势难以直接确定，我们称这类情况是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型**未定式**.

同样，如果在某一极限过程中 $F(x)\to 0$ 和 $G(x)\to 0$ 同时发生，那么 $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ 的极限也难以直接确定，我们称这类情况是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式.

洛必达法则 (L'Hospital's rule) 为处理 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式提供了一种途径.

定理 11.3.7 (洛必达法则). 若在某一极限过程 $x\to x_0$ 中（这里的 x_0 可以是一个数，也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$）

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}G(x)=0\text{或}\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}G(x)=\infty.$$

且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$ 存在，那么在满足一定条件的前提下，我们有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

有时使用一次洛必达法则得到的结果仍然是未定式，这时就需要使用多次.

洛必达法则的推导需要用到高等数学知识，远远超出了本书的要求，此处不讨论.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

所以，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

综合以上讨论，我们就可以画出函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图像[8] 了 (见图11.3.2):

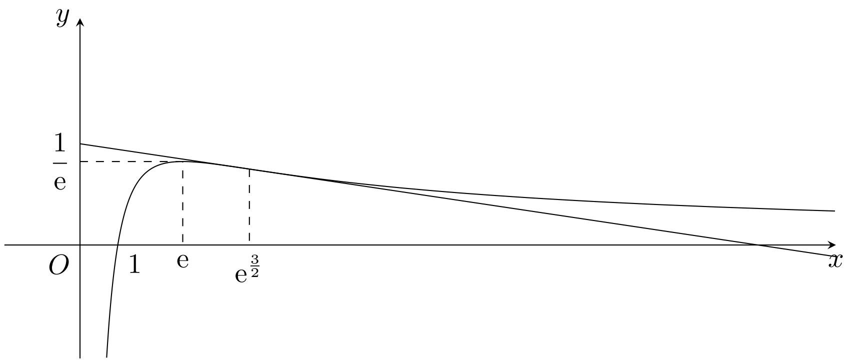


图 11.22:

根据图像，结合前面的讨论可知 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 e 处取得最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 11.37. (1) 在以下四个数:$\ln\sqrt{2},\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{\ln\pi}{\pi},\dfrac{\sqrt{17}\ln 17}{34}$ 中，最大的和最小的分别是______.

(2) 已知函数 $f(x)=(\dfrac{\ln x}{x})^2+(a-1)\dfrac{\ln x}{x}+1-a$ 有 3 个不同的零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})^2(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3})=$__________________.

[8]下列图像是原函数图像纵向伸长 6 倍后的图像，目的是使曲线不那么“平缓”而影响观察，我们对下文中提到的 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 等一系列函数也做了类似处理，读者不必对 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 比 1 还要长这件事感到疑惑.

解. (1) 构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 2}{2}=f(2),\dfrac{1}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e}),\dfrac{\ln\pi}{\pi}=f(\pi),\dfrac{\sqrt{17}\ln 17}{34}=\dfrac{\ln\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=f(\sqrt{17})$.

根据函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的性质，函数在 $(0,\mathrm{e})$ 上递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递减. 所以 $f(2)<f(\mathrm{e})>f(\pi)>f(\sqrt{17})$，即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 最大.

注意到 $f(2)=\dfrac{2\ln 2}{4}=f(4)$，而 $\pi<4<\sqrt{17}$，所以 $f(\pi)>f(2)=f(4)>f(\sqrt{17})$，即 $\dfrac{\sqrt{17}\ln 17}{34}$ 最小.

(2) 这是一个复合方程根的个数问题，$f(x)=g[h(x)]$，其中

$$g(x)=x^2+(a-1)+1-a,h(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

$g(x)$ 是二次函数，至多有 2 个零点 t_1,t_2，由题意可知 $f(x)$ 有 3 个零点，所以 $h(x)$ 的 t_i 点 $(i=1,2)$ 共有 3 个. 结合 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图像可知，$g(x)$ 必有 2 个根 t_1，t_2，且 t_1 和 t_2 应满足

$$t_1\in(-\infty,0]\cup\{\frac{1}{\mathrm{e}}\},t_2\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}}).$$

此时 $h(x)$ 有 1 个 t_1 点和 2 个 t_2 点，所以 $f(x)$ 共有 3 个零点.

因为 $\Delta=(a-1)^2-4(1-a)>0$，解得 $a<-3$ 或 $a>1$.

若 $a<-3$，则根据二次方程根与系数的关系可知 $t_1+t_2=1-a>4$，这与 $t_1\in(-\infty,0]\cup\{\dfrac{1}{\mathrm{e}}\}$ 且 $t_2<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 矛盾，所以不符合题意.

若 $a>1$，则根据二次方程根与系数的关系可知 $t_1t_2=1-a<0$，符合题意，此时 t_1 和 t_2 一正一负，所以

$$t_1\in(-\infty,0],t_2\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}}),$$

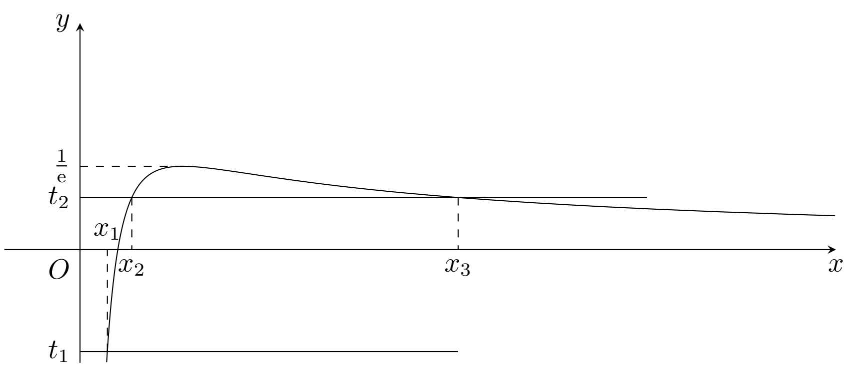


图 11.23:

因为 $x_1<x_2<x_3$，结合图像可知 $t_1=\dfrac{\ln x_1}{x_1},t_2=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=\dfrac{\ln x_3}{x_3}$.

所以原式 $=(1-t_1)^2(1-t_2)^2=[1-(t_1+t_2)+t_1t_2]^2=[1-(1-a)+1-a]^2=1^2=1$. ♡

评注 11.37.1. 这两个例题都涉及到了 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图像与性质，通过这两个例题的练习，读者能够加深对函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的理解.

$y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 可以看成是函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 经过复合运算得到的新函数，即记 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g(x)=f(\mathrm{e}^x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.$g(x)$ 的图像如下图所示，可以看出 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像的形状非常类似，且同样以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为极大值、同样有一个拐点. 除此之外，$f(x)$ 满足 $f(2)=f(4)$，与之对应地，$g(x)$ 满足 $g(\ln 2)=g(2\ln 2)$.

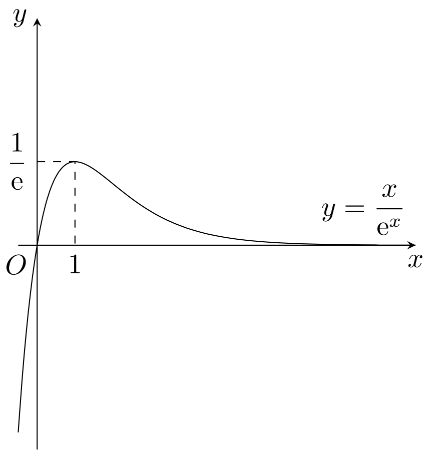


图 11.24:

有兴趣的读者可以自己求出 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 的二阶导数，从而计算出拐点.

例 11.38. 已知函数 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 有两根 x_1,x_2 且 $x_2\geq 2x_1$，则 m 的取值范围是____________.

解. 这个问题涉及到两个变量，考虑以商变量 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 为主元.

根据题意得 $m=\dfrac{x_1}{\mathrm{e}_1^x}=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}_2^x}$.

设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则 $t\geq 2$，消去 t_2 得 $\mathrm{e}^{x_1(t-1)}=t$，即 $x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$.

记 $g(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}$，则 $g'(t)=\dfrac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，

记 $\varphi(t)=1-\dfrac{1}{t}-\ln t$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t^2}$.

所以当 $t\geq 2$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 递减，所以 $\varphi(t)\leq\varphi(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0$.

所以 $g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 递减. 又因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{t}}{1}=0$，所以 $g(t)\in(0,\ln 2]$.

而 $m=\dfrac{g(t)}{\mathrm{e}^{g(t)}}$，根据函数 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 的性质可知，$m\in(0,\dfrac{\ln 2}{2}]$.

另解 注意到 $f(\ln 2)=f(2\ln 2)$，所以当 $x_1=\ln 2$，$x_2=2\ln 2$ 时恰好满足 $x_2=2x_1$，此时 $m=\dfrac{x_1}{\mathrm{e}_1^x}=\dfrac{\ln 2}{2}$. 结合图像可知当 $0<m<\dfrac{\ln 2}{2}$ 时 $x_2/x_1>2$，当 $\dfrac{\ln 2}{2}<m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $x_2/x_1<2$，所以 m 的范围是 $(0,\dfrac{\ln 2}{2}]$. ♡

【二】函数 $y=x\ln x$ **和函数** $y=x\mathrm{e}^x$.

记 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1$.

所以当 $x\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x\in(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.$f(x)$ 在 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 处达到极小值 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

记 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}>0$，因此函数 $y=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 是下凸函数，没有拐点.
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, 这是一个 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，采用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0.$$

所以当 $x\to0^+$ 时，$f(x)\to0$.

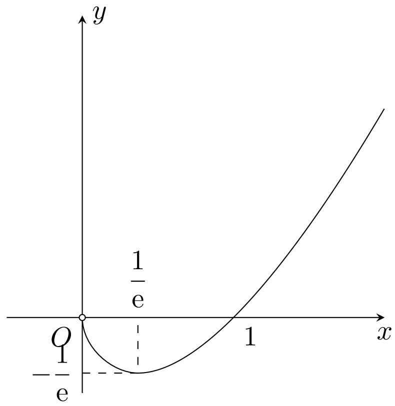


图 11.25:

函数 $y=xe^x$ 可以看成是由函数 $y=x\ln x$ 和 $y=e^x$ 经过复合运算得到的，若记 $f(x)=x\ln x$，则 $g(x)=f(e^x)=xe^x$，显然 $g(x)$ 的单调性也是先减后增，最小值也是 $\dfrac{1}{e}$.

$g'(x)=e^x(x+1)$，所以当 $x<-1$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，$g(x)$ 在 -1 处取得极小值 $-\dfrac{1}{e}$.

设 $g'(x)=h(x)$，则 $h'(x)=e^x(x+2)$，所以 -2 是 $g(x)$ 的拐点. 可见 $y=x\ln x$ 没有拐点，但 $y=xe^x$ 是有拐点的.

最后考虑 $g(x)$ 在无穷处的极限，

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{x}{e^x})=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}(\frac{\infty}{\infty})=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty.$$

根据以上讨论作出的 $y=xe^x$ 的图像如下：

例 11.39. 当 $x>0$ 时，证明不等式：$\ln x>\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2}{ex}$.

解. 等价于证明

$$x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}.$$

根据 $y=x\ln x$ 和 $y=\dfrac{x}{e^x}$ 的性质 (证明略) 可知：

$$x\ln x\geq-\frac{1}{e},\frac{x}{e^x}\leq\frac{1}{e}.$$

其中第一个式子在 $x=\dfrac{1}{e}$ 时取得等号，右边的式子在 $x=1$ 时取得等号，所以

$$x\ln x-\frac{x}{e^x}>-\frac{2}{e}.$$

证毕. ♡

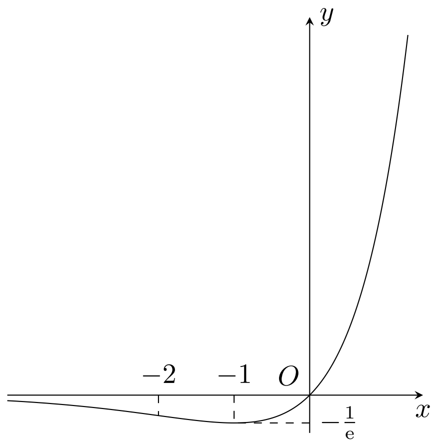


图 11.26:

习题 11.3

1. 不等式 $|x|^3 - 2x^2 - 4|x| + 3 < 0$ 的解集是______.

2. 已知 $(\sin\alpha, \sin\beta)$ 是函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + t^3}$ 和 $g(x) = 3tx^2 + (3t^2 + 1)x + t$ 图象的公共点，且 $|\alpha - \beta| \le 1$, 求证：$|t| \le 1$.

3. 设直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = x^3 - x$ 有三个不同的交点 A、B、C，且 $|AB| = |BC| = 2$，则 k 的值为 ______.

4. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}bx^2 + cx + d$ 在区间 $(0, 2)$ 内既有极大值又有极小值. 则 $c^2 + 2bc + 4c$ 的取值范围是______.

5. 已知 a、b、c、d 均为实数，函数 $f(x) = \dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 + cx + d(a < 0)$ 有两个极值点 x_1、$x_2(x_1 < x_2)$，满足 $f(x_2) = x_1$，则方程 $a[f(x)]^2 + b[f(x)] + c = 0$ 的实根个数是______.

6. 函数 $f(x) = 4x^3 - 3x$ 在 $(a, a + 2)$ 上存在最大值，则实数 a 的取值范围是______.

7. 设函数 $f(x) = 4x^3 + bx + 1(b \in \mathbb{R})$，对任意的 $x \in [-1, 1]$，都有 $f(x) \ge 0$ 成立，求实数 b 的取值范围.

8. 若实数 x_0 满足 $f(x_0) = x_0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个不动点. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$（其中 a、b 为常数）有互异的两个极值点 x_1 和 x_2. 试判断是否存在实数组 (a, b)，使得 x_1 和 x_2 皆为不动点，并证明你的结论.

9. 已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, g(x) = e^x$.

   (1) 若关于 x 的不等式 $f(x) \le mx \le g(x)$ 恒成立，试求实数 m 的取值范围；

10. 已知函数 $f(x) = \ln x + \dfrac{a}{x}(a \in \mathbb{R})$.

    (2) 若 $f(x) < 2x^2$ 在 $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

11. 设函数 $f(x)=px-\dfrac{p}{x}-2\ln x$

(1) 若 $f(x)$ 在其定义域内为单调递增函数，求实数 p 的取值范围；

(2) 设 $g(x)=\dfrac{2e}{x}$，且 $p>0$，若在 $[1,e]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，求实数 p 的取值范围；

12. 设 $f(x)=e^x-ax-a$.（e 是自然对数的底数）

(1) 若 $f(x)\geq 0$ 对一切 $x\geq -1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

13. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=-x^2+ax-3$，$a\in\mathbb{R}$.

(1) 若对于任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\geq\dfrac{1}{2}g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

14. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，求 a 的取值范围；

15. 已知 $f(x)=x\ln x-ax$，$g(x)=-x^2-2$.

(1) 对于所有的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[m,m+3](m>0)$ 上的最值；

16. 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x$，其中 $a<0$，且函数 $f(x)$ 存在单调递减区间.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 若对满足条件的 a 的任意值，$f(x)<b$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，求实数 b 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x)=\ln(ax+1)+\dfrac{1-x}{1+x}(x\geq 0,a>0)$.

(2) 若 $f(x)\geq\ln 2$ 恒成立，求 a 的取值范围.

11.4 导数问题选讲

前面几节介绍的内容主要是有关导数基本概念和重要理论. 在这一节中，我们将介绍一些解答导数问题的常用技巧和方法，并挑选一部分典型问题进行分析，希望读者通过研究这些典型问题，尽可能多地积累处理导数问题的经验，全面提高解题能力.

11.4.1 利用导数证明不等式

例 11.40. 证明：$\mathrm{e}^x\geq x+1$.

证明. 构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增.

所以 $f(x)\geq f(0)=0$，当且仅当 $x=0$ 时取得等号.

事实上，$f'(0)=1$，$y=x+1$ 恰是 $y=\mathrm{e}^x$ 在 0 处的切线方程，注意到 $y=\mathrm{e}^x$ 是下凸函数，因此 $y=\mathrm{e}^x$ 总是不低于其切线.

总之我们证明了

$$\mathrm{e}^x \geq x+1, \text{当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立.}$$

□

这是一个非常重要的不等式，常常用于放缩.

例 11.41. 证明：$\ln x \leq x-1$.

证明. 构造函数 $f(x)=\ln x-x+1$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

所以 $f(x)\leq f(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

事实上，$f'(1)=1$，直线 $y=x-1$ 恰是 $y=\ln x$ 在 1 处的切线方程，注意到 $y=\ln x$ 是上凸函数，因此 $y=\ln x$ 总是不高于其切线，这便从直观上解释了上述不等式.

总之我们证明了

$$\ln x \leq x-1, \text{当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立.}$$

□

这也是一个经常用于放缩的不等式.

我们用 $\dfrac{1}{x}0$ 替换上式中的 x，得

$$-\ln x \leq \frac{1}{x}-1,$$

即

$$\ln x \geq 1-\frac{1}{x}, \text{当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立.}$$

综合上述讨论，我们得到

$$1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1.$$

两个等号都在 $x=1$ 处取得.

例 11.42. (1) 若 $\ln x-a(1-\dfrac{1}{x})\geq 0$ 对 $\forall x\geq 1$ 均成立，则 a 的取值范围是__________________.
(2) 若实数 a,b 满足 $\ln a-\ln\dfrac{b}{2}\geq a^2+\dfrac{1}{b^2}-2$，则 $a+b$ 的值为__________________.

(1) *解.* 原不等式等价于

$$\ln\frac{1}{x} \leq a(\frac{1}{x}-1)$$

恒成立，根据重要不等式

$$\ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}-1, \text{当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立.}$$

所以进一步等价于

$$a(\frac{1}{x}-1) \geq \frac{1}{x}-1 \text{恒成立.}$$

因为 $x \geq 1$，所以 $0 < \frac{1}{x} \leq 1$，所以 $a \in (-\infty, 1]$. ♡

(2) 解. $\ln a - \ln \frac{b}{2} = \ln \frac{2a}{b} \leq \frac{2a}{b} - 1$.

另一方面，$a^2 + \frac{1}{b^2} - 1 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}} - 1 = \frac{2a}{b} - 1$.

所以 $\ln a - \frac{b}{2} \leq a^2 + \frac{1}{b^2} - 1$, 当且仅当 $a = \frac{1}{b}$ 且 $\frac{2a}{b} = 1$ 时等号成立.

结合 $\ln a - \ln \frac{b}{2} \geq a^2 + \frac{1}{b^2} - 2$ 可知

$$\begin{cases} a = \frac{1}{b}, \\ \frac{2a}{b} = 1. \end{cases}$$

解得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$b = \sqrt{2}$，所以 $a + b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. ♡

不等式 $\mathrm{e}^x \geq x + 1$ 和 $\ln x \leq x - 1$ 称为重要不等式. 在这里特别指出，我们在利用这些不等式进行放缩时有时会用到更弱的结论

$$\mathrm{e}^x > x, \ln x < x.$$

这两个更弱的结论可以用于指对函数与不同幂次幂函数的大小比较：

$$\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^{\frac{x}{n}})^n > (\frac{x}{n})^n, n \in \mathbb{N}_+$$

$$\ln x = n \ln x^{\frac{1}{n}} < n\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}_+$$

上述的这些不等式都常常用于放缩.

例 11.43. 设 $a = 2\ln 1.01$，$b = \ln 1.02$，$c = \sqrt{1.04} - 1$，则（　　　　）.

(A) $a < b < c$　　(B) $b < c < a$　　(C) $b < a < c$　　(D) $c < a < b$

解. 本质上是构造函数证明不等式的问题.

$a = 2\ln 1.01 = \ln 1.0201$，所以 $a > b$，排除 A 和 D，观察选项可知只需比较 a 和 c 的大小.

考虑以 0.01 为“主元”构造函数，令 $f(x) = 2\ln(x+1) - \sqrt{1+4x} + 1$，则

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}}$$

取 $x \in (0, 2)$，此时 $x^2 - 2x < 0$，所以 $x^2 + 2x + 1 < 1 + 4x$，所以 $x + 1 < \sqrt{1+4x}$，所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递增，所以 $f(x) > 0$，取 $x = 0.01$，即 $2\ln 1.01 > \sqrt{1.04} - 1$，即 $a > c$，选 B 项. ♡

例 11.44. 设函数 $f(x) = \ln(a - x)$，已知 $x = 0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a,

(2) 证明：$\frac{x + f(x)}{xf(x)} < 1$.

(1) 解. $y' = f(x) + xf'(x) = \ln(a - x) - \frac{x}{a - x}$.

当 $x = 0$ 时，$y' = \ln a = 0$，解得 $a = 1$. ♡

(2)

证明. $f(x)=\ln(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$.

为方便求导数，不妨令 $t=1-x$，则 $t>0$ 且 $t\neq 1$，此时等价于证明

$$\frac{1-t+\ln t}{(1-t)\ln t}<1.$$

注意到当 $0<t<1$ 时 $1-t<0, \ln t>0, (1-t)\ln t<0; t>1$ 时 $1-t>0, \ln t<0, (1-t)\ln t<0$，所以进一步等价于证明

$$1-t+\ln t>(1-t)\ln t.$$

记 $\varphi(t)=1-t-\ln t-(1-t)\ln t$，则

$$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}-(-\ln t+\frac{1-t}{t})=-1+\frac{1}{t}+\ln t-\frac{1}{t}+1=\ln t.$$

所以当 $t\in(0,1)$ 时 $\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 递减；当 $t\in(1,+\infty)$ 时 $\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 递增.

又因为 $t\neq 1$，所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，得证. □

例 11.45. 设函数 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$

(3) 求证：对任意的正整数 n ，都有 $\sum_{k=1}^{n}\ln^2(1+\frac{2}{k})<3$ 成立.（参见习题 11.3 第 11 题）

> (分析：本题要求证明一个数列不等式，主要思路应是找到一个放缩公式从而能够求和，前两小问正是对这一小问的铺垫. 如果读者比较有直觉的话可能会感知到我们应该赋 $p=1$（这正是第一小问中求出的界值），即使用不等式 $x-\frac{1}{x}>2\ln x$ 进行放缩. 如果没有第一小问的铺垫，本题难度更大.)

证明. 令 $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，则由 (1) 可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，由于 $g(1)=0$，所以当 $x>1$ 时 $g(x)>0$，即 $x-\frac{1}{x}-2\ln x>0$，即

$$0<2\ln x<x-\frac{1}{x}.$$

因此

$$\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)=2\ln\sqrt{1+\frac{2}{k}}<\sqrt{1+\frac{2}{k}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k}}}=\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}},$$

即 $\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)<\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$, 故 $\ln^2(1+\frac{2}{k})<\frac{4}{k(k+2)}$.

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln^2(1+\frac{2}{k})&<\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}=2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})\\&=2(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})<3.\end{aligned}$$

□

评注 11.45.1. 本题最后的求和用到了裂项公式.

例 11.46 (切线放缩). 已知函数 $f(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程;

(2) 若方程 $f(x)=b$ 有两个实数根 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，证明:

$$x_2-x_1\le 1+\frac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\frac{\mathrm{e}b}{\mathrm{e}-1}.$$

(1) 解. $f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-1$，$f'(-1)=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，而 $f(-1)=0$，所以切线方程为

$$y=\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1).$$

♡

(2)

(分析：这个问题中函数 $f(x)$ 的二阶导数为 $f''(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，所以在 $(-3,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 是下凸的，所以它总是要高于其切线，结合图像可知 x_2-x_1 应当不超过 $x_2'-x_1'$，其中 x_1',x_2' 是 $y=b$ 与函数的两条切线的交点，我们将依据这个事实进行放缩：

题目的第一小问已经算出了 $x=-1$ 处的切线，在这里很可能要用到. 令 $\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)=b$ 解得 $x=\dfrac{\mathrm{e}b}{1-\mathrm{e}}-1$，记 $x_1'=\dfrac{\mathrm{e}b}{1-\mathrm{e}}-1$，则根据前面的讨论可知 $x_1\ge x_1'$，可以看到 x_1' 的结构恰好是待证不等式中的结构.

解决了 $x_1\ge x_1'$ 的放缩之后，我们还需解决 $x_2\le x_2'$ 的放缩. 假设我们要用到的切线是 $y=[(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}-1](x-x_0)+(x_0+1)(\mathrm{e}^{x_0}-1)$，令 $y=b$ 解得

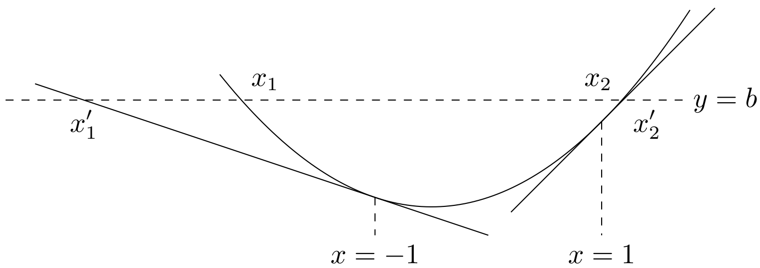
$$x=\frac{b-(x_0+1)(\mathrm{e}_0^x-1)}{(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}-1}+x_0.$$

观察可知当 $x_0=1$ 时，$x=\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}$，所以我们要用到的另一条切线是 1 处的切线. $\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}$ 就是我们要找的 x_2'. 这样我们便有

$$x_2-x_1\le x_2'-x_1'=\frac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}-(\frac{\mathrm{e}b}{1-\mathrm{e}}-1)=1+\frac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\frac{\mathrm{e}b}{\mathrm{e}-1}.$$

事实上不能取等，因为 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的函数值不等，x_1 和 x_2 不可能同时为切点.

接下来便可以用综合法书写过程了.)



证明. 由 (1) 知，$f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)$，

设 $S(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}(x+1)$.

构造函数 $F(x)=f(x)-S(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=(x+2)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

记 $F'(x)=\varphi(x)$，则 $\varphi'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，所以 $F'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 递减，在 $(-3,+\infty)$ 递增. 又因为 $F'(-3)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，且 $F'(-1)=0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上递减，在 $(-1,+\infty)$ 递增，所以，$F(x)\geq F(-1)=0$，即 $f(x)\geq S(x)$.

记方程 $S(x)=b$ 的解为 $x_1'=\dfrac{\mathrm{e}b}{1-\mathrm{e}}-1$.

又因为 $b=S(x_1')=f(x_1)\geq S(x_1)$，且 $S(x)$ 是减函数，所以 $x_1'\leq x_1$.

另一方面，$f(x)$ 在点 $(1,2\mathrm{e}-2)$ 处的切线方程为

$$y=(3\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}-1.$$

设 $T(x)=(3\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}-1$，构造函数 $G(x)=f(x)-T(x)$，则 $G'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}$.

记 $G'(x)=\theta(x)$，则 $\theta'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，

所以 $G'(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上递减，在 $(-3,+\infty)$ 上递增.

又因为 $G'(-3)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}-3\mathrm{e}<0$，$G'(1)=0$，所以 $G(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，所以 $G(x)\geq G(1)=0$，所以 $f(x)\geq T(x)$.

记方程 $T(x)=b$ 的解为 $x_2'=\dfrac{\mathrm{e}+1+b}{3\mathrm{e}-1}$，又因为 $b=T(x_2')=f(x_2)\geq T(x_2)$，且 $T(x)$ 是增函数，所以 $x_2\leq x_2'$.

所以 $x_2-x_1\leq x_2'-x_1'=\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}-(\dfrac{\mathrm{e}b}{1-\mathrm{e}}-1)=1+\dfrac{b+\mathrm{e}+1}{3\mathrm{e}-1}+\dfrac{\mathrm{e}b}{\mathrm{e}-1}$, 得证. □

评注 11.46.1. 切线放缩是一类证明不等式问题的通法，它是建立在函数凹凸性的基础之上的.

11.4.2 函数的零点问题

例 11.47. 当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，证明 $\ln x-ax=0$ 有两个实数根.

(分析：从直观上理解这个事实并不困难，只需要结合 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图像即可看出 $\ln x-ax=0$ 有两个实数根. 本题要求证明这个结论，即证明 $f(x)=\ln x-ax$ 有 2 个零点.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=-\dfrac{a(x-\frac{1}{a})}{x}$，当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

又因为 $f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1>0$，根据零点存在性定理，只需找到 $x_1\in(0,\dfrac{1}{a})$ 使得 $f(x_1)<0$，即可说明在 $(x_1,\dfrac{1}{a})$ 上有唯一零点.

同样，只需找到 $x_2\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 使得 $f(x_2)<0$，即可说明在 $(\dfrac{1}{a},x_2)$ 上有唯一的零点.

根据以上分析可以看出，解决零点问题的核心就在于“找点”，即通过在单调区间内找到一正一负的函数值，根据零点存在性定理卡住零点. 下面我们来分析如何找到这两个点.

找 x_1：在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上找一个负的函数值是较容易的，注意到 $f(1)=-a<0$，而 $0<1<\dfrac{1}{a}$，取 $x_1=1$ 即可.

找 x_2：即在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上找一个负的函数值. 根据我们对函数增长的认识，虽然当 $x\to+\infty$ 时 $\ln x$ 和 ax 都取向正无穷，但是 $\ln x$ 是跑不过 ax 的，所以当我们取得足够大时，必然能找到

x_2 使 $f(x_2)>0$. 由于我们无法直接解超越方程，所以需要先将 $f(x)$ 适当放大为方便求解的结构，这时候就需要用到我们在前一节中介绍的那些用于放缩的不等式了.

在 $\ln x-ax$ 中，$-ax$ 是决定其整体变化趋势的一项，因此我们在放大时一般不能轻易改动它，而 $\ln x$ 在这里是个弟弟，考虑将它放大，注意只能将 $\ln x$ 放大到低于一次，否则就不能保证放大后的结构仍然跑不过 ax 了.

根据前一节介绍的不等式

$$\ln x=2\ln(\sqrt{x})<2\sqrt{x},$$

得

$$\ln x-ax<2\sqrt{x}-ax=\sqrt{x}(2-a\sqrt{x})=0,$$

解得 $x=\dfrac{4}{a^2}$，因此我们只要取 $x_2=\dfrac{4}{a^2}>1$ 即可保证 $f(x_2)<0$.

如果我们利用不等式 $\ln x<x$ 进行放大，则会得到 $\ln x-ax<(1-a)x<0$，这与 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 矛盾，显然是错误的，达不到找点的目的. 出现错误的原因就在于没有考虑次数而盲目放缩，这是不可取的. 找点的核心思想可以归结为“抓大放小”，其中“抓大”指的就是把握住哪一项才是决定整个函数整体趋势的一项，然后再利用不等式将其他结构适当地放大或缩小，从而化“不可解”为可解.

下面是用综合法书写的证明过程：)

证明. $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{-a(x-\frac{1}{a})}{x}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 递减，$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1>0$.

$f(1)=-a<0$，取 $\forall x_1\in(0,1)$，存在唯一的 $x_3\in(x_1,\dfrac{1}{a})$ 使得 $f(x_3)=0$.

取 $\forall x_2\in(\dfrac{4}{a^2},+\infty)$, $f(x_2)=\ln x_2-ax_2<2\sqrt{x_2}-ax_2=\sqrt{x_2}(2-a\sqrt{x_2})<\sqrt{x_2}(2-a\cdot\sqrt{\dfrac{4}{a^2}})=0$.

所以存在唯一的 $x_4\in(\dfrac{1}{a},x_2)$ 使得 $f(x_4)=0$.

综上所述，当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有两个零点 x_3,x_4，即方程 $\ln x-ax$ 有两个不同的实数根 x_3,x_4. □

评注 11.47.1. 用综合法书写的找点过程和分析过程是恰好相反的.

有兴趣的读者可以试一试分离参数，做函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-a$，这时候可以找与参数无关的“定点”，不用教就会找，可能看上去要方便一些.

例 11.48. 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x+ax^2+(1-a)x-1$,

(1) 当 $a=-1$ 时，判断函数的单调性.

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数.

(1) 解. $f(x)=(x-1)\ln x-x^2+2x-1$.

$f'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}-2x+3$.

记 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2}=\dfrac{(2x+1)(-x+1)}{x^2}$.

因为 $x>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时 $h(x)$ 递增，$x\in(1,+\infty)$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 递减.

所以 $h(x) \le h(1) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减. ♡

(2)

(分析：注意到 $f(x) = (x-1)\ln x + (ax+1)(x-1) = (x-1)(\ln x + ax + 1)$，问题转化为讨论 $g(x) = \ln x + ax + 1$ 不为 1 的零点个数.

当 $a = -1$ 时，由 (1) 知 $f(x)$ 递减，注意到 $f(1) = 0$，故 $f(x)$ 仅有一个零点 $x = 1$.

$g'(x) = \dfrac{ax+1}{x}$. 令 $g'(x) = 0$ 解得 $x = -\dfrac{1}{a}$，需要分类讨论：

(i)$a \ge 0$，则 $g'(x) > 0$，$g(x)$ 递增，且 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$，因此 $g(x)$ 不为 1 的零点个数为 1，即 $f(x)$ 有 2 个零点.

(ii)$a < 0$，则 $g(x)$ 在 $(0, -\dfrac{1}{a})$ 上递增，在 $(-\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 上递减，而 $g(-\dfrac{1}{a}) = -\ln(-a)$.

1° 若 $a < -1$，则 $g(-\dfrac{1}{a}) < 0$，此时 $g(x) \le g(-\dfrac{1}{a}) = 0$，所以 $g(x)$ 没有零点，即 $f(x)$ 有 1 个零点.

2° 若 $-1 < a < 0$，则 $g(-\dfrac{1}{a}) > 0$，此时 $g(x)$ 有 2 个零点，即 $f(x)$ 有 3 个零点.

至此所有的情况都讨论完了，接下来考虑找点问题. 根据先易后难的原则，先考虑 (i)：

因为 $g(x)$ 递增且 $g(1) = a + 1 > 0$，所以只需找到一个 $x_1 \in (0,1)$ 使得 $f(x_1) < 0$.

当 $x \to 0$ 时 $\ln x \to -\infty$，而 $ax \to 0$，所以这里的“大头”是 $\ln x$. 考虑将其他部分适当放大，考虑到 x 充分接近 0 时 ax 是一个很小的正数，我们可以将它放大为一个稍大的正数，要做到这一点，只需要对 x 限定一个小的范围 $x < 1$(也可以设计成其他界值)，从而将 ax 放大为 a 使得不等式可解.

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时，} \ln x + ax + 1 < \ln x + a + 1 = 0,$$

解得 $x = \mathrm{e}^{-a-1} < 1$，所以只需取 $x_1 < \mathrm{e}^{-a-1}$ 即可保证 $g(x_1) < 0$.

再来考虑 (ii) 的 2°.

$g(x)$ 在 $(0, -\dfrac{1}{a})$ 递增，在 $(-\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 递减，$g(-\dfrac{1}{a}) > 0$. 这里要找到 $x_2 \in (0, -\dfrac{1}{a})$ 使得 $g(x_2) < 0$ 和 $x_3 \in (-\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 使得 $g(x_3) < 0$.

先找 x_2：当 $x \to 0$ 时，$\ln x \to -\infty$，$ax \to 0$，所以这里 $\ln x$ 仍然是大头，应将 ax 放大. 在这种情况下 ax 是一个负数，可以直接丢掉它，即

$$\ln x + ax + 1 < \ln x + 1 = 0,$$

解得 $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < -\dfrac{1}{a}$，所以只要取 $x_2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 即可保证 $g(x_2) < 0$.

再找 x_3；当 $x \to +\infty$ 时，$\ln x \to +\infty$，$ax \to -\infty$，但是 $\ln x$ 跑不过 ax，所以 ax 是大头，应将 $\ln x$ 放大，但是要注意次数不能超过一次.

$$\ln x + ax + 1 < 2\ln\sqrt{x} + ax + 1 < 2\sqrt{x} + ax + 1.$$

事实上这时候已经可以求解 $2\sqrt{x} + ax + 1 = 0$，但是需用到求根公式，比较麻烦，所以索性将常数 1 也放大到 $\dfrac{1}{2}$ 次 (不能放大到 1 次！)，从而方便求解，即

$$\ln x + ax + 1 < 2\sqrt{x} + ax + \sqrt{x} = 0$$

解得 $x = \dfrac{9}{a^2}$.

注意我们用到了不等式 $\sqrt{x} > 1$，所以还需要限定 $x > 1$，而 $x = \dfrac{9}{a^2} > 1$，因此只需取 $x_3 > \dfrac{9}{a^2}$ 就能保证 $g(x_3) < 0$.

找 x_3 的过程同样体现了抓大放小，即抓住 ax，然后将对数 $\ln x$ 和零次的常数 1 放大到 $\dfrac{1}{2}$ 次.

至此，我们就可以用综合法写出解题过程了，习惯上，我们书写分类讨论的过程时也遵循先易后难的原则.

解. $f(x) = (x-1)(\ln x + ax + 1)$. 问题转化为讨论 $g(x) = \ln x + ax + 1$ 不为 1 的零点个数.

当 $a = -1$ 时，$g(1) = 1 - 1 = 0$. 由 (1) 可知 $f(x)$ 递减，所以 $f(x)$ 只有 1 个零点 $x = 1$.

$g(x) = \dfrac{ax+1}{x}$.

(i) 当 $a < -1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\dfrac{1}{a})$ 递增, 在 $(-\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 递减, 所以 $g(x) \le g(-\dfrac{1}{a}) = -\ln(-a) < 0$. 所以 $g(x)$ 无零点，所以 $f(x)$ 只有 1 个零点 $x = 1$.

评注 11.48.1. 实际上这里也没必要将 $a = -1$ 和 $a < -1$ 分开讨论，但是考虑到 $a = -1$ 是第一小问做过的结果，还是单独拿出来说一下，显得第一小问不是毫无价值.

(ii) 当 $a \ge 0$ 时，$g'(x) \ge 0$，$g(x)$ 单调递增，且 $g(1) = a + 1 > 0$.

取 $\forall x_1 < \mathrm{e}^{-a-1}$，则

$$g(x_1) = \ln x_1 + ax_1 + 1 < \ln x_1 + a + 1 < -a - 1 + a + 1 = 0.$$

所以存在唯一的 $x_4 \in (x_1, 1)$ 使得 $f(x_4) = 0$，所以 $f(x)$ 有 2 个零点 x_4 和 1.

(iii) 当 $a \in (-1, 0)$ 时，由 (ii) 可知 $g(x)$ 在 $(0, -\dfrac{1}{a})$ 递增，在 $(-\dfrac{1}{a}, +\infty)$ 递减.

$g(-\dfrac{1}{a}) = -\ln(-a) > 0$.

取 $\forall x_2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则

$$g(x_2) = \ln x_2 + ax_2 + 1 < \ln x_2 + 1 < -1 + 1 = 0.$$

所以存在唯一的 $x_5 \in (x_2, -\dfrac{1}{a})$ 使得 $f(x_5) = 0$.

取 $\forall x_3 > \dfrac{9}{a^2}$，则

$$g(x_3) = \ln x_3 + ax_3 + 1 < 2\sqrt{x_3} + ax_3 + \sqrt{x_3} = \sqrt{x_3}(3 + a\sqrt{x_3}) < \sqrt{x_3}(3 + a\sqrt{\frac{9}{a^2}}) = 0.$$

所以存在 $x_6 \in (-\dfrac{1}{a}, x_3)$ 使得 $f(x_6) = 0$.

所以此时 $f(x)$ 有 3 个零点 $x_5, x_6, 1$.

综上所述，当 $a \le -1$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点，当 $a \ge 0$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点，当 $-1 < a < 0$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点. ♡

例 11.49. 已知函数 $f(x) = \ln(2x+1) + 2ax - 4a\mathrm{e}^x + 4$（$a > 0$）；

(1) 若 $a = 1$，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数.

(1) 解. 当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(2x+1)+2x-4\mathrm{e}^x+4$.

$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2-4\mathrm{e}^x$, 设 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{4}{(2x+1)^2}-4\mathrm{e}^x<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 递减.

又因为 $f'(0)=2+2-4=0$，所以当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 递增，在 $(0,+\infty)$ 递减，所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=0$. ♡

(2)

(分析：首先判断一下 $f(x)$ 的单调区间，$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2a-4a\mathrm{e}^x$, 记 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{4}{(2x+1)^2}-4a\mathrm{e}^x<0$，所以 $f'(x)$ 递减.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f'(x)=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$，所以存在 $x_0\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 使 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},x_0)$ 递增，在 $(x_0,+\infty)$ 递减.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以只需讨论 $f(x_0)$ 的符号即可确定 $f(x)$ 的零点个数：$f(x_0)>0$—— 2 个，$f(x_0)=0$——1 个，$f(x_0)<0$——0 个.

根据 (1) 的结果可知当 $a=1$ 时 $f(x)$ 有唯一的零点，恰好对应的是 $f(x_0)=0$ 的情况. 由此可确定讨论标准应该为 $a<1,a=1,a>1$.

当 $0<a<1$ 时，注意到 $f'(0)=2-2a>0$，所以 $x_0>0$，而 $f(0)=4-4a>0$，所以 $f(x_0)>4-4a>0$，此时 $f(x)$ 有 2 个零点.

当 $a>1$ 时，$f'(0)=2-2a<0$，所以 $-\dfrac{1}{2}<x_0<0$. 此时该如何确定 $f(x_0)$ 的符号呢？

由 $f'(x_0)=0$ 可知，$4a\mathrm{e}_0^x=2a+\dfrac{2}{x_0+1}$，所以

$$f(x_0)=2\ln(x_0+1)+2ax_0-4a\mathrm{e}^x+4=2\ln(x_0+1)+2ax_0-2a-\frac{2}{x_0+1}+4.$$

经过隐零点代换后，我们消去了指数项，此时确定 $f(x_0)$ 的符号依然是一件很麻烦的事情，还需再构造函数 $\varphi(x)=\ln(2x+1)+2ax-\dfrac{2}{x+1}-2a+4$.

则 $\varphi'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2a+\dfrac{4}{(2x+1)^2}>0$，$g(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 是增函数，于是 $g(x_0)<g(0)=2-2a<0$，于是 $f(x_0)<0$.

事实上，注意到当 $a>1,x_0\in(-\dfrac{1}{2},1)$ 时，$\ln(2x_0+1)<0,2ax_0<0,-2a<-2,-\dfrac{2}{2x_0+1}<-2$，可直接得到 $f(x_0)<0$.

像这样利用 $f'(x_0)=0$ 进行整体代换从而化简或直接求出 $f(x_0)$ 的思想称为隐零点代换. 在有些问题中我们只知道 $f'(x_0)=0$ 的根存在，却无法求解超越方程而得到 x_0 的具体值，此时就可以利用 $f'(x_0)=0$ 进行整体代换，从而化简极值 $f(x_0)$ 的表达式.

总之我们已经讨论完了 $f(x)$ 零点个数的所有情况，接下来分析找点：

(i) 证明 x_0 的存在性即 $f'(x)$ 存在零点，需要找 $f'(x_1)>0$ 和 $f'(x_2)<0$.

<u>找 x_1</u>：当 $x\to-\dfrac{1}{2}^+$ 时，$-4a\mathrm{e}^x$ 是一个有限的负数，而 $\dfrac{2}{2x+1}\to+\infty$，因此 $\dfrac{2}{2x+1}$ 是大头，我们的思路是将 $-4a\mathrm{e}^x$ 缩小，可以考虑将 e^x 放大为一个较大的数，这样 $-4a\mathrm{e}^x$ 将缩小为一个“更负”的数. 限定 $x<0$，则 $\mathrm{e}^x<1$，$-4a\mathrm{e}^x>-4a$，这样就将 $-4a\mathrm{e}^x$ 缩小成了 $-4a$，不等式

可解.

$$当\ x<0\ 时,\ \frac{2}{2x+1}+2a-4ae^x>\frac{2}{2x+1}+2a-4a=\frac{2}{2x+1}-2a=0.$$

解得 $x_1=\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}$.

所以只需取 $x_1<\min\{0,\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}\}$，就能保证 $f'(x_1)>0$.

这里 x_1 之所以要取 0 和 $\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}$ 中的较小者，是因为要同时满足 $x_1<0$ 和 $x_1<\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}$. 从这个找点过程中也可看出，合理设计界值是一个经常用到的放缩技巧.

<u>找 x_2</u>：当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{2}{2x+1}\to 0$，$-4ae^x\to-\infty$，所以 $-4ae^x$ 是大头，考虑将 $\frac{2}{2x+1}$ 适当放大. 这时限制一个范围 $x>0$(也可以用其他的界值)，则 $\frac{2}{2x+1}$ 有上界 2，可将 $\frac{2}{2x+1}$ 放大为 2：

$$当\ x>0\ 时,\ \frac{2}{2x+1}+2a-4ae^x<2+2a-4ae^x=0.$$

解得 $x=\ln\frac{a+1}{2a}$，所以只需取 $x_2>\max\{0,\ln\frac{a+1}{2a}\}$，即可保证 $f'(x_2)>0$.

(ii) 证明当 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 有 2 个零点时需要找点. 因为 $f(x_0)>0$，所以应找 $-\frac{1}{2}<x_3<x_0$ 使 $f(x_3)<0$ 和 $x_4>x_0$ 使 $f(x_4)<0$.

<u>先找 x_3</u>：当 $x\to-\frac{1}{2}^+$ 时 $\ln(2x+1)\to-\infty$，限制 $x<0$，则 $2ax$ 是一个有限的负数，$-4ae^x$ 也是一个有限的负数，所以考虑将 $2ax$ 和 $-4ae^x$ 直接丢掉 (放大为 0)：

$$\ln(2x+1)+2ax-4ae^{x_3}+4<\ln(2x+1)+0+0+4=0.$$

解得 $x=\frac{e^{-4}-1}{2}<0$，所以只需取 $x_3<\frac{e^{-4}-1}{2}$ 即可保证 $f(x_3)<0$.

<u>再找 x_4</u>：当 $x\to+\infty$ 时，$\ln(2x+1)$ 和 $2ax$ 都趋向正无穷，$-4ae^x$ 趋向于负无穷，可惜 $\ln(2x+1)$ 和 $2ax$ 都跑不过 $-4ae^x$，考虑将 $\ln(2x+1)$ 放大. 同时，我们需要将指数适当缩小 (这里的缩小指绝对值的缩小，加上负号后就是放大了) 为较低次的幂函数，从而使得方程可解. 由不等式

$$e^x>(e^{\frac{x}{2}})^2>(\frac{x}{2})^2,$$

$$当\ x\neq 1\ 时,\ \ln x<x-1.$$

可知 $-4ae^x<-ax^2,\ln(2x+1)<2x$.

所以

$$当\ x>0\ 时,\ \ln(2x+1)+2ax-4ae^x+4<2x+2ax-ax^2+4.$$

这时候求解需用到求根公式，结果的形式较复杂，考虑将常数也放大为一次，即当 $x>1$ 时 $4<4x$，进一步得

$$当\ x>1\ 时,\ \ln(2x+1)+2ax-4ae^x+4<2x+2ax-ax^2+4x=x(2a+6-ax)=0.$$

解得 $x=\frac{2a+b}{a}>1$，所以只需取 $x_4>\frac{2a+b}{b}>1$ 即可保证 $f(x_4)<0$.

从这个找点过程中可以看出，若指数是“抓大放小”中的大头，应将指数放缩为较低的次数从而使方程可解，但是应牢记我们是“抓大”，所以不能将大头放得过低. 例如在本例中将指数放缩为二次，保证它仍然能干掉 $2ax$ 这个一次的东西.

以上是分析过程，下面就可以根据我们的分析用综合法书写过程了：

解. $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}+2a-4ae^{x}$，令 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{4}{(2x+1)^2}-4ae^{x}<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 递减.

取 $\forall -\dfrac{1}{2}<x_1<\min\{0,\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}\}$，则

$$f'(x_1)=\frac{2}{2x_1+1}+2a-4ae_1^{x}>\frac{2}{2x_1+1}+2a-4a=\frac{2}{2x_1+1}-2a>\frac{2}{2(\frac{1}{a}-\frac{1}{2})+1}=0.$$

取 $\forall x_2>\max\{0,\ln\dfrac{a+1}{2a}\}$，则

$$f'(x_2)=\frac{2}{2x_2+1}+2a-4ae_2^{x}<2+2a-4ae^{x_2}<2+2a-4a(\frac{a+1}{2a})=0.$$

所以存在唯一的 $x_0\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(x_0)=0$，且当 $x\in(-\dfrac{1}{2},x_0)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

(i) 当 $a=1$ 时，由 (1) 可知 $f(x)$ 有唯一的零点 $x=0$.

(ii) 当 $a>1$ 时，$f'(0)=2-2a<0$，所以 $x_0\in(-\dfrac{1}{2},0)$.

由 $f'(x_0)=0$ 可得 $4ae^{x_0}=2a+\dfrac{2}{2x_0+1}$.

所以

$f(x_0)=\ln(2x_0+1)+2ax_0-4ae^{x_0}+4=\ln(2x_0+1)+2ax_0-2a-\dfrac{2}{2x_0+1}+4<0+0-2-2+4=0.$

所以 $f(x)\le f(0)<0$，$f(x)$ 没有零点.

(iii) 当 $0<a<1$ 时，$f(x_0)>f(0)=0$.

取 $x_3<\dfrac{e^{-4}-1}{2}<0$，则

$$f(x_3)=\ln(2x_3+1)+2ax_3-4ae^{x_3}+4<\ln(2x+1)+0+0+4<-4+4=0.$$

所以存在唯一的 $x_5\in(x_3,x_0)$ 使 $f(x_5)=0$.

取 $x_4>\dfrac{2a+6}{a}>1$，则

$$f(x_4)=\ln(2x_4+1)+2ax_4-4ae^{x_4}+4<2x_4+2ax_4-ax_4^2+4x_4=x_4(2a+6-ax_4)<x_4(2a+6-a\cdot\frac{2a+6}{a})=0.$$

所以存在唯一的 $x_6\in(x_0,x_4)$ 使 $f(x_6)=0$.

所以当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点 x_5 和 x_6.

综上所述，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 无零点，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点. ♡

例 11.50. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$;

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$（$x_1\neq x_2$）处的导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$;

(2) 若 $a\le 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

(1) 提示：利用基本不等式放缩后，再以 $t=x_1x_2$ 为主元，读者自证不难.

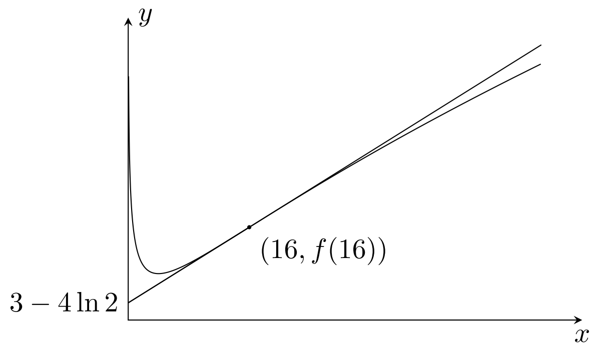
(2)

(分析：$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$. 令 $g(x)=f'(x)$ 则 $g'(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{4x^2}$.

所以 $f(x)$ 先减后增，$f'(x)$ 先增后减，且二阶导数有一个零点 $x=16$，即函数有一个拐点 $x=16$，注意到拐点处的切线为：

$$y=f'(16)(x-16)+f(16)=\frac{1}{16}(x-16)+4-4\ln 2=\frac{1}{16}x+3-4\ln 2.$$

由此可知拐点处切线的截距是 $3-4\ln 2$. 题目中需要证明的结论是具有明显几何意义的：当截距 a 不超过 $3-4\ln 2$ 时，斜率为正的直线与 $y=f(x)$ 总是有且仅有 1 个交点，如图所示：



以上是对这一小问的一个直观解释，并且我们确定了讨论标准：$k\geq\dfrac{1}{16}$ 和 $0<k<\dfrac{1}{16}$.

记 $F(x)=f(x)-(kx+a)$，则 $F'(x)=f'(x)-k$，

(i) 当 $k\geq\dfrac{1}{16}$ 时，$F'(x)\leq F'(16)=\dfrac{1}{16}-k\leq 0$，所以 $F(x)$ 递减. 而 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty$，所以此时 $F(x)$ 有且仅有 1 个零点，符合题意.

(ii) 当 $0<k<\dfrac{1}{16}$ 时，$F'(16)=\dfrac{1}{16}-k>0$，而 $F'(x)=-(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{1}{16}-k$，根据二次函数知识可知此时 $F'(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1<16<x_2$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递减，在 (x_1,x_2) 递增，在 $(x_2,+\infty)$ 递减. 要使 $F(x)$ 仅有 1 个零点，必要求 $F(x_1)>0$，因此只需证明 $F(x_1)>0$ 即可. 根据 $F'(x_1)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{x_1}-k=0$，利用隐零点代换消去 k，得 $F(x_1)=\dfrac{\sqrt{x_1}}{2}-\ln x_1+1-a$. 构造函数 $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x+1-a$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{4x}$，因为 $0<x_1<16$，所以 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减，所以 $F(x_1)=\varphi(x_1)>\varphi(16)=2-4\ln 2+1-a=3-4\ln 2-a\geq 0$，这就证明了 $F(x_1)>0$，最后一步恰好用到了题给条件.

接下来看找点，对于 (i) 的情况，需要找 x_3 使得 $F(x_3)>0$ 和 x_4 使得 $F(x_4)<0$，对于 (ii) 的情况，由于已知 $F(x_2)>F(x_1)>0$ 和 $F(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上没有零点，所以只需找到在 x_2 右侧找到一个使 $F(x)$ 为负的点，显然只需要取 $x_4>x_2$ 即可. 总之，我们需要找到两个点 x_3 和 x_4.

先找 x_3：$F(x)=\sqrt{x}-\ln x-kx-a$. 当 $\to 0$ 时，$\sqrt{x}\to 0$，$-\ln x\to+\infty$，$-kx\to 0$，$-a$ 可以取 $(4\ln 2-3,+\infty)$ 内的任意值，但是一个有限的数. 所以 $-\ln x$ 是大头，考虑将其他项适当缩小.$\sqrt{x}$ 是一个正数可以直接缩小为 0 扔掉，$-kx$ 是负数，考虑将它缩小为更小的负数，限定范围 $x<1$，从而 $-kx>-k.-a$ 正负不定，可以将其缩小为 $-|a|$. 此时：

$$\text{当 } x<1 \text{ 时，}\sqrt{x}-\ln x-kx-a>-\ln x-k-|a|=0.$$

解得 $x=\mathrm{e}^{-(k+|a|)}<1$, 所以只要取 $x_3<\mathrm{e}^{-(k+|a|)}$，就能保证 $F(x_3)>0$.

再找 x_4：当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x}\to+\infty, -\ln x\to-\infty, -kx\to-\infty$，但是 $\ln x$ 和 $\sqrt{x}$ 都跑不过 kx，所以 $-kx$ 是大头，考虑将其他项适当放大. $-\ln x$ 是一个负数，直接放大成 0 扔掉，此时

$$\sqrt{x}-\ln x-kx-a<\sqrt{x}-kx-a.$$

不易求解，考虑将常数 a 也放大成半次. 由于 $-a$ 的正负不定，首先可以放大为非负数 $|a|$:

$$\sqrt{x}-\ln x-kx-a<\sqrt{x}-kx+|a|.$$

进一步限定 $x>1$，则 $|a|\sqrt{x}>|a|$，此时

$$当\ x>1\ 时，\sqrt{x}-kx+|a|<\sqrt{x}+|a|\sqrt{x}-kx=0.$$

解得 $x=(\dfrac{1+|a|}{k})^2$，所以只需取 $x_4>\max\{1,(\dfrac{1+a}{k})^2\}$，即可保证 $F(x_4)<0$. 当然，根据范围的要求，我们还要保证取 $x_4>x_2$.

至此，我们可以用综合法书写过程了.)

证明. 记 $F(x)=f(x)-(kx+1)$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}-k=-(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{1}{16}-k.$;

(i) 当 $k\geq\dfrac{1}{16}$ 时，根据二次函数知识，$F'(x)\leq F'(16)=\dfrac{1}{16}-k\leq0$，所以 $F(x)$ 递减，$F(x)$ 至多有 1 个零点.

任取 $0<x_3<\mathrm{e}^{-(k+|a|)}<1$，则

$$f(x_3)=\sqrt{x_3}-\ln x_3-kx_3-a>-\ln x_3-k-|a|>k+|a|-k-|a|=0.$$

任取 $x_4>\max\{1,(\dfrac{1+|a|}{k})^2\}$，则

$$f(x_4)=\sqrt{x_4}-\ln x_4-kx_4-a<\sqrt{x_4}-kx_4+|a|\sqrt{x_4}=\sqrt{x_4}(1+|a|-k\sqrt{x_4})<\sqrt{x_4}(1+|a|-k\cdot\frac{1+|a|}{k})=0.$$

所以存在唯一的 $x_0\in(x_3,x_4)$ 使得 $F(x_0)=0$，即 $F(x)$ 有且仅有 1 个零点.

(ii) 当 $0<k<\dfrac{1}{16}$ 时，根据二次函数知识 $F'(x)=0$ 有两个根 x_1,x_2(不妨 $x_1<x_2$)，且 $\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}<\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}$ 即 $0<x_1<16<x_2$. 且当 $x\in(0,x_1)$ 或 $x\in(x_2,+\infty)$ 时 $F'(x)<0$，$F(x)$ 递减，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 递增.

因为 $F'(x_1)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{x_1}-k=0$，所以 $k=-\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$.

而 $F(x_1)=\sqrt{x_1}-\ln x_1-kx_1-a$，代入消去 k 得

$$F(x_1)=\sqrt{x_1}-\ln x_1-k(-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{2\sqrt{x_1}})-a=\frac{\sqrt{x_1}}{2}-\ln x_1+1-a.$$

构造 $\varphi(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x+1-a$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-4}{4x}$，因为 $0<x_1<16$，所以 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减，所以 $F(x_1)=\varphi(x_1)>\varphi(16)=2-4\ln2+1-a=3-4\ln2-a\geq0$.

所以当 $x\in(0,x_2]$ 时 $F(x)\geq F(x_1)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_2]$ 上没有零点.

不妨取 $x_4>x_2$，因为 $F(x_4)<0$，$F(x_2)>0$，所以存在唯一的 $x_0'\in(x_2,x_4)$ 使得 $F(x_0')=0$，所以 $F(x)$ 有且仅有 1 个零点 x_0'.

综上所述，对 $\forall k>0$，$F(x)$ 有唯一零点，所以直线 $y=kx+a$ 和 $y=f(x)$ 有唯一公共点. □

评注 11.50.1. 有兴趣的读者还可以尝试一下分离参数，也不失为一个好方法.

11.4.3 恒成立与能成立问题

例 11.51 (分离参数，直接处理). 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$.
(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq \dfrac{1}{2}x^3+1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(1) 解. $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x, f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，显然 $f'(x)$ 单调递增，且 $f'(0)=0$，所以当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增. ♡

(2)

(分析：分离参数可得($x=0$ 时显然成立,此处略去)$a\geq -\dfrac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$ 对任意的 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立. 即求出 $g(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$ 的最大值.

$$g'(x)=-\frac{x^2(\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}x^2-1)-2x(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1)}{x^4}=\frac{(2-x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^3-x-2}{x^3}.$$

观察到 $x=2$ 时分子为 0，e^x 的前面已经糊着一个 $2-x$ 了，后面的部分只需分解出因式 $(2-x)$ 即可得

$$g'(x)=\frac{(2-x)(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}.$$

可见我们要对两项有公共零点的情况十分敏感，能够快速而准确地发现公因式，不过一个好习惯是秉着“估计零点，因式分解判断导数符号”的思路去做导数题，如果有这样的意识，那么这里的因式分解应该并不是难事.

接下来基本上就豁然开朗了，只需把 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1>0$ 在 $x>0$ 时恒成立这个重要不等式 (Taylor 余项) 证明一遍即可.

因此当 $0<x<2$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $x>2$ 时 $g'(x)<0$，$g'(x)$ 递减.

所以 $g_{\max}(x)=g(2)=\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4}$. 即 $a\in[\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4},+\infty)$.

解. 当 $x=0$ 时，不等式显然成立.

当 $x>0$ 时，等价于

$$a\geq -\frac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}.$$

恒成立.

记 $g(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，所以

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{x^2(\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}x^2-1)-2x(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1)}{x^4}\\&=\frac{(2-x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^3-x-2}{x^3}\\&=\frac{(2-x)(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}.\end{aligned}$$

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，再令 $\varphi'(x)=h(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $h'(x)<0$，$\varphi'(x)$ 递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $h'(x)>0$，$\varphi'(x)$ 递增，所以 $\varphi'(x)\geq\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(x)$ 递增，所以当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$.

所以当 $x\in(0,2)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，当 $x\in(2,+\infty)$ 时 $g'(x)<0$，$g'(x)$ 递减，所以 $g_{\max}(x)=g(2)=\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}$;

即 a 的范围是 $[\frac{7-\mathrm{e}^2}{4},+\infty)$. ♡

例 11.52 (分类讨论，隐零点代换). 已知函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，$g(x)=k(x-1)$.

(1) 证明：对于 $\forall k\in\mathbb{R}$，直线 $y=g(x)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的切线;

(2) 若 $\exists x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$，使得 $f(x)\leq g(x)+\frac{1}{2}$ 能成立，求 k 的取值范围.

(1)

证明. 设切点为 $(x_0,\frac{x_0}{\ln x_0}),(x_0\neq1)$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

所以切线方程为 $y-\frac{x_0}{\ln x_0}=\frac{\ln x_0-1}{\ln x_0}(x-x_0)$.

因为 $y=g(x)$ 过定点 $(1,0)$，因此，若 $y=g(x)$ 是切线，则

$$-\frac{x_0}{\ln x_0}=\frac{\ln x_0-1}{\ln x_0}(1-x_0).$$

整理得

$$\ln x_0+x_0-1=0.$$

显然，当 $x_0\in(0,1)$ 时，$\ln x_0+x_0-1<0$，不符合题意;

当 $x_0\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x_0+x_0-1>0$，不符合题意.

所以 $y=g(x)$ 不是 $y=f(x)$ 的切线. □

评注 11.52.1. 解决这个问题还是按照切线问题的固定流程：设出切点，求出一阶导数，代入相关点再解方程.

(2)

(分析：分离参数得到的函数求最值较麻烦，考虑直接分类讨论.

记 $F(x)=f(x)-g(x)-\frac{1}{2}$，则 $F'(x)=f'(x)-k=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-k=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-k$，问题等价于 $F(x)\leq0$ 能成立，即求 $F(x)$ 的最小值.

因为 $x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$，所以 $\frac{1}{\ln x}=\in[\frac{1}{2},1]$，根据二次函数闭区间最值的结论求出 $f'(x)\in[0,\frac{1}{4}]$，所以确定了讨论标准 $k\geq\frac{1}{4}$，$k\leq0$ 和 $0<k<4$. 下面分别求 k 的范围:

若 $k\geq\frac{1}{4}$，则 $F'(x)\leq0$，$F(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 递减，$F(x)_{\min}=F(\mathrm{e}^2)\leq0$，解得 $k\geq\frac{1}{2}$.

若 $k\leq0$，则 $F'(x)\geq0$，$F(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 递增，所以 $F(x)_{\min}=F(\mathrm{e})\leq0$，此时 k 无解.

若 $0<k<\frac{1}{4}$，则存在隐零点 $x_0\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 使得 $F'(x_0)=0$ 即 $f'(x_0)=\frac{\ln x_0-1}{\ln^2x_0}=k$. 且当 $x\in(\mathrm{e},x_0)$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 递减，当 $x\in(x_0,\mathrm{e}^2)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 递增.

此时 $F(x)_{\min}=F(x_0)$，隐零点代换可证明 $F(x_0)>0$，所以不符合题意.

综上所述，$k\geq\frac{1}{2}$.)

解. 记 $F(x)=f(x)-g(x)-\frac{1}{2}$，则 $F'(x)=f'(x)-k$，则

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}.$$

因为 $x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$，所以 $\frac{1}{\ln x}\in[\frac{1}{2},1]$.

所以 $f'(x)\in[0,\frac{1}{4}]$.

1° 若 $k\geq\frac{1}{4}$，则 $F'(x)\leq 0$，$F(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 递减，所以 $F(x)_{\min}=F(\mathrm{e}^2)$. 题设等价于 $F(x)_{\min}\leq 0$，所以解得 $k\geq\frac{1}{2}$.

2° 若 $k\leq 0$，则 $F'(x)\geq 0$，$F(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 递减，$F(x)_{\min}=F(\mathrm{e})$. 题设等价于 $F(x)_{\min}\leq 0$，所以解得 $k\geq\frac{2\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}-2}$，这与 $k\leq 0$ 矛盾，不符合题意.

3° 若 $k\in(0,\frac{1}{4})$，则 $\exists x_0\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 使 $F'(x_0)=0$ 即 $f'(x_0)=\frac{\ln x_0-1}{\ln^2 x_0}=k$，且当 $x\in(\mathrm{e},x_0)$ 时 $F'(x)>0$，$F(x)$ 递减，当 $x\in(x_0,\mathrm{e}^2)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 递增.

此时 $F(x)_{\min}=F(x_0)$，$F(x_0)=\frac{x_0}{\ln x_0}-k(x_0-1)-\frac{1}{2}=\frac{x_0-1}{\ln^2 x_0}+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2}>\frac{1}{\ln x_0}-\frac{1}{2}>0$, 不符合题意.

综上所述，k 的取值范围是 $[\frac{1}{4},+\infty)$. ♡

例 11.53 (“端点效应” 必要条件，参见例题11.42(1)**).** *若 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln x-a(1-\frac{1}{x})\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.*

(分析：读者可能会尝试用分离参数：当 $x=1$ 时 $a=1$，当 $x\neq 1$ 时 $a\leq\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x}}$，对 x 求导数可知右侧的函数单调递增，但是要说明其没有上界却需要用到极限的概念，作为解答题过程不够合适. 事实上，对于这类问题，我们可以选择一种先用必要条件 “探路”，再论证其充分性的逻辑来书写解答题过程. 设 $f(x)=\ln x-a(1-\frac{1}{x})$，则 $f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}.$$

由此可知题设成立的一个必要条件是 $f'(1)\geq 0$ 恒成立，即 $a\leq=1$.(当 $a>1$ 时 $f(x)\geq 0$ 不恒成立. 实际上若 $a>1$，则 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增. 所以当 $x\in(1,a)$ 时 $f(x)<f(1)=0$，即 $f(x)\geq 0$ 不恒成立).

下面我们要论证其充分性，事实上，当 $a\leq 1$ 时，$f(x)\geq f(1)=0$ 恒成立了，这就验证了充分性.

像这类将端点处的导数的符号作为必要条件，再论证其充分性的处理思路通常称为端点效应.)

解. 记 $f(x)=\ln x-a(1-\frac{1}{x})$，则 $f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}.$$

当 $a\leq 1$ 时 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递增，所以 $f(x)\geq f(1)=0$ 恒成立.

当 $a>1$ 时，因为当 $x\in(1,a)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，所以 $f(x)<f(1)=0$，$f(x)\geq 0$ 不恒成立.

综上所述 $a\leq 1$. ♡

评注 11.53.1. 我们对端点效应在形式上作一个一般性的讨论（以下 $f(x,a)$ 表示以 x 为自变量的含参函数，a 为参数.)：

$\star$ 当 $x\geq x_0$ 时，$f(x,a)\geq f(x_0,a)$ 恒成立，先找到必要条件：$f'(x_0,a)\geq 0$，解得 $a\in A$.

(i) 当 $a\in A$ 时，通常能证明 $f(x,a)$ 递增，所以 $f'(x,a)\geq f(x_0,a)$.

(ii) 当 $a\notin A$，分为两种情况：

1° 对 $\forall x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x,a)\leq 0$，那么 $f(x,a)$ 递减，此时对于 $\forall x\in(x_0,+\infty)$，$f(x,a)<f(x_0,a)$，不成立.

2° $\exists x_1\in(x_0,+\infty)$ 使得 $f'(x_1)>0$，根据零点存在性定理可知存在 $x_2\in(x_0,x_1)$ 使得 $f'(x_2)=0$，且当 $x\in(x_0,x_2)$ 时 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (x_0,x_2) 上递减，所以当 $x\in(x_0,x_2)$ 时 $f(x,a)<f(x_0,a)$，不成立.

综上所述，$a\in A$.

以上关于必要性的讨论只用到了零点存在定理，因此只要函数连续都适用，而与函数的具体表达式无关，是一个程式化的说明过程（类似于例题*11.29*中关于极值充分条件的说明）.

最后指出使用端点效应的前提是选对“端点”和能够验证充分性（即完成 i 的过程），如果不能做到这两点，应选择其他方法.

例 11.54 (“端点效应”必要条件). 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x$，$g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x$.
(1) 证明：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geq 0$;
(2) 若 $g(x)\geq 2+ax$ 恒成立，求 a 的值.

(1) 解. $f(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x=\mathrm{e}^x-\sqrt{2}\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{4}\Big)$.
当 $x\in(-\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$f(x)>\mathrm{e}^x>0$，显然成立.
当 $x>-\dfrac{\pi}{4}$ 时，因为

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x+\sin x=\mathrm{e}^x+\sqrt{2}\sin\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big).$$

注意到，$f'(0)=0$，所以当 $x\in(-\dfrac{\pi}{4},0)$ 时 $f'(x)<-1+\mathrm{e}^x<-1+\mathrm{e}^0=0$，当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时 $f'(x)\geq\mathrm{e}^x-1\geq\mathrm{e}^0-1=0$.

当 $x\in(\dfrac{\pi}{4},+\infty)$ 时，

$$f'(x)>\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}>\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt{2}>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{4},0)$ 递减，在 $(0,+\infty)$ 递增，所以 $f(x)\geq f(0)=0$. ♡

(2)

> (分析：这个必要性探路问题与上一个只考虑“端点”一侧的问题不同，这个问题并没有明显地给出“端点”. 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax$，注意到 $\varphi(0)=0$，考虑利用 0 处的导数值来寻找必要条件. 令 $\varphi'(0)=0$ 解得 $a=2$. 选取 $a=2$ 为必要条件.

当 $a>2$ 时，$\varphi'(0)<0$，根据连续性此时在 0 附近有一个小区间上的导数值为负，也就是说存在一个小区间 $(0,\varepsilon)$ 使 $f(x)$ 递减，在这个小区间上 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，不恒成立 (连续性的问题可以用程式化过程说明，下同).

当 $a<2$ 时，$\varphi'(0)>0$，根据连续性此时在 0 附近有一个小区间上的导数值为正，因此存在小区间 $(-\varepsilon,0)$ 使 $f(x)$ 递增，在这个小区间上 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，不恒成立.

因此 a 只能取 2，以下只需证明充分性即可.

事实上 φ 的二阶导数 φ'' 恰好是第一问中研究的 $f(x)$，因此实际上第一问已经为我们搞定 $(-\dfrac{5\pi}{4},+\infty)$ 上的充分性验证做下了铺垫. 所以只要证一下当 $x\in(-\infty,-\dfrac{5\pi}{4}]$ 时 $\varphi(x)>0$ 即可.

这个问题还有一个不借助端点效应的几何理解方法，设 $g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x$，将问题转化为 $g(x)\geq ax+2$ 恒成立. 根据 (1) 的结果注意到 $g(x)$ 在 $[-\dfrac{5\pi}{4},+\infty)$ 上二阶导为正，$g(x)$ 下凸，所以只有当 $ax+2$ 是 $g(x)$ 在 0 处的切线时才能保证 $g(x)\geq ax+2$ 恒成立，这样也能计算出 $a=2$.

总之，不管是采用哪种理解方案，我们的逻辑都是先找必要条件，再验证充分性. 所幸这里我们并不需要担心充分性不成立，否则题目就没有答案了.)

解. 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax$.

当 $a>2$ 时，$\varphi'(0)<0$，分为两种情况：

(i) 若对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$，不符合题意.

(ii) 若存在 $x_1>0$ 使得 $\varphi'(x_1)>0$，则 $\exists\varepsilon>0$ 使 $\varphi'(\varepsilon)=0$，且对 $\forall x\in(0,\varepsilon)$，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 递减，$\varphi(x)<\varphi(0)=0$，也不符合题意.

同理可以说明 $a<2$ 也不符合题意. 下面证明 $a=2$ 时符合题意，即 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-2x\geq 0$ 恒成立.

$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-2$，记 $\varphi'(x)=p(x)$，则

$$p'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x-\sin x.$$

根据 (1) 可知当 $x\in(-\dfrac{5\pi}{4},+\infty)$ 时，$p'(x)\geq 0$，$\varphi'(x)$ 递增，又因为 $\varphi'(0)=0$，所以当 $x\in(-\dfrac{5\pi}{4},0)$ 时 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增，所以 $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$.

当 $x\in(-\infty,-\dfrac{5\pi}{4}]$ 时，注意到

$$\varphi(x)\geq\sin x+\cos x-2-2x\geq-\sqrt{2}-2+2\times\frac{5\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}-2-\sqrt{2}>0.$$

因此 $a=2$ 满足要求，综上所述 $a=2$. ♡

11.4.4 多变量问题

例 11.55 (对数平均值不等式). (1) 证明：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}(a,b\in\mathbb{R}^+,a\neq b)$;
(2) 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的图像与 $g(x)=kx$ 的图像交于不同的两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，设线段 AB 的中点为 (x_0,y_0)，证明：$f(x_0)<g(1)<y_0$.

(1)

证明. 在开始本节的正式内容之前我们先来证明这个非常重要且形式优美的不等式，它和以下内容的关系实在是太密切了.

我们熟知的均值不等式链 (调和-几何-算数-幂均值) 中现在可以添加一环——对数，对数平均值位于几何平均值和算术平均值之间. 下面我们来证明这个不等式：

不妨设 $a>b$，令 $\dfrac{a}{b}=t>1$，则等价于证明

$$\sqrt{t}<\frac{t-1}{\ln t}<\frac{1}{2}(t+1).$$

先证明左边，构造函数 $f(t)=\ln t-\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，则

$$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{2t\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{t}-t-1}{2t\sqrt{t}}=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}.$$

当 $t>1$ 时，$f'(t)<0$，所以 $f(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 递减，所以 $f(t)<f(1)=0$，即 $\ln t-\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}<0$，即 $\sqrt{t}<\dfrac{t-1}{\ln t}$.

再证明右边，构造函数 $g(t)=\ln t-2\dfrac{t-1}{t+1}$，则

$$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)^2-4t}{t(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$$

当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，所以 $g(t)>g(1)=0$，即 $\ln t-2\dfrac{t-1}{t+1}>0$，即 $\dfrac{t-1}{\ln t}<\dfrac{1}{2}(t+1)$. □

(2)

证明. 等价于证明

$$\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}.$$

不妨设 $x_1>x_2$，令 $t=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{\mathrm{e}^{x_2}}$，则等价于证明

$$\sqrt{t}<\frac{t-1}{\ln t}<\frac{1}{2}(t+1).$$

后续证明过程与 (1) 完全相同. 事实上在对数均值不等式中令 $a=\mathrm{e}^{x_1}$，$b=\mathrm{e}^{x_2}$ 即可得

$$\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}<\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}.$$

□

很多考题中需要证明的结论实际上都是对对数均值不等式进行赋值得到的结果，因此熟悉对数均值不等式的形式对解题是有益的.

事实上对数均值不等式的证明就是一个多变量问题，我们的处理思路是引入变量代换 $t=\dfrac{a}{b}$，即将商变量作为主元，从而将两个变量的问题转化为只涉及到商变量的问题，这种处理思路在例题11.38时也曾用到.

处理多变量问题还有许多其他技巧，我们借助几个典型问题向读者一一介绍这些方法.

例 11.56 (极值点偏移, 构造对称函数). 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-mx$ 的两个零点 x_1,x_2, 证明 $x_1+x_2>2$.

⋆ **思考题** 已知函数 $f(x)=\dfrac{mx-1}{x}-\ln x$ 的两个零点 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$, 证明 $x_1+x_2>2$.

在解答这个问题之前，先介绍极值点偏移的概念：对于可导函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有且仅有一个极大值点 x_0（极小值偏移的情况类似），设方程 $f(x)=0$ 的解分别为 x_1,x_2，不妨 $a<x_1<x_2<b$.

(1) 若 $0=f(x_1)<f(2x_0-x_2)$，则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0$，即函数 $y=f(x)$ 的极大值点 x_0“右偏”，如图11.27所示.

(2) 若 $0=f(x_1)>f(2x_0-x_2)$，则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0$，即函数 $y=f(x)$ 的极大值点 x_0“左偏”，如图11.28所示.

这个事实在直观上很容易接受，证明也很轻松，只需利用 $f(x)$ 在区间 (a,x_0) 或 (x_0,b) 上的单调性即可证明该结论，留给读者自己完成.

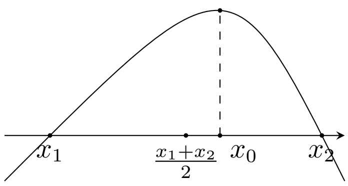


图 11.27: $0=f(x_1)<f(2x_0-x_2)$

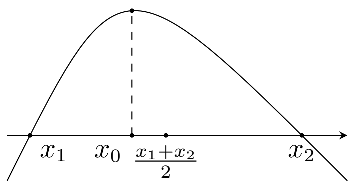


图 11.28: $0=f(x_1)>f(2x_0-x_2)$

根据以上讨论, 在形如 “x_1,x_2 满足某些条件, 证明 $x_1+x_2>(<)2x_0$” 的多变量问题中, 可以考虑构造一个以 x_1,x_2 为零点, 以 x_0 为极值点的函数 $f(x)$, 然后构造对称函数 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$, 通过确定函数 $F(x)$ 的单调性并结合 $F(x_0)=0$ 判断出 $F(x_1)$ 的符号, 这就确定 $f(x_1)$ 和 $f(2x_0-x_2)$ 的大小关系，从而证明结论.

(分析：在这个问题中，应考虑构造一个以 1 为极值点的函数，而题给函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=\mathrm{e}^x-m$，所以其极值点是一个随参数 m 变化的点，显然不符合构造对称函数的要求，需另寻其他函数.

由于要求极值点是一个定点 1, 因此我们需要寻找的那个函数的一阶导数应该不包含参数 m, 所以我们应该主动将参数 m 分出来. 由 $\mathrm{e}^x-mx=0$, 将参数 m 分出来，得到 $m=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. 注意到函数 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 的极值点恰好是 1（参见11.3.2节），令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{m}$，则 $g(x)$ 以 1 为极值点，以 x_1,x_2 为零点，恰好就是我们要找的函数.)

证明. $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，等价于方程 $\mathrm{e}^x-mx=0$ 有两个根 x_1,x_2.

当 $x=0$ 时 $f(x)=1-m$，又因为 $m\neq1$，所以 0 不是 $f(x)$ 的零点，因此方程 $\mathrm{e}^x-mx=0$ 有两个根 x_1,x_2 等价于 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=m$ 有两个根 x_1,x_2.

又因为 $m\neq0$，所以进一步等价于 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{m}=0$ 有两个根 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{m}$，则 $g(x_1)=g(x_2)=0$.

因为 $g'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，所以 $x_1<1<x_2$.

构造函数 $G(x)=g(x)-g(2-x)$，则 $G(1)=0$.

所以 $G'(x)=g'(x)+g'(2-x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{2-x}}=(x-1)\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{2+x}}\geq 0$.

所以 $G(x)$ 单调递增，所以 $G(x_1)<G(1)=0$，即 $g(x_1)<g(2-x_1)$，也即 $g(x_2)<g(2-x_1)$，又因为 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递减，所以 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$，证毕. □

评注 11.56.1. 这里我们并不需要写出写出 $G(x)$ 的具体表达式，这么做反而会使求导变得更麻烦. 合适的做法是直接利用复合函数的求导法则，再代入已求出的 $g'(x)$ 的表达式.

另解 (商变量换元) 由 $\mathrm{e}^{x_1}=mx_1$，$\mathrm{e}^{x_2}=mx_2$ 可得

$$m=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}.$$

代入 $x_1+x_2=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{m}+\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{m}$ 消去 m 得

$$x_1+x_2=\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}}.$$

所以 $x_1+x_2>2$ 等价于

$$\frac{\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}}{2}>\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}{x_1-x_2}.$$

不妨设 $x_1>x_2$，令 $t=\dfrac{\mathrm{e}_1^x}{\mathrm{e}_2^x}>1$，则进一步等价于证明

$$\frac{t-1}{\ln t}<\frac{1}{2}(t+1).$$

后续证明过程与例题11.55完全相同，事实上这个问题等价于证明对数均值不等式.

⋆ **思考题提示** 函数 $f(x)=m-\dfrac{1}{x}-\ln x$ 恰好以 1 为极值点，构造对称函数 $F(x)=f(x)-f(2-x)$ 并证明 $F(x)$ 递增，进而证明 $x_2<2-x_1$.

例 11.57 (商变量换元). 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a,b 是两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

(1) 容易说明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，过程留给读者.

(2)

证明. 不妨设 $b>a>0$，令 $t=\dfrac{b}{a}>1$，则 $ta\ln a-a\ln(at)=a-ta$，即 $t\ln a-\ln(at)=1-t$，即

$$\ln a=\frac{\ln t}{t-1}-1.$$

要证 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}(1+\dfrac{1}{t})>2$，即证明 $a<\dfrac{t+1}{2t}$，即证明 $\ln a<\ln(t+1)-\ln 2-\ln t$，代入消去 a 得

$$\frac{\ln t}{t-1}-1<\ln(t+1)-\ln 2-\ln t.$$

则需证明

$$(t-1)\ln(t+1)-t\ln t+(1-\ln 2)(t-1)>0.$$

令 $h(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t+(1-\ln 2)(t-1)$.

则 $h'(t)=\ln(t+1)-\dfrac{2}{t+1}-\ln t+1-\ln 2$.

令 $\varphi(t)=h'(t)$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{t-1}{t(t+1)^2}$，当 $t>1$ 时 $\varphi'(t)>0$，所以 $h'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，$h'(t)>h'(1)=0$，所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，所以 $h(t)>h(1)=0$，由上可知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>2$.

要证明 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{at}<\mathrm{e}$，则证 $a>\dfrac{t+1}{\mathrm{e}t}$，即 $\ln a>\ln(t+1)-1-\ln t$，代入消去 a 得

$$\frac{\ln t}{t-1}-1>\ln(t+1)-1-\ln t.$$

则需证明 $\dfrac{\ln t}{t-1}>\dfrac{\ln(t+1)}{t}$.

令 $u(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，则 $u'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(x-1)^2}<0$.

所以 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递减，而 $t+1>t>1$，所以 $u(t)>u(t+1)$，所以 $\dfrac{\ln t}{t-1}>\dfrac{\ln(t+1)}{t}$ 成立，由上可知 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

综上可知，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$. □

评注 11.57.1. 这个问题也可以令 $x_1=\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{1}{b}$，通过构造对称函数，利用“极值点偏移”来证明不等式左侧，然而在涉及两个变量的情况下证明不等式右侧则显得不够自然. 因此整体把握来看利用商变量换元似乎较好，毕竟只涉及一个变量的不等式证明问题我们处理起来更加得心应手.

例 11.58 (**主元法**)**.** 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x$，其中 $a\in\mathbb{R}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上递增，求实数 a 的范围；

(2) 设正实数 m_1,m_2 满足 $m_1+m_2=1$，当 $a>0$ 时，证明：对任意两个正实数 x_1,x_2，总有 $f(m_1x_1+m_2x_2)\le m_1f(x_1)+m_2f(x_2)$ 成立；

(3) 当 $a=2$ 时，若正实数 x_1,x_2,x_3 满足 $x_1+x_2+x_3=3$，求 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的最小值.

⋆ **思考题**　用主元法证明对数均值不等式.

(1)$a\le\dfrac{1}{4}$，过程留给读者.

(2)

> (分析：这个问题的背景显然就是琴生不等式，因为 $f(x)$ 是一个下凸函数，所以不等式成立. 这里我们选择用主元法来证明这个结论，所谓主元法，就是在一个多变量问题中将其他变量固定，选择其中一个变量作为主元研究问题.)

证明. 不妨设 $x_1\le x_2$.

构造函数 $F(x)=f(m_1x+m_2x_2)-m_1f(x)-m_2f(x_2)(0<x\le x_2)$，则 $F(x_2)=0$，且

$$F'(x)=m_1f'(m_1x+m_2x_2)-m_1f'(x)=m_1[f'(m_1x+m_2x_2)-f'(x)].$$

又因为 $f'(x)=x-\frac{a}{x}$ 递减，且 $x=m_1x+m_2x\le m_1x+m_2x_2$，所以 $f'(m_1x+m_2x_2)\le f'(x)$，所以 $F'(x)\le 0$，$F(x)$ 递减.

所以 $F(x_1)\le F(x_2)=0$. 这就证明了 $f(m_1x+m_2x_2)-m_1f(x)-m_2f(x_2)\le 0$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时取得等号.

(3) 利用 (2) 的结果：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}f(x_1)+\frac{1}{3}f(x_2)+\frac{1}{3}f(x_3)\\=&\frac{2}{3}[\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)]+\frac{1}{3}f(x_3)\\\ge&\frac{2}{3}f(\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{3}f(x_3)\\\ge&f(\frac{2}{3}\times\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{3}x_3)\\=&f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\\=&f(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_3$ 即 $x_1=x_2=x_3=1$ 时取得等号.

所以 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的最小值是 $\frac{3}{2}$.

这也正说明了琴生不等式可以推广到 n 元的情况. □

习题 11.4

1. 设 $f(x)=x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}$. 证明：对任意的 $x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$，有 $\frac{\sqrt{2}}{2}<f(f(x))<x$.

2. 已知 $f(x)=e^x$.

   (2) 求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>4\ln x+8-8\ln 2$.

3. 设函数 $f_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$.

   (1) 求证：当 $x\in(0,+\infty),n\in\mathbb{N}^*$ 时，$e^x>f_n(x)$；

4. 已知函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=-x^2+ax-3$，$a\in\mathbb{R}$.

   (2) 证明：对任意 $x\in(0,+\infty)$，有 $\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}$.

5. 已知不等式 $\ln(x+1)\le x$ 对一切 $x\in(-1,+\infty)$ 均成立. 证明：不等式 $(x-1)(e^{-x}-x)+2\ln x<\frac{1}{2}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立.

6. 已知 $f(x)=x\ln x-ax^2$，$a\in\mathbb{R}$.

   (1) 证明：当 $1<x<3$ 时，$\frac{f(x)+ax^2-x+2}{(3-x)e^x}>\frac{1}{e^2}$；

   (2) 设函数 $F(x)=|f(x)|(x\in[1,e])$ 有极小值，求 a 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\frac{ax}{x+1}(a\in\mathbb{R})$.

(3) 求证：$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

8. 设 $f(x) = e^x - ax - a$.（e 是自然对数的底数）

(2) 求证：$(\dfrac{2015}{2016})^{1008} < e^{-\frac{1}{2}}$.

9. 设函数 $f(x) = px - \dfrac{p}{x} - 2\ln x$

(3) 求证：对任意的正整数 n ，都有 $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2(1+\dfrac{2}{k}) < 3$ 成立.

10. 已知 $f(x) = a\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1} + 3x - 1$.

(2) 求证：$\dfrac{2}{4\times 1^2-1} + \dfrac{3}{4\times 2^2-1} + \dfrac{4}{4\times 3^2-1} + \cdots + \dfrac{n+1}{4\times n^2-1} > \dfrac{1}{4}\ln(2n+1)$ 对一切正整数 n 均成立.

11. 设函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$.

(1) 证明：当 $x > 0$ 时，$f(x) > \dfrac{x}{x+1}$；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \dfrac{1}{3}$，$a_n e^{-a_{n+1}} = f(a_n)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 递减且 $a_n < \dfrac{1}{2^n}$.

12. 已知函数 $f(x) = |\sin x|, x \in \mathbb{R}$

(1) 证明：$\sin 1 \leq f(x) + f(x+1) \leq 2\cos\dfrac{1}{2}$；

(2) 证明：对任意正整数 n, 有 $\dfrac{f(n)}{n} + \dfrac{f(n+1)}{n+1} + \cdots + \dfrac{f(3n-1)}{3n-1} > \dfrac{\sin 1}{2}$.

13. 已知函数 $f(x) = x\ln x - \dfrac{1}{2}mx^2 - x$.

(1) 当 $m = -2$ 时，求函数 $f(x)$ 的所有零点；

14. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c(a, b, c \in \mathbb{R})$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, 1)$ 上单调递增，且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有三个零点，1 是其中的一个零点。

(1) 求 $f(2)$ 的取值范围；

(2) 试讨论直线 $l: y = x - 1$ 与曲线 $C: y = f(x)$ 的公共点的个数.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 + (a-2)x + a, g(x) = |x - a|$，其中 $a > 0$.

(1) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$，判断函数 $h(x)$ 的单调性；

(2) 如果函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图象恰有三个交点，求 a 的取值范围.

16. 已知函数 $y = f(x)$, 点 A、B、$C \in$ 直线 l, 且 $\overrightarrow{OA} + (y - ax^2e^x - 1)\overrightarrow{OB} - [(x-1)e^x + f'(0)]\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$，其中 e 是自然对数的底数，$O \notin l$，$a \in \mathbb{R}$.

(2) 若 $a = -1$，函数 $f(x)$ 的图像与函数 $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + m$ 的图像有 3 个不同的交点，求实数 m 的取值范围.

17. 已知 $a>0$，$f(x)=\ln(2x+1)+2ax-4ae^x+4$ 。

    (2) 判断函数 $f(x)$ 零点的个数，并说明理由。

18. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-\ln x$.

    (2) 若对任意 $k\in(-\infty,1)$，直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=f(x)$ 都有唯一公共点，求实数 b 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=x-\ln x-2$，$g(x)=x\ln x+x$.

    (1) 证明:$f(x)$ 存在一个零点属于区间 $(3,4)$；

    (2) 若 $k\in\mathbb{Z}$，且 $g(x)>k(x-1)$ 对任意的 $x>1$ 恒成立，求 k 的最大值.

20. 已知 $f(x)=\ln(ax+b)+x^2(a\neq 0)$。

    (1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x$，求 a,b 的值；

    (2) 若 $f(x)\leq x^2+x$ 恒成立，求 ab 的最大值。

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x},g(x)=k(x-1),k\in\mathbb{R}$.

    (2) 若存在 $x\in[e,e^2]$，使得 $f(x)\leq g(x)+\dfrac{1}{2}$，求 k 的取值范围.

22. 设 $f(x)=A(x^2-2x)e^x-e^x+1$ ，若对任意的 $x\leq 0$，有 $f(x)\geq 0$ 成立，求实数 A 的取值范围.

23. 已知 $f(x)=e^x-mx$.

    (1) 若 $x>0$ 时，不等式 $(x-2)f(x)+mx^2+2>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

24. 已知 $f(x)=e^x$.

    (1) 当 $x\geq 0$ 时，不等式 $(x-1)f(x)\geq mx^2-1$ 恒成立，求 m 的取值范围；

25. 已知 $f(x)=a\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+3x-1$.

    (1) 若 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

26. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)$，$g(x)=e^x$.

    (1) 经过原点分别作曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的切线 l_1 和 l_2. 已知两切线的斜率互为倒数，求证：$\dfrac{e-1}{e}<a<\dfrac{e^2-1}{e}$；

    (2) 设 $h(x)=f(x+1)+g(x)$，当 $x\geq 0$ 时，$h(x)\geq 1$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

27. 设 $0<a<b$，证明：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

28. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}$.

    (2) 设 $m>n>0$，求证：$\ln m-\ln n>\dfrac{2(m-n)}{m+n}$.

29. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, g(x)=e^x$.

(2) 设 $x_1>x_2>0$，试证：$[x_1f(x_1)-x_2f(x_2)](x_1^2+x_2^2)>2x_2(x_1-x_2)$.

30. 已知函数 $f(x)=ax-1-\ln x,(a\in\mathbb{R})$.

(3) 当 $x>y>e-1$，证明：$e^{x-y}>\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(y+1)}$.

31. 设函数 $f_n(x)=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n$.

(2) 设 $x>0,n\in\mathbb{N}^*$ ，若存在 $y\in\mathbb{R}$ 使得 $e^x=f_n(x)+\dfrac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^y$，求证：$0<y<x$.

32. 设实数 a、b、λ 满足 $0<a<b$，$0\le\lambda\le1$.

(1) 证明：$\ln a+1\le\dfrac{a\ln a-b\ln b}{a-b}\le\ln b+1$;

(2) 证明：$[\lambda a+(1-\lambda)b]\ln[\lambda a+(1-\lambda)b]\le\lambda a\ln a+(1-\lambda)b\ln b$.

33. 已知函数 $f(x)=(\dfrac{1}{3})^x-(\dfrac{1}{5})^x$. 对任意 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，求证：

(1) $f(x_1)>f(x_2)$;

(2) $f(\sqrt{x_1x_2})>\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

34. 已知 $a,b\in\mathbb{R}^+$ 且 $a\ne b$.

(1) 求证：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$;

(2) 如果 a,b 是 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2017}x$ 的两个零点，求证：$ab>e^2$.

35. 已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}mx^2-x$.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1x_2>e^2$ 。

36. 已知 $f(x)=e^x-mx$.

(2) 若 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，求证：$x_1+x_2>2$.

37. 已知函数 $f(x)=\dfrac{mx-n}{x}-\ln x,m,n\in\mathbb{R}$.

(3) 若 $n=1$ 时，函数 $f(x)$ 恰有两个零点 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$，求证：$x_1+x_2>2$.

38. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-a\ln x(a\in\mathbb{R},a>0)$.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 和 x_2，记过点 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率为 k，问：是否存在 a，使得 $k=2-a$? 若存在求出 a 的值，若不存在，请说明理由.

第十二章　统计与概率

我再说一遍，统计不是数学.

——GL

12.1 统计

统计是一门实用性的科学, 是指研究**获取数据**, **整理数据**, **分析数据**, 并**对制定决策提供依据**的学科. 对于任意一个统计案例, 你总能把它切分成这四个步骤. 反过来, 在设计一个统计过程时, 我们也应该从这四个步骤入手, 分别采取合适的方法以得到我们想要的结果.

12.1.1　收集数据：普查与抽样

当我们对某一实际现象或问题进行统计意义的分析时, 首先要获得数据以供分析. 面对实际中如天气变化、人口分布等纷繁复杂的数据, 采取有效途径合理地收集它们是重要的一环, 甚至直接决定统计实验的成功与否.

理论上说, 最具有普遍性、最符合实际的数据是**普查**得到的. 普查就是全面调查, 通过普查我们可以得到*更加完整的数据*. 比如收集全班同学的考试成绩进行评估；收集全国人口数据进行决策, 都可归为普查的范畴.

在调查范围比较小的时候, 普查的优点不言而喻；但是在调查范围比较大的时候, 普查的弊端也显现出来：其一, 普查需要耗费大量的人力物力；其次, 普查的时间成本很高, 这使得统计数据的得出有延迟性, 不能很好地指导实践. 另外, 在像调查弹药的击发性这样*对试验品本身有损害*的统计实验中, 普查也是不可接受的. 因此, 可以从调查对象**总体**中抽取一部分**样本**进行调查. 这种方法也就是**抽样调查**. 它的及时性、经济性是普查无法比拟的. 由于实际被调查的样本数少了, 因此通过对它们更细致的分析, 可能能获取到更科学、可靠的数据.

每一个样本被抽到的概率相同的抽样叫随机抽样. 在普查不可行时, 随机性是数据可靠的有力保障. 但是由于随机性会受各种主观因素影响, 绝对的随机是基本不存在的, 所以人们常寻找一些方法来尽量避免主观因素的影响, 以期得到理想的统计结果. 也由此诞生了各种各样的抽样方法. 方法各有优劣, 但目的都是获取更贴合总体的样本, 需要在实际情况中加以选择. 高中阶段常用的方法有三个：**简单随机抽样、分层抽样、系统抽样**.

简单随机抽样有诸多方法, 传统的方法有如摸球、抽签、转盘等利用实物来产生样本, 这是简单易操作的——仅仅在样本不太多的时候如此. 我们并不希望在抽样调查全校同学的身高分布情况时制作一个有上千个分区的大转盘. 更好的方法是让这种取随机的工作摆脱实物的限制. 由此人们发明了随机数表. 它可以看成是很多次"在 0 9 中随机抽取一个数"的实验过程的记录.

表 12.1: **随机数表 1(部分)**

78	16	65	72	08	02	63	14	07	02	43	69	97	28	01	98
32	04	92	43	49	35	82	00	36	23	48	69	69	38	74	81
29	76	34	13	28	41	42	41	24	24	19	85	93	13	23	22
83	03	98	22	58	88	24	10	11	58	27	29	64	43	29	43

表 12.2: **随机数表 2(部分)**

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9243	4935	8200	3623	4869	6938	7481
2976	3413	2841	4241	2424	1985	9313	2322
8303	9822	5888	2410	1158	2729	6443	2943

上面两个随机数表采用了不同的分组方式, 形式上不尽相同. 但是实际上随机数表的构成与读法都和分列的形式完全无关. 在读随机数表的时候永远是以单个的数字为单位. 比如在上面的表中, 第二行第六列的数都是 2, 不是 35, 也不是 4869.

如何才能用随机数表选出我们需要的样本呢?

首先, 我们要为所有的样本编位数相同的号. 例如一个共 800 份样本的总体, 编号就应从 000 到 799 而非 0 到 799. 这样做是为了取数的进行.

其次, 我们在表中随便选定一个起始位置, 然后读出第一个数. 如在上面 $0-799$ 的例子中, 在上面的表里从 2 行 21 列开始读数, 第一个数是 486. 这里读的数位要与编号的数位一致.

然后, 我们接着上面的读数继续往下读, 跳过数据范围外的和重复的, 直到取够样本容量为止. 仍在刚才的例子中, 下一个数是 969, 排除. 然后是 $387, 481, 297, \cdots$ 直到截止.

由于随机数表中的数是随机产生的, 所以上述模拟的效果是很好的. 必须提到的是, 计算器的 $Rand\#$ 功能也可以产生"随机数". 这种随机数其实是伪随机数, 是由一定算法生成的周期为无穷大的数, 与上面的随机数表有区别. 但是实际应用中, 这种产生伪随机数的效果很好, 我们一般也把它作为真正的随机数来使用.

尽管随机数表法可以克服简单随机抽样的一些问题, 但是它的局限性是"与生俱来"的. 任何一种简单随机抽样的方式都要进行很多次重复的样本获取流程, 仍显繁杂; 而且有时我们在要求样本的随机性的时候也希望它能符合某些特点. 比如: 调查某高中一到三年级身高情况, 如果一到三年级人数有差异, 简单随机并不能在样本中体现这种分级情况. 针对上面两个缺点, 人们设计了其它的抽样方法.

分层抽样能体现数据的"层级"区别. 以上面的身高调查为例. 假设该高中一共 1000 人: 高一

400 人, 高二 300 人, 高三 300 人, 我们想通过抽查 20 个人的身高了解该高中学生的身高情况. 为了让样本情况能更好模拟总体情况, 我们自然应该让样本中各“层”的占比和总体各“层”占比相同. 所以我们有公式:

$$n_i = \frac{N_i}{N} n$$

其中 n_i 指某层应抽出的样本数, N_i 表示该层在总体中占比, N 表示总体数, n 表示样本容量. 利用这个公式, 我们可以知道上面的问题中应该在高一抽 8 人, 高二和高三各抽 6 人. 正常题目中遇到的数基本都能整除, 不能整除的则要进行一定的近似处理. 在这个近似处理过程中不要死守着四舍五入, 要按照实际情况处理.

系统抽样可以解决样本容量很大时获取样本流程重复的问题. 我们接着上面的问题讨论. 现在需要从高一的 400 人中抽取 8 个样本, 尽管此时简单随机抽样的随机数表已经足以完成任务, 但是系统抽样更快. 我们首先将 400 人等分成 8 组, 每组 50 人. 每一组内都分别编号为 $1-50$. 要在每一组中抽一个人, 只需先在第一组中抽取一个人 (设其编号为 x), 再用一种系统性的规律直接生成后面每组中抽取出的编号, 比如在后面每一组中都拿 x 号, 这样我们就抽取出 8 个样本来代表整体. 或者在接下来的 7 组中分别取编号为 $x+1$, $x+2$ 等等人, 也能达到目的. 系统抽样的规则是可以自己设计的. 用系统抽样, 我们只需在一个很小的范围内取样, 然后扩展到全体中即可.

这就是三种抽样方式的主要流程. 还有两点需要注意:

第一, 区分分层抽样中的*分层*和系统抽样中的*分组*. 分层的层与层之间有着明显的差异, 是为了数据能体现不同层的情况而采用的, 是年级与年级的关系; 分组的组与组之间不存在差异, 是为了系统地一次性产生多个样本采用的, 是班级与班级的关系. 二者不可混淆.

第二, 简单随机抽样、分层抽样、系统抽样之间并不矛盾. 并没有用某一种方式就不能用其他方式的限定. 相反我们常常多种方式并用. 比如上面的身高调查, 我们先对数据分层, 再对每层分组, 最后还是用简单随机抽样抽出一个样本. 三种方式先后出现, 最终的目的是让样本具有代表性. 为了这个目标, 我们也可以设计其他各种各样的抽样方式.

12.1.2 整理数据：统计图表

在选择好合适的样本并得到所需要的统计数据后, 就应该将数据进行分类整理, 得到图标以进行分析. 高中阶段我们接触最多的统计图表是茎叶图和频数分布直方图.

假设现在我们对某长度量进行了抽样统计调查, 得到了以下 50 个数据:

表 12.3: **数据表**

18	13	13	19	18	12	22	25	28	28	28	27	23
23	23	35	34	38	39	37	38	31	32	33	31	33
32	39	37	36	43	44	41	43	41	49	48	45	46
44	44	53	54	52	52	51	58	62	60	66		

这种表不好看, 我们可以采用以下方式整理:

表 12.4: **茎叶图表**

1	8 3 3 9 8 2
2	2 5 8 8 8 7 3 3 3
3	5 4 8 9 7 8 1 2 3 1 3 2 9 7 6
4	3 4 1 3 1 9 8 5 6 4 4
5	3 4 2 2 1 8
6	2 1 6

即: 将十位数字相同的数放到同一行中, 每一行第一格写下这个十位数字并用竖线和后面的数字分隔开, 后面只记最后一位不同的数字就可以了. 这样可以直接展现出数据的分布情况. 如果想在这个表中添加新数据也是很方便的. 比如想添加新数据 66, 则只需在最后一行再补添一个 6 就可以了. 像这样的图叫做**茎叶图**. 它方便与添加或者删除数据, 观察数据整体分布, 简洁精悍.

需要注意的有两点: 首先是茎叶图既可以往右写也可以往左写, 可以同时记录两组数据进行比较; 第二点是在记录的时候要求数据位数相同. 比如上表中如果要记录新数据 7, 则应该将 7 写成 07, 在最上面再添加一行以 0 开头的数据, 把 7 记录在后面. 如果要记录三位数 112 的话, 那应该将其拆分成 11|2, 而不是 1|12. 这是因为茎叶图要求每一个" 叶" 只包含一个数码.

茎叶图是在*不损失原始数据*的情况下的最佳选择. 但是分析数据并不需要原始数据的参与. 很多时候我们只想要一个大概的分布情况而对具体的繁杂的数据并不关心. 所以一定程度的数据流失是可以接受的. 我们采用频率分布直方图.

先对数据进行从 10 开始以 10 为组距的分组. 因为原数据中没有以 0 结尾的数据所以端点无所谓开闭性. 分出来 $I_1 = [10, 20]$ 到 $I_6 = [60, 70]$ 这 6 个区间. 对每个 k, 在坐标纸上画出长为区间 I_k, 高度为 $\dfrac{\text{区间}I_k\text{中数据的个数}}{\text{数据总数} \times \text{组距}}$ 的长方形. 这个长方形的面积就代表在该区间上数据的**分布频率**. 对于上面的数据, 图像如下.

所有矩形的面积之和为 1. 实际上在这个图中不一定需要每个区间的宽度相等. 这是频率分布直方图相对于频率分布图最大的优点.

可以看出频率分布直方图和茎叶图都能反映出数据整体的分布情况.

12.1.3 分析数据：样本的数据特征

图表是我们处理数据并进行初步分析的手段. 更多的时候我们只能从中直接读取到某些定性的内容. 比如从上节的图表中只能读出数据的分布呈现中间多两边少的特点. 更多的细节无法把握. 我们需要构造出更加精确的定量的数据给我们带来整组数据的分布特征.

首先是样本的**集中位置**. 我们需要一些量来描述数据组的分布的大概位置. 比如定性地说上一节的数据主要分布在 20-30 左右. 我们可以采用具体的**平均数**来描绘这种集中情况, 如果样本组被记作 $\{x_n\}$, 那么平均数常被记作 $\bar{x}$. 平均数定义为将所有的样本数据求和再除以总体的数目. 如果要精确计算平均数, 那么是需要所有原始数据的参与的. 但是如果只是进行估计, 那么只需要部分数据信息就可以做到.

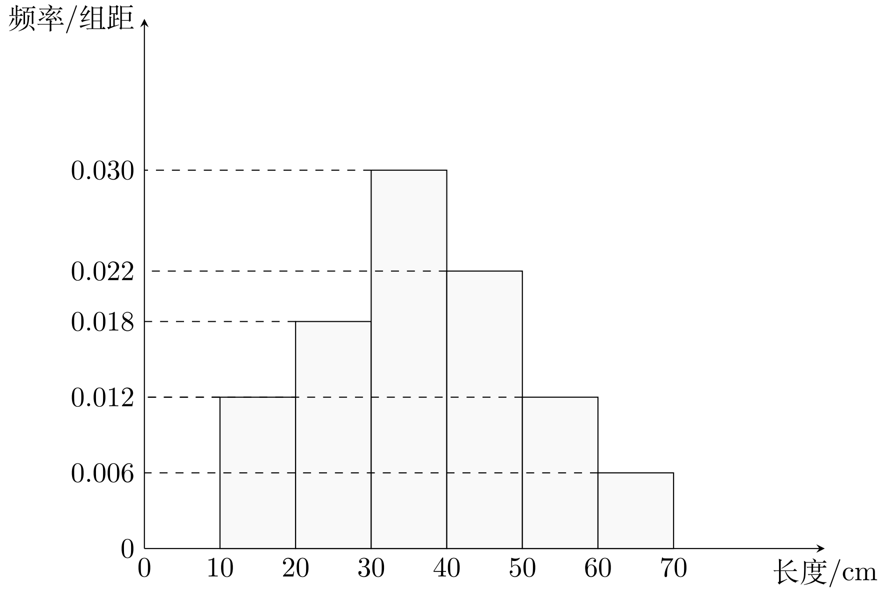


图 12.1: **条形图**

我们用频率分布直方图进行估计. 将每个区间的数用中点值进行代替, 乘以频率之后相加, 就是平均数的估计值. 如在上节的例子中, 用这种方法估计出的平均数值为 37.2. 实际的平均数为 36.84, 相对误差只有不到百分之一. 这样进行估计是可以接受的.

另一个体现集中程度的是**中位数**. 中位数是数据的最中间位置. 设中位数为 m, 那么直线 $x = m$ 应当将频率分布直方图近似平分. 可以使用这种方式估计中位数. 如前述情境中中位数的估计值应为 36.6. 这和原数据的中位数 37 也很接近.

最后一个体现集中程度的量**众数**可以用频数分布直方图的最高峰进行估计. 这取决于组距. 数据越多, 组分的越合适的时候众数的估计值会越准确. 比如上面例子中只能告诉我们众数大约在 $20 \sim 30$ 处取到.

与集中位置不同, **离散程度**是很难在图表上进行估计的. 这些量依然是针对已知原始数组来进行计算的.

方差 s_x^2, 是样本与平均数距离的平方的平均值. 也就是说

$$s_x^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \overline{x})^2$$

它可以反映出样本数据的分散程度. 方差大的数据更为分散. 与方差作用相同的数据还有标准差 $s_x = \sqrt{s_x^2}$. 采用这个值主要是因为它的单位和原有数据的单位是一致的.

12.1.4 得出结论：回归分析、独立性检验

有的时候我们面对的不是一组数据, 而是两组数据进行分析. 要对它们之间的**关联性**进行度量. 看下面一张图. 它表示的是以下数据在平面上的表现.

当我们观察图像的时候, 我们发现 x, y 近似成一个函数关系 $\hat{y} = bx + a$. 我们希望找到一个近似的方程能够最好地拟合上面的图线.

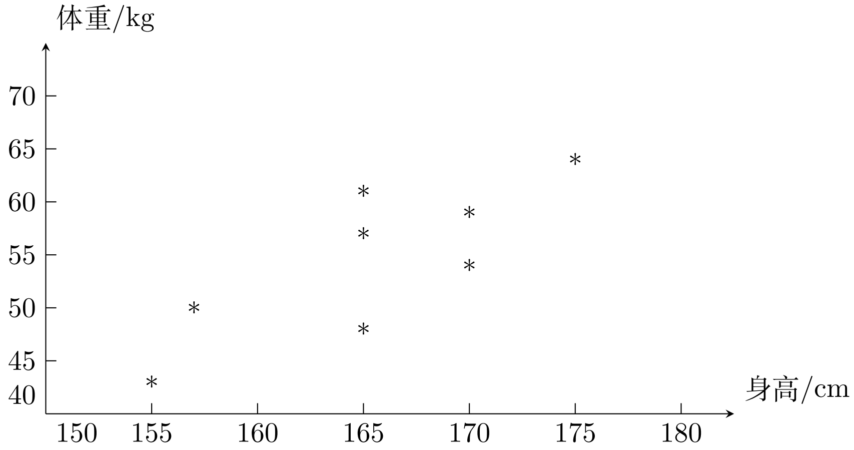


图 12.2:

表 12.5: **数据表**

x	165	165	157	170	175	165	155	170
y	48	57	50	54	64	61	43	59

对每个样本点 (x_i, y_i) 定义残差为 $e_i = y_i - \hat{y}_i$, 则我们希望残差的平方和

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

尽可能的小. 这是一个二次函数的含参最值问题. 可以得到, 在

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$$

时取到最小值. 因此我们得到了我们所要的一次函数: $y = \hat{b}x + \hat{a}$. 这里在不写字母 a, b 而是用符号 $\hat{a}, \hat{b}$ 的原因是这里的 a, b 是我们构造出来的量, 而不是原始数据实际满足的方程. 换言之, 它是一种近似. 在这里我们是用最小二乘法进行的近似. 如果用其他算法的话 a 与 b 的估计值 $\hat{a}, \hat{b}$ 会发生一定改变. 相应的残差的平方和也会改变. 可以使用残差平方和这个量来衡量模型的好坏. 在上面的例子中, 可以计算得到 $\hat{a} = -85.712$, $\hat{b} = 0.849$.

记

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}$$

则 $\hat{b} = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}$. 这给计算带来了一点简化, 因为这三个量都有两种计算方式.

定义

$$R = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{xy}}}$$

由柯西不等式知 $R \in [-1,1]$. R 被称为线性相关系数, 正负性与 b 相同. 根据 R 的大小我们可以将数据的相关性分成四种:

1. $R \in [-1,-0.75]$, 称为强负相关.
2. $R \in [-0.75,0]$, 称为弱负相关.
3. $R \in [0,+0.75]$, 称为弱正相关.
4. $R \in [+0.75,+1]$, 称为强正相关.

可以看到 R 的大小决定了相关程度, R 的正负决定了正负相关. 一般在 R 较大的时候线性拟合模型才是有意义的. 比如上例中 $R^2 = 0.64$, 我们可以说 x 的变化解释了 64% 的 y 的变化.

拟合也不会完全是线性拟合. 比如下面的数据 (x,y) 反映在图上会呈现指数形式.

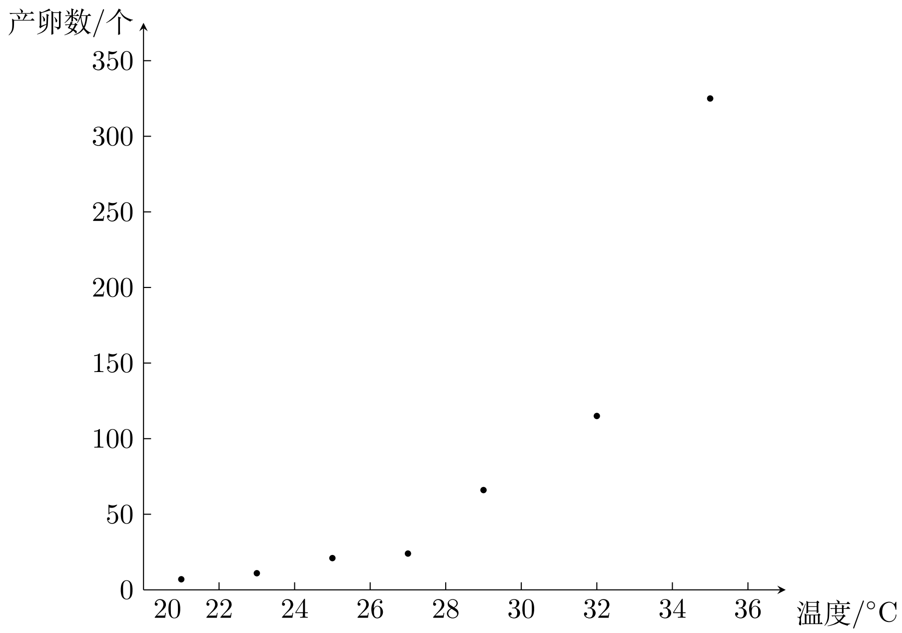


图 12.3:

这时候直接拟合效果不会很好, 二者也会呈现弱相关. 但是如果我们对数据 $(x, z=\ln y)$ 进行拟合, 那么二者就会展现出很强的关联性，如图12.4所示：

表 12.6: **数据表**

x	21	23	25	27	29	32	35
y	7	11	21	24	66	115	325
$z=\ln y$	1.946	2.398	3.045	3.718	4.190	4.745	5.784

$\hat{z} = 0.272x - 3.849$, 因此 y 与 x 的关系应为 $\hat{y} = e^{0.272x-3.849}$.

我们有时候也会面临分类变量之间的关联性问题. 所谓分类变量指的是变量的值表示个体所处的不同类别, 比方说下面这个 2×2 **列联表**. 直观上可能感受到两个量之间存在某种关联. 将表中数

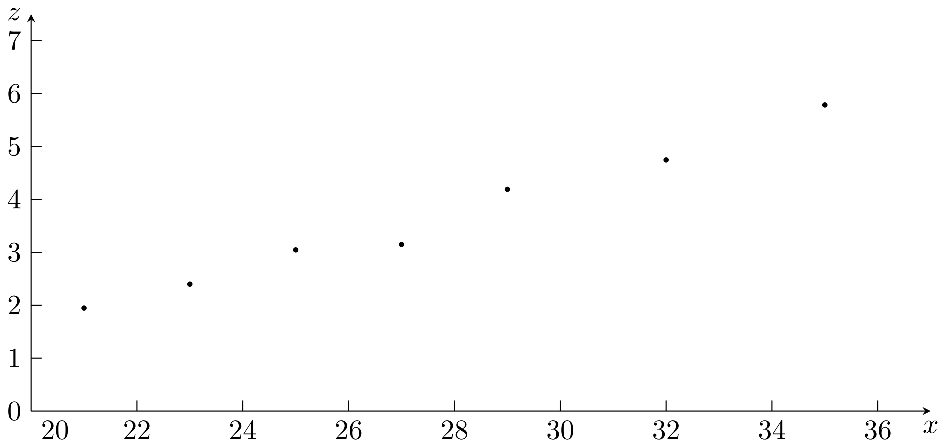


图 12.4:

表 12.7: **列联表**

	不患肺癌	患肺癌	合计
不吸烟	7775	42	7817
吸烟	2099	49	2148
合计	9874	91	9965

字以字母代替, 我们构造一个变量:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

这个变量的大小可以用来表征两个变量的独立性 (一般要求 a, b, c, d 都大于 5). 计算得到 $K^2 =$

表 12.8: **列联表**

	不患肺癌	患肺癌	合计
不吸烟	a	b	$a+b$
吸烟	c	d	$c+d$
合计	$a+c4$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

56.632. 与下表进行比较:

表 12.9: **参考表**

$P(K^2 \geq k_0)$	0.010	0.005	0.001
k_0	6.635	7.879	10.828

我们发现本例中 $K^2 = 56.632 > 10.828$. 因此我们可以推断二者之间有联系, 作出这个结论犯错误的概率为 0.001. 或者说, 有 99% 的把握认为二者之间有关系. 这样, 就可以定量地下结论了.

12.2 计数原理

计数的本质是求集合的元素个数 (集合的势).

12.2.1 计数原理

最基础的计数原理是逐个计数: 枚举法. 这种方法是最基本的, 同时也是应用范围最广泛的. 任何一个计数问题理论上都可以用枚举法解决, 后面介绍的各种奇妙方法也不过是枚举法的简化版本. 正因如此, 我们不应该一味追求各种“神奇方法”, 而应该力争“用最合适的方法做题”.

枚举并非随心所欲地乱列举. 举一个例子.

例 12.1. *列举出所有由 1,3,5 三个数字构成的三位数.*

解. 错误的列举: $111, 135, 531, 153, 513, 351, 315, 333, \cdots$. 列的乱了, 很有可能出现重复和缺漏.

正确的列举需要避免凌乱. 使用**字典排序法**可以有效地解决这个问题. 我们都知道, 英文字典编排时会按照字母顺序: $abcd\cdots$ 在编排的时候先写第一位是 a 的单词, a 开头的单词中又会先写没有第二位的单词 a, 再写第二位是 a 的单词 (虽然单词 aa 是不存在的, 但是如果存在的话它一定在 $abandon$ 前), 以此类推. 计数的时候这种思想也很重要: 我们先列第一位是 1 的, 第一位是 1 的里面再先写第二位是 1 的. 顺着这个思路进行列举, 这个题就很容易了, 如下:

111,113,115,131,133,135,151,153,155

311,313,315,331,333,335,351,353,355

511,513,515,531,533,535,551,553,555

这样计数, 没有重复, 没有遗漏, 可以保证正确. 所以此题答案为 27. ♡

字典排序法的顺序思想在更困难的问题中更为重要. 下面的老高考题也可以体现这一点.

例 12.2. *定义规范 01 数列 $\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 m 项为 0, m 项为 1, 且对任意 $k \le 2m$, a_1, a_2, $\cdots$, a_k 中 0 的个数不少于 1 的个数, 若 $m = 4$, 求不同的规范 01 数列数.*

解. 由题目叙述知道 $m = 4$ 时数列中有 4 个 0 和 4 个 1. 我们可以通过字典排序法列举. 先讨论前四位都是 0 的, 再讨论第四位为 1 的, 逐步把 1 往前挪, 可列举出:

$00001111, 00010111, 00011011, 00011101, 00100111, 00101011, 00101101$

$00110011, 00110101, 01000111, 01001011, 01001101, 01010011, 01010101$

一共 14 个. 这样一道很难用其他计数原理做出来的题目也不那么难了. ♡

回到前面列三位数那个题. 我们在列举第一位是 $1,3,5$ 的数字的时候, 将所有可能的结果分成了三**类**: 首位是 1, 首位是 3, 首位是 5. 然后我们把每个类中的个数分别数出来 (都是 9), 最后把它们加起来得到结果 27. 在这里我们使用了**分类加法**计数原理: 完成一件事有 k 类方法, 每种内又分别有 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 种方法, 那么总方法数就是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

或者我们可以这么理解: 取出这么一个三位数一共需要三步: 取百位, 取十位, 取个位. 每一步都有 3 种方法: $1,3,5$. 所以总的结果数是 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 种. 在这里我们使用了**分步乘法**计数原理: 完成一件事有 k 个步骤, 每步内又分别有 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 种方法, 那么总方法数就是 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k$.

加法原理和乘法原理是枚举法的延伸. 根据问题的特点, 我们可以根据问题确定分类分步标准, 把一个复杂的大问题划分成小问题再利用加法和乘法进行计算, 最终得到正确结果.

例 12.3. *求由 $1,3,5,7$ 组成的不超过 4 位数的个数.*

解. 先分成四类：一位数, 两位数, 三位数, 四位数. 每类中再分步计算. 读者可自行尝试.

最终结果：$4+4\times4+4\times4\times4+4\times4\times4\times4=340$. 根据两个原理, 这个式子的意义也就显而易见了.

在例12.3中, 我们求出了所有包含 $1,3,5$ 的三位数个数. 如果要求三位数不完全相同呢？容易知道, 只需在总数 27 中把不符合新条件的 $111,333,555$ 三个数去掉就可以了. 这里我们使用的原理是**排除减法**计数原理: 总数为 n 个, 不符合条件的有 m 个, 那么符合条件的就有 $n-m$ 个. ♡

例 12.4. *平面上有六个点 $ABCDEF$, 求它们间能连出的线段总数.*

解. 分类为包含 A 的, 不包含 A 但是包含 B 的, 不包含 AB 但是包含 C 的等, 一共五类. 分别有 $5,4,3,2,1$ 条线段. 由加法原理结果是 15.

如果改用乘法原理呢？每条线段的选出需要两步：先选一个点, 再从剩下的点里面选出另一个点. 一共是 $6\times5=30$ 条. 但是每一条线段都被计算了两遍 (AB,BA), 所以最后结果也要除以 2. 答案也是 15 条. ♡

这里出现了**除法**. 它是不是也代表了一种计数原理呢？答案是肯定的. 我们看下面的例题.

例 12.5. *给定六个点 $ABCDEF$, 有多少形如 (A,B), (F,E) 这样的点对？*

解. 利用乘法原理, 先选一个点, 再从剩下的点里面选出另一个点, 一共是 $6\times5=30$ 个.

我们也可以从另一个角度思考, 仍然分成两步: 第一步, 先在六个点中连线段, 一共 15 条; 第二步, 给线段的两个端点排序, 有 2 种方法. 得到总数：$15\times2=30$ 个.

当然, 这个问题的第二种方法并不是一个正常的做题方法. 15 条线段的得到也要依靠第一种方法的 6×5. 但是这个方法给我们打开了一扇门: 根据乘法原理, *有序*的方法数可以用*无序*的方法数乘以*排序*的方法数得到, 反过来如果我们要计算*无序*的方法数, 自然就可以通过用*有序*除以*序数*得到. 这就是**消序除法**计数原理的意义.

减法和除法是加法和乘法的逆运算, 相应的计数原理也有“逆”的关系. ♡

以上计数原理主要用于处理具体的事件数的计算. 有些时候我们会遇到一些含有未知参量的问题, 如下面的例子:

例 12.6. *上一个 n 级的台阶. 可以一次上一步, 或者一次上两步. 一共有几种方式？*

解. 直接计数是不可能的——以上介绍的所有方法在这里都不实用. 究其根源为: 这个题的答案与题目中的 n 息息相关. 换句话说我们并不是在做一个具体的问题, 而是要对所有的 n 求出我们的答案 a_n.

把方法数写作 a_n, 我们来探究 a_n 之间的联系. 走上第 n 级台阶分两类, 第一类是先走到 $n-1$ 阶再上一阶, 另一类是先走到 $n-2$ 阶再上两阶. 这两类的方法数分别为 a_{n-1} 和 a_{n-2}. 因此我们得到了数列 $\{a_n\}$ 的重要性质:

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

这是数列的递推公式. 由此我们便可求出 $\{a_n\}$ 的通项公式. 也就解决了这个问题. ♡

这种计数原理被称为**递推原理**. 对于含变量的计数问题直接计算很可能有困难. 这时我们把 n 不同的情况进行关联以求推出递推式, 进而利用数列的处理方法解决问题. 在如上例中的这种" 一步步" 的过程中这个方法很有作用.

总结一下: 最基本的计数原理是**枚举**, 在这之上有**分类**, **分步**, **排除**, **消序**这些很常用的原理, 在向上是更高级的**递推原理**和对应原理等. 面对这些不同层次不同特点的计数原理的时候要能够综合运用, 不拘泥于单一的某个原理, 方法. 在解释这些原理的时候, 例子起到了引导和帮助理解的作用. 也希望读者在理解这些方式时避免死记硬背枯燥的文字解释, 而是通过例子来理解其中蕴含的计数思想与原理.

12.2.2 排列组合与分组分配

我们在上一节的基础上继续介绍一大类特殊且重要的模型：**排列、组合**.

从 n 个不同元素里不重复地选出 m 个不同元素按照一定顺序排成一列, 叫做一个排列. 所有这样的排列的个数叫做排列数, 记为 A_n^m. 特别的在 $m = n$ 时叫做 n 个不同元素的全排列.

利用分步乘法计数原理我们可以求出：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

其中 ! 代表阶乘, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1$, 并且约定 $0! = 1$. 全排列数公式：$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1 = n!$. 可以看出 n 固定时, 随着 m 的增大排列数也会增大, 直到 $A_n^{n-1} = A_n^n$ 达到最大值. 最后的等式是好理解的: 当你把 $n-1$ 项都排好序之后, 最后一项自然也已经位于它应该在的位置了.

如果在上面的选取中我们不关心元素的顺序, 只是从 n 个元素中取出 m 个不同元素, 这样做得到的组称为组合. 所有组合的个数叫做组合数, 记作 C_n^m. 由消序原理可得

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

这个数的一个特点就是它分子和分母乘的项数相同, 这是写组合数时保证不会因为笔误少写一项的一个小技巧.

组合数的增减性也是值得研究的. 将 C_n^k 看成一个有 $n+1$ 项的数列. 在 n 固定的情况下, 我们计算相邻两项的比值.

$$\frac{C_n^m}{C_n^{m+1}} = \frac{(m+1)!(n-m-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{m+1}{n-m}$$

可以看出组合数的数列先增后减. 当 n 是奇数时, 组合数最大项出现在数列的中间两项; n 是偶数时, 最大项将出现在中间一项.

以上是排列数和组合数的一小部分数列性质, 包括通项公式和增减性. 更多的数列性质将在下一节出现. 我们先来看将它们应用到计数问题中的作用.

例 12.7. *八个人站成一排, 满足下列条件的排法各有多少种？*

(1) 甲乙丙三人坐在一起.

(2) 甲乙丙三人两两不相邻.

(3) 甲乙丙三人自左向右按顺序排列.

解.

(1) 可以用捆绑法解决. 我们先把甲乙丙放在一起看成是一个人, 那么有 A_6^6 种排法. 再给三人之间排序, 有 A_3^3 种方法. 相乘即得, 答案是 4320 种.

(2) 可以用插空法解决. 先排其他五个人, 有 A_5^5 种排法; 在这五个人之间及两边有 6 个空, 将甲乙丙三人插入有 A_6^3 种排法. 相乘得共 14400 种.

(3) 先任意排, 共有 A_8^8 种排法; 还需消甲乙丙三人的序, 除以 A_3^3, 一共 6720 种. 另法: 在全部 8 个位置选出五个排好其他五个人, 则甲乙丙三人座位也得到了确定, 一共有 $A_8^5 = 6720$ 种排法.

♡

例 12.8. *用数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 组成没有重复数字的六位数 (如 123450 符合条件, 123400 不符合条件). 有多少种可能? 这里面有多少个大于 201345?*

解. 排列问题. 第一问从所有六个数的排列 A_6^6 中排除掉首位为 0 的 A_5^5 个. 共 600 个. 第二问从所有六个数的排列 A_6^6 中排除掉首位为 $0, 1$ 的 $2A_5^5$ 个, 再除掉 201345. 共 479 个.

可以看到, 排列组合绝对不是单独使用的. 它们在逻辑体系中的地位和枚举是一样的. 我们常常是在先对问题进行分类分步, 排除消序之后对计数过程中出现的细节进行排列组合的处理. ♡

12.2.3 二项式定理和组合恒等式

众所周知, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 这个公式揭示了两项和的平方的展开式. 那么对于两项和立方, 四次方或者一般的 n 次方有没有类似的公式呢? 是有的.

考虑展开式的 $a^{n-i}b^i$ 项前的系数. 这一项是 n 个 (a+b) 相乘展开后得来的. 每个括号有两种选择, a 或 b. 对于任意的 i, $a^{n-i}b^i$ 这一项是由 (n-i) 个括号中选 a, i 个括号中选 b 得到的. 因此 $a^{n-i}b^i$ 的个数就是从 n 个括号中选 i 个括号的方法数 C_n^i. 于是

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

这个公式叫做**二项式定理**. 各项系数 C_n^i 被叫做**二项式系数**. $C_n^i a^{n-i} b^i$ 叫做**通项**, 记作 T_{i+1}. 也就是说, 展开式的第 $i+1$ 项是 $T_{i+1} = C_n^i a^{n-i} b^i$.

在二项式定理中设 $a = 1$, $b = x$, 则有:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

例 12.9. *求 $(1+2x)^7$ 的展开式中的第 4 项, 第 4 项系数, 第 4 项的二项式系数.*

解. 考查基本概念的辨识. 第四项是

$$T_{3+1} = C_7^3 \times (2x)^3 = 280x^3$$

第四项系数是 280, 第四项二项式系数是 $C_7^3=35$. ♡

注意二项式定理中 a 和 b 的顺序是不能改变的, 第 $i+1$ 项是 $T_{i+1}=C_n^i a^{n-i}b^i$ 而不是 $C_n^i b^{n-i}a^i$. 这可能会引发一些细微的概念混淆. 比如上题在不注意概念的情况下可能会误写成第 5 项. 但是厘清概念之后我们很快就能发现下面的结论:

因为

$$(a+b)^n=(b+a)^n$$

所以这两个式子的对应项前的系数也要相等. 故

$$C_n^i=C_n^{n-i}$$

. 这被称作二项式系数的对称性.

如果令 $a=b=1$, 则可得到

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$$

这也是一个和二项式系数相关的等式.

实际上通过二项式展开我们可以得到无穷无尽的与组合数有关的等式. 主要有两种得到的方式: 比较系数法与特殊值代入法. 我们来看下面的例子:

例 12.10. (1) *求证: $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$.*

(2) *求 n 次的二项式展开中所有奇数项系数的和.*

解.

1. 由 $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n$, 比较两边 x^{m+1} 的系数, 可以得到:

   $$C_{n+1}^{m+1}x^{m+1}=C_n^m x^m\cdot x+C_n^{m+1}x^{m+1}$$

   因此 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$.

2. 设奇数项系数的和为 A, 偶数项系数的和为 B, 则已知 $A+B=2^n$. 再在 $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i$ 中令 $x=-1$, 则 $0=A-B$. 因此 $A=B=2^{n-1}$.

♡

这种用函数关系证明二项式系数所满足等式的方法是很精彩的. 是二项式定理的一个主要应用场景.

习题 12.2

第一部分 分类加法和分步乘法原理

1. 已知集合 $M=\{1,2,3,\cdots,10\}$, A 是 M 的子集, 且 A 中各元素的和为 8, 则满足条件的子集 A 共有_____个.

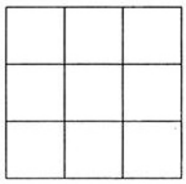
2. 若 $a \in A$ 且 $a-1 \notin A$，$a+1 \notin A$，则称 a 为集合 A 的孤立元素. 那么，集合 $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的无孤立元素的 4 元子集有______ 个.

3. 已知 f 是从集合 $M=\{a,b,c\}$ 到集合 $N=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 的映射. 则满足 $f(a)+f(b)+f(c)=0$ 的映射 f 的个数为______.

4. 已知函数 $f(x)=x^3-3x$ 的值域为 $\{-2,0,2\}$，这样的 $f(x)$ 有______个.

5. 形如 45132 这样的数称为“波浪数”，即十位数字、千位数字均比它们各自相邻的数字大，则由 $1,2,3,4,5$ 可构成数字不重复的五位“波浪数”个数为______.

6. 将 $1,2,3,\cdots,9$ 这 9 个数全部填入下面的 3×3 方格内，每个格内填一个数，则使得每行中的数从左至右递增，每列中的数从上至下递减的不同填法有______种.



7. 设集合 A、B 满足 $A\cup B=\{1,2,\cdots,10\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，若集合 A 的元素个数不是集合 A 的元素，集合 B 元素个数不是集合 B 的元素，则满足条件的所有集合 A 的个数为______.

8. 设在 5×5 的方格表的第 i 行第 j 列所填的数为 a_{ij}，其中 $a_{ij}\in\{0,1\}$，$a_{ij}=a_{ji}$，$1\le i,j\le 5$. 则表中共有 5 个 1 的填表方法总数是______.（用具体数字作答）

9. 一个 $150\times 324\times 375$ 的长方体，是由 $1\times 1\times 1$ 的单位立方体拼在一起构成的，则该长方体的一条对角线穿过______个不同的单位立方体.

10. 已知 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有______ 个.

11. 设集合 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，若 I 的非空子集 A、B 满足 $A\cap B=\varnothing$, 就称有序集合对 (A,B) 为 I 的“隔离集合对”，则集合 I 的“隔离集合对”的个数为______.（用具体数字作答）

12. 已知 $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A\cap B=\{a,b,c,d\}$, $c\in A\cap B\cap C$, 则符合上述条件的 $\{A,B,C\}$ 共有______组.

第二部分 排列数和组合数的概念

1. 把 1、2、3、4、5、6 六个数随机排成一列组成一个数列，要求该数列恰好先增后减，这样的数列共有______个.

2. 学校 5 月 1 号至 5 月 3 号拟安排 6 位领导值班，要求每人值班 1 天，每天安排 2 人. 若 6 位领导中的甲不能值 2 号，乙不能值 3 号，则不同的安排值班的方法共有______种.

3. 身穿红、黄两种颜色衣服的各有两人，身穿蓝色衣服的有一人．现将这五人排成一行，要求穿相同颜色衣服的人不能相邻．则不同的排法共有_____ 种.

4. 从 $0,1,2,\cdots,9$ 中选出三个不同数字组成四位数（其中的一个数字用两次），如 5224，则这样的四位数共有_____个.

5. 在某次交友活动中，原计划每两个人都要恰好握 1 次手，但有 4 个人各握了两次手之后就离开了，这样整个活动共握了 60 次手，那么最开始参加活动的人数是_____.

6. 甲、乙两名学生在五门课程中进行选修，他们共同选修的课程恰为一门并且甲选修课程的数量多于乙，则甲、乙满足上述条件的选课方式的种数为_____.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 100 项，满足 $a_1=0$，$a_{100}=475$，且 $|a_{k+1}-a_k|=5(k=1,2,3,\cdots,99)$，则符合条件下的不同数列有_____个.

8. 将各位数字和为 10 的全体正整数按自小到大的顺序排成一个数列 $\{a_n\}$，若 $a_n=2017$，则 $n=$_____.

9. 如果从数 $1,2,\cdots,14$ 中按从小到大的顺序取出 a_1,a_2,a_3 使得同时满足 $a_2-a_1\geq 3,a_3-a_2\geq 3,$. 那么所有符合要求的不同取法有_____种.

10. AFS 国际文化交流组织（AFS Intercultural Programs）拟将 18 个中学生交流项目的名额分配给 4 所学校, 要求每校至少有一个名额且各校分配的名额互不相等, 则不同的分配方法种数为_____.

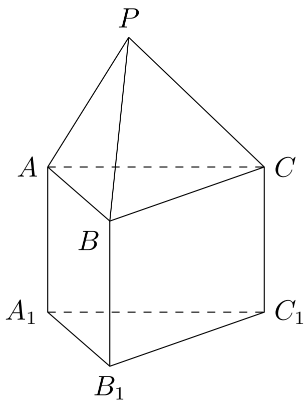
11. 将 5 名大学生村官分配到某乡镇的 3 个村就职，若每个村至少 1 名，则不同的分配方案种数为_____.

12. 设三位数 $n=\overline{abc}$，若以 a,b,c 为三条边的长可以构成一个等腰（含等边）三角形，则这样的三位数共有_____个.

13. 以正十三边形的顶点为顶点的形状不同的三角形共有_____个.（说明：全等的三角形视为形状相同.）

14. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两的端点异色，若只有 4 种颜色可供使用，则不同的染色方法总数有_____种.

15. 现有 4 种不同颜色的灯泡，每种颜色表示不同的信号，假设每种颜色的灯泡有足够多，若要在如图所示的某机场信号塔的每个顶点 P,A,B,C,A_1,B_1,C_1 上各安装一个灯泡，要求同意线段两端的灯泡不同色，则不同的安装方法有_____种.



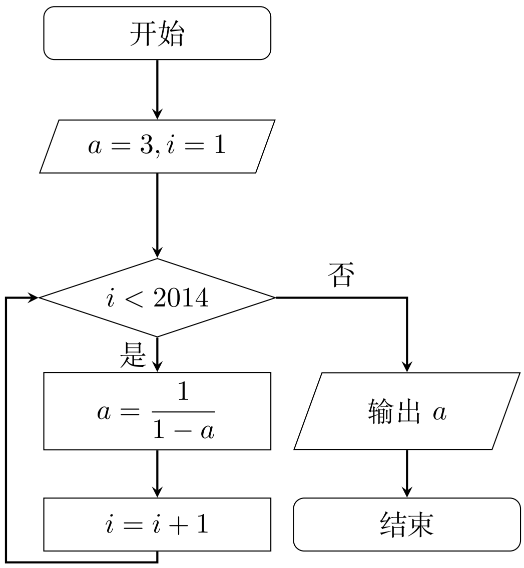
第三部分 二项式展开

1. 设复数 $x=\dfrac{1+i}{1-i}$（i 为虚数单位），则 $C_{2014}^{0}+C_{2014}^{1}x+C_{2014}^{2}x^{2}+\cdots+C_{2014}^{2014}x^{2014}$=______.

2. 已知 n 为正整数，二项式 $(x^2+\dfrac{1}{x^3})^n$ 的展开式中含有 x^7 的项，则 n 的最小值为______.

3. $(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$ 的展开式中,x^4 的系数是______.

4. 如图所示的程序框图中输出的结果为 a，若二项式 $(mx^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^4(m>0)$ 的展开式中含 x^3 的项的系数为 $\dfrac{a}{2}$，则常数 m=______.



5. 抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 与直线 $x=1$ 围成的封闭图形的面积为 $\dfrac{4}{3}$，则 $(x+\dfrac{a}{x})^{20}$ 二项式展开式中含 x^{-18} 项的系数是______.

6. 在多项式 $(x-1)^3(x+2)^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为______.

7. 已知 i 为虚数单位，则在 $(\sqrt{3}+i)^{10}$ 的展开式中，所有奇数项的和是______.

8. 在 $(2+\sqrt{x})^{2n+1}$ 的展开式中，x 的幂指数是整数的各项系数之和为______.

9. 若 $a_0+a_1(2x-1)+a_2(2x-1)^2+a_3(2x-1)^3+a_4(2x-1)^4+a_5(2x-1)^5=x^5$，则 $a_2=$______.

10. 若 $(a+b)^n$ 的展开式中有连续三项的二项式系数成等差数列，则最大的三位正整数 n=______.

11. $6^{11}+C_{11}^{1}6^{10}+C_{11}^{2}6^{9}+\cdots+C_{11}^{10}6-1$ 被 8 除所得的余数是______.

12. 若 $(2x+4)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}(n\in\mathbf{N}_+)$, 则 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$ 被 3 除的余数是______.

13. 设 $(2x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$, 则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|$ 的值为______.

14. 设 $k=\int_0^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$，若 $(1-kx)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=$______.

15. 设 a_n 为 $(\sqrt{x}+3)^n$ $(n\geq 2$ 且 $n\in\mathbf{N})$ 展开式中 x 的一次项的系数. 则 $\dfrac{2009}{2008}(\dfrac{3^2}{a_2}+\dfrac{3^3}{a_3}+\cdots+\dfrac{3^{2009}}{a_{2009}})$ 的值为______.

16. 设 $(1-2x)^7=\sum\limits_{k=0}^{7}a_kx^k$，则 $2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7$ 的值是______.

17. 设 $(x+1)^{2017}=a_0x^{2017}+a_1x^{2016}+a_2x^{2015}+\cdots+a_{2016}x+a_{2017}$，那么 $a_1+a_5+a_9\cdots+a_{2017}$ 的值为______.

18. $(a+2b-3c)^4$ 的展开式中 abc^2 的系数为______.

19. 在 $(x+\dfrac{4}{x}-4)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是______（用具体数字作答）.

20. $(|x|+\dfrac{1}{|x|}-2)^3$ 的展开式中的常数项为______.

21. 若 $x\in\mathbf{R}^+$，则 $(x^3+1-\dfrac{1}{x^4})^9$ 展开式中常数项为______.

22. 在 $(x+y+z)^8$ 的展开式中，所有形如 $x^2y^az^b(a,b\in\mathbf{N})$ 的项的系数之和是______.

23. 设 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=$______.

24. 若 $(x^2-x-2)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则 $a_1+a_3+a_5$=______.

12.3 概率

12.3.1 随机事件与概率

概率, 反映随机事件发生的可能性大小. **随机事件**是指在相同条件下可能发生也可能不发生的事件, 比如抛硬币正面向上, 从人群中抽出一个人是男性等. 设对某一随机现象进行多次观察 (n 次), 随机事件 A 出现的频数为 m, 那么在 n 很大的时候, 尽管 A 出现的频率 $\dfrac{m}{n}$ 不会是定值, 但是会趋向于一个确定的数. 我们就把它叫做事件 A 的概率, 记作 $P(A)$. 统计学意义上, **频率是概率的稳定值**.

一般来说, 我们将事件用大写字母 A, B, C, D 等表示. 正如集合有类似于交并补的运算, 命题有或且非的运算, 随机事件也存在着类似的运算.

例 12.11. *扔一个骰子, 记扔出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点分别为事件 A, B, C, D, E, F. 则以下事件该如何表示?*

(1) 扔一次, 结果为奇数点.

(2) 扔两次, 点数之和为 2.

(3) 扔出来的不是 3 点.

解.

(1) 可以看成是事件 A, C, E 的交集, 也可以说是事件 A 或 C 或 E. 在事件上把这种运算后的事件叫做**和事件**, 记作 $A + C + E$.

(2) 连续扔出两次 1 点, 也就是先发生了事件 A, 再发生了事件 A. 与并集和且运算相对应, 将这种运算叫做**积事件**, 记作 AA.

(3) 扔出来的不是 3 点, 对应着补集和非运算. 这种运算称为**对立事件**, 记作 $\overline{C}$.

♡

以前对**或且非**和**交并补**的理解放到这里依然适用. 这样我们就可以和上面的例子一样, 通过一些基础的事件来表达更为复杂的事件. 可以说正确地表达事件是正确理解问题与正确计算概率的基础.

例 12.12. *(4) 连续扔两次, 点数和不是七点.*

解. 可表示为 $\overline{AF + BE + CD + DC + EB + FA}$. 注意事件 AB 与事件 BA 是不同事件. ♡

用字母和运算表达事件是好的, 但是也有很强的局限性. 首先, 以刚才的例子为例, 在字母和扔出的点数之间没有很强的关联性; 其次, 如果我们用的不是正常的六面骰, 而是八面, 十二面, 甚至某些场合下的一百面呢? 我们显然不能用一百个字母去表示它们, 在面临诸如灯泡报废的时间这种事件的时候更是无能为力–这是不可被枚举的; 最后, 在表示诸如*两次和为七点*的事件的时候, 用字母需要把所有的情况可能性都枚举出来, 不方便.

因此, 我们可以采用**随机变量**表示事件. 在以上的例子中, 无论是骰子投出的点数, 考试成绩还是灯泡的寿命, 我们都可以找到一个数来表示它们, 如骰子的点数是 $X = 1$, 考试成绩是 $Y = 85$, 灯泡寿命是 $Z = \pi$ 年等. 这里的 XYZ 会随着随机事件的结果变化而变化, 而且对于每一种结果只会有一个确定的值. 因此我们就可以用随机变量的取值来表示事件. 假设 X 是随机变量, 则 $X = i$ 就表示使随机变量取值为 i 的事件. 这种表示方法具有泛用性普遍性. 而且对以随机变量表示的事件我们也可以进行和, 积, 对立的运算. 这使得随机变量成为表示随机事件的最重要的工具.

在上面的例子中, 骰子点数, 考试成绩是**离散型**随机变量, 只能间隔变化; 灯泡寿命是**连续型**随机变量, 可以连续变化.

在上面第 (4) 问中, 设第一二次抛出的点数分别为 X, Y, 则该事件可表示为 $\overline{X + Y = 7}$.

对于任意随机事件 A, 我们都知道 A 会有一个发生的**概率**. 在数学上将其记作 $P(A)$. $P(A)$ 总是一个在闭区间 $[0,1]$ 上的数. 必然事件的概率是 1, 不可能事件的概率为 0. 对于一个随机事件, 它的所有可能情况的概率和一定是 1. 比如在骰子的例子中, $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+P(E)+P(F)=1$, 尽管我们可能不知道各事件的概率值. 由此我们也可以得到公式:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

即对立事件与原事件的概率和为 1.

我们可将离散型随机变量的取值 $X=i(i=x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与这个事件的概率 $P(X=i)$ 都列出来, 写成表格的形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(X=x_1) & P(X=x_2) & \cdots & P(X=x_n) \end{pmatrix}$$

或者

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\cdots$	$P(X=x_n)$

称为 X 的**分布列**. 也称 X 符合表中的分布.

对于离散型随机变量, 定义

$$EX=\sum_{i=1}^{n} iP(X=i)$$

, 则 EX 可以表示所有 X 的可能取值的平均值, 称为 X 的**数学期望**, 简称**期望**. 它刻画了随机变量取值的平均情况.

定义

$$DX=\sum_{i=1}^{n}(i-EX)^2P(X=i)$$

, 也就是说

$$DX=E(X-EX)$$

. 则 DX 可以表示所有 X 的可能取值的方差, 仍称为 X 的**方差**. 它刻画了随机变量取值的集中程度.

我们有公式:

$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\sum_{i=1}^{n} i^2P(X=i)-\left(\sum_{i=1}^{n} iP(X=i)\right)$$

这个公式的证明比较繁琐, 在此略去.

例 12.13. *扔一个六面的均匀骰子, 记扔出的点数为 X. 求 X 的分布列, 期望.*

解. 计算略去, 直接给出结果: $EX=3.5$. ♡

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

12.3.2 古典概型与几何概型

现在我们已经有了事件和概率的概念, 那么具体在一个问题里面我们如何去计算一个概率呢?

直接按照定义的话是无法操作的–我们不可能真的去把一个实验重复无数遍去看频率的稳定值. 于是我们可以引入古典概型, 借助基本事件与事件的运算来解决这个问题.

将一次实验出现的所有等可能的情况称作这个实验的**基本事件**, 要求这些事件满足一下三个条件: 任意两者不同时发生, 一次试验后必然发生其中一种, 每个基本事件发生的可能性都是相等的. 比如扔硬币出现正面和出现反面可以看成是基本事件, 扔骰子出现 6 种点数也是基本事件, 出现奇数和出现偶数也是基本事件, 但是扔出的点数被 3 整除和出现的点数是 4 就不是基本事件, 因为二者不是等可能的.

如果一个实验有 n 个基本事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 则由等可能性和概率和为 1, 那么

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \frac{1}{n}$$

这样我们就计算出了所有基本事件的概率.

再讲概率的加法原理. 如果事件 A, B 不会同时发生, 那么

$$P(A) + P(B) = P(A + B)$$

称事件 A, B **互斥**. 而基本事件都是互斥的, 所以如果我们能把要求的事件表示成基本事件的和事件, 那么

$$P(\text{待求事件}) = \text{待求事件所含基本事件数} \times P(\text{基本事件发生的概率}) = \frac{\text{待求事件所含基本事件数}}{\text{总基本事件数}}$$

这就是求概率的**古典概型**. 一般用古典概型求概率的步骤为: 寻找基本事件并求出基本事件数, 对要求的事件中所含基本事件数进行计数, 依据古典概型作比值.

例 12.14. *用 1-6 六个数字随意组合成六位数, 求组成的六位数字各不相同的概率.*

解. 基本事件是组成不同的六位数, 一共 6^6 种可能. 设组成的六位数字各不相同为事件 A, 则 A 包含的基本事件数是 A_6^6. 所求的概率就是 $\dfrac{A_6^6}{6^6}$. ♡

用古典概型本质上就是进行计数. 一般我们遇到的概率问题都要求我们是用古典概型进行正确的计数.

古典概型亦有其局限性. 它只能在情况数有限的时候进行计数. 比如下面的问题:

例 12.15. *随机取一个 $x \in [-1, \pi]$, 则 x 是正数的概率为多少?*

解. 因为我们并不能实际地找到古典概型中需要的基本事件, 所以古典概型并不适用. 因此我们引入几何概型来解决类似的概率问题.

如果作出图像, 则在线段 $[-1,\pi]$ 上随机取点, 取到 $[0,\pi]$ 这一段上的概率自然就是 $\dfrac{\text{线段}[0,\pi]\text{的长度}}{\text{线段}[-1,\pi]\text{的长度}} = \dfrac{\pi}{1+\pi}$. 这里可以写成闭区间, 因为边界点处的取到与否不会影响最后的概率, 也不会影响线段长度. ♡

也就是说, 当我们将总体条件表示成线段 l_1, 要求的事件 A 表示成线段 l_2, 那么 $l_2 \subseteq l_1$. 那么 $P(A) = \dfrac{l_2\text{的长度}}{l_1\text{的长度}}$. 这被称为**几何概型**: 它将概率计算转变成求两区域的几何度量的比值. 这里的几何度量可以不局限于长度, 也可以是面积, 体积以及角度等.

例 12.16. *甲乙两人相约在车站会面. 假设二人均在 7 点到 9 点之间的随机一个时刻来到车站, 并且每个人至多等待另一个人 30 分钟. 问两人碰面的概率.*

解. 情况数无限, 古典概型不能适用. 我们考虑几何概型. 假设甲乙到车站的时间分别为 x, y, 则总的情况表示平面上的一个正方形: $S = \{(x,y)|x \in [7,9], y \in [7,9]\}$. 要求的情况则增添了一个限制: $|x-y| \le 0.5$. 这样事件 $A =$ 两人碰面就可以用一个条带状区域 $S_1 = \{(x,y)|x \in [7,9], y \in [7,9], |x-y| \le 0.5\}$ 表示. 因此

$$P(A) = \frac{S_1\text{的面积}}{S\text{的面积}} = \frac{1.75}{4} = \frac{7}{16}$$

♡

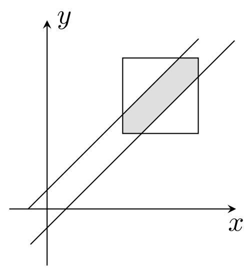


图 12.5: 几何概型

12.3.3 条件概率与事件的独立性

上一节我们解决了**和事件**的概率计算问题. 本节我们讨论**积事件**概率的计算. 先从条件概率入手.

例 12.17. *仍然是扔一个六面的骰子, 扔两次, 用古典概型计算:*

(1) *求两次点数和为 6 的概率.*

(2) *若第一次投出了 2 点, 求最终点数和为 7 的概率.*

解.

(1) 易知该事件 A 包含的基本事件为 $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ 一共 5 种, 因此结果应为 $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

(2) 只包含一个基本事件, 即 $(2,4)$. 但是所有的基本事件为 $(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)$, 因此结果为 $P=\dfrac{1}{6}$.

♡

可以看出在第二问中, 我们接触到了一种新的事件: B 发生的情况下 A 发生. 我们将这种事件叫做**条件事件**, 记作 $A|B$. 相应的, 条件事件的概率 $P(A|B)$ 称为**条件概率**. 一般的, $P(A|B)\neq P(A)$.

这样, 出于条件概率我们便知道, A 先发生 B 后发生, 也就是积事件 AB 的概率 $P(AB)$ 应等于A 发生的概率 $P(A)$ 乘以在A 发生的条件下 B 发生的概率 $P(B|A)$. 也就是说

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

这就是积概率的计算公式. 或者逆用这个公式, 得到

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

可看做条件概率的计算公式.

也就是说, 积事件的概率在很多情况下不等于概率的积. 如果二者相等, 即

$$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

则称事件 AB 相互独立. 注意将独立概念与上一节的互斥概念作区分: 独立指的是积事件的概率等于概率的积, 而互斥指的是和事件的概率等于概率的和. 二者是对不同的过程而言的, 没有什么关联.

接下来介绍计算复杂过程事件概率的方式. 看下面的例子.

例 12.18. *A 盒中有 2 个白球 1 个黑球. B 中有 1 个白球和 2 个黑球. 从 A 中随机取出一个球放入 B 中, 再从 B 中随机取出一个球, 求取出的是白球的概率.*

解. 设从 A 中取出白球是事件 A, 从 B 中取出白球是事件 B. 则 $P(B)$ 是无法直接计算的. 我们另寻他法. 我们可以改变 B 的表示:

$$B=AB+\overline{A}B$$

AB 与 $\overline{A}B$ 是互斥的, 因此我们有:

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

也就是说从 B 中摸出一个白球的概率为 $\dfrac{5}{12}$. ♡

在上面的题目解答中我们遇到了这个式子:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

. 这个公式的一般形式为:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

式中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件 A 的 n 种互斥的情况, 且是所有 A 的可能情况. 在 B 事件与 A 事件相关的时候, 我们可以通过计算各条件概率 $P(B|A_i)$ 并与该情况的发生概率 $P(A_i)$ 相乘. 再进行求和即可得到结果. 这个公式叫做**全概率公式**.

12.3.4 离散型随机变量的特殊分布

这里我们介绍三种常见的离散型随机变量的特殊分布: **几何分布**, **二项分布**, **超几何分布**. 理解这些特殊分布的过程中, **实际例子**与**参数意识**是比较重要的.

几何分布

设一个伯努利实验中成功概率是 $p \in (0,1)$, 失败概率是 $q = 1-p$, 重复实验直到成功为止, 记成功时进行了 X 次实验 ($X = 1,2,3,4,5,\cdots,n,\cdots$), 我们称 X 服从**参数为 p 的几何分布**. 注意: 几何分布只有**一个**参数 p, 也就是说它只与成功概率 p 有关. 概率通项为

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$$

容易得到 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5	$\cdots$	n	$\cdots$
P	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3p$	$(1-p)^4p$	$\cdots$	$(1-p)^{n-1}p$	$\cdots$

可以看到,X 的取值可以跑向正无穷. 在计算 X 的期望时, 实际计算的将是一个无穷的差比数列求和.

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{n-1}p = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{n-1} = p\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-q^k}{(1-q)^2} - \frac{kq^k}{1-q}\right) = \frac{1}{p}$$

同理亦可算得

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

过程留给读者自行完善. X 跑向无穷的几何概型性质比较好, 但是在实际应用中 X 很难做到这一点, 常常会有 $X \le N$ 的限定条件. 在此时, $X < N$ 的概率通项和上述相同, 而 $X = N$ 的概率将成为 $(1-p)^{n-1}$. 因为它要求前 $n-1$ 次全部失败, 而对第 n 次没有要求. 期望的计算也将变得比较复杂. 我们用一个例题来解释.

例 12.19. *有一艘船需要与陆地进行通信. 其连续向基站拍发若干次呼叫信号, 每次呼叫信号被基站收到的概率都是 0.2, 基站收到呼叫信号后立即拍发回答信号, 回答信号一定会被收到. (参考数据:$2^{20} \approx 1.05 \times 10^6$)*

(1) *要保证基站收到信号的概率超过 0.99, 求轮船至少要拍发多少次呼叫信号.*

(2) *设 (1) 中求得的结果为 n. 若轮船第一次拍发信号后, 每隔 5 秒钟拍发下一次, 直到收到回答信号为止. 已知该轮船最多拍发 n 次呼叫信号, 且无线电信号一个来回需要 16 秒. 设停止拍发时一共拍发了 X 次呼叫信号, 求 X 的数学期望.(结果精确到 0.01)*

解. (1) 设"轮船拍发 k 次呼叫信号, 基站至少收到一次"为事件 A, 则"轮船拍发的 k 次事件基站都没收到"为事件 $\overline{A}$, 其中 k 为正整数.

要使 $P(A) > 0.99$, 即 $P(\overline{A}) \le 0.01$.

又由题意知 $P(\overline{A}) = (1-0.2)^k = 0.8^k$.

而 $0.8^{20} = \dfrac{2^{60}}{10^{20}} \approx 1.16 \times 10^{-2} = 0.0116 > 0.01$.

$0.8^{21} \approx 1.16 \times 10^{-2} \times 0.8 \approx 0.00928 < 0.01$.

所以 $k \geq 21$, 即至少要拍发 21 次呼叫信号.

(2) 由 (1) 知 $n = 21$. 根据题意, 若第一次的信号就被收到, 那么 16 秒后轮船会收到回答信号从而停止拍发, 在这期间拍发三次, 所以轮船一共最少需要拍发 4 次信号.

所以 X 的范围是 $X = 4, 5, 6, \cdots, 21$. X 的分布列为 所以 $EX = 8 - 5 \times 0.8^{18} \approx 7.91$. ♡

X	4	5	$\cdots$	20	21
P	0.2	0.2×0.8	$\cdots$	$0.8^{16} \times 0.2$	0.8^{17}

评注 12.19.1. *本题主要考察几何概型的变式. 主要有两个变化: 其一是末尾截断, 其二是对随机变量做了 $+3$ 的平移处理. 不管如何, 几何概型的思想依然是本题的内核. 处理本题时难点在理解题意和计算差比数列求和上.*

二项分布

设一个伯努利实验中成功概率是 $p \in (0,1)$, 失败概率是 $q = 1-p$, 重复实验 n 次, 记实验最终成功了 X 次 ($X = 0, 1, 2, 3, 4, 5..., n$), 我们称 X 服从**参数为 n, p 的二项分布**. 二项分布常用符号 $B(n,p)$ 表示, 上面例子中就有 $X \sim B(n,p)$, ($\sim$ 表示服从). 二项分布有两个变量: 重复次数 n 和成功概率 p.

一个经典的二项分布的例子是**有放回**摸球. 从装有 m 个除颜色外完全相同的球 (其中有且仅有 k 个红球, 其他的都是蓝球) 的袋子中每次有放回地摸一个球, 总共摸 n 次. 那么摸出红球的数目 $X(X = 0, 1, 2, 3, 4, 5..., n)$ 服从以 $n, \dfrac{k}{m}$ 为参数的二项分布.

二项分布中, 事件 $X = k$ 表示在 n 次摸球实验中有 k 次以 p 的概率摸出红球, 另外 $n-k$ 次以 $1-p$ 的概率摸出蓝球. 所以

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

这个形式和二项式定理有着相同的结构. 由二项式定理, 将上式对 k 从 0 到 n 求和得 1, 可以说明这个公式符合概率求和为 1 的性质.

$n = 1$ 的二项分布叫**两点分布**. 两点分布的分布列是 它的期望与方差都是容易计算的. $EX = p$,

X	0	1
P	$1-p$	p

$DX = p(1-p)$.

对于一般的二项分布 $X \sim B(n,p)$, 它的分布列为

X	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	$\cdots$	$np^{n-1}(1-p)$	p^n

下面计算 X 的期望. 利用组合数性质

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

. 这个等式的证明是简单的: 他们都等于 $\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} = np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k} (1-p)^{n-1-k} = np \end{aligned}$$

这一结果在直观上是好理解的. 每个两点分布的期望都是 p, n 个两点分布相加的期望就自然是 np. 这种自然的方式可以帮助理解记忆公式, 但是不能称为严谨的推导方法. 高考一般不会直接考察该公式的推导过程, 只要求理解与运用. 但是推导过程中中组合恒等式性质的妙用是比较重要的, 不可忽视.

例 12.20. 某电子产品由 A, B 两个系统组成, 其中 A 由 3 个电子元件构成, B 由 5 个电子元件构成. 各电子元件能正常工作的概率均为 $p(0<p<1)$, 且每个元件是否正常工作互相独立. 每个系统中有超过一半的元件正常工作则该系统正常工作, 否则需要维修.

(1) 当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 每个系统维修费用均为 200 元. 设 ξ 为该电子产品需要维修的总费用, 求 ξ 的数学期望;

(2) 当该电子产品出现故障时, 需要对 A, B 两个系统进行检测. 从 A,B 两个系统能够正常工作的概率大小判断, 应优先检测哪个系统?

解. (1) 分别记 A, B 系统需要维修为事件 A, B, 则

$$P(A) = C_3^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_5^1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}$$

设 X 为该电子产品需要维修的系统个数, 则

$$X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right), \xi = 200X$$

$$E\xi = 200 \times 2 \times \frac{1}{2} = 100$$

(2)A, B 系统正常工作的概率为

$$P_A = C_3^2 p^2(1-p) + p^3 = -2p^3 + 3p^2$$

$$P_B = C_5^3 p^3(1-p)^2 + C_5^4 p^4(1-p) + p^5 = 6p^5 - 15p^4 + 10p^3$$

二者之差

$$P_A - P_B = 3p^2(1-p)^2(1-2p)$$

所以当 $\frac{1}{2} < p < 1$ 时, B 系统比 A 系统正常工作的概率大, 优先检查 A 系统;

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, B 系统和 A 系统正常工作的概率一样大, A,B 系统检测不分顺序;

当 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, B 系统比 A 系统正常工作的概率小, 优先检查 B 系统. ♡

评注 12.20.1. 本题是用二项分布模型, 但是不同于一般二项分布求分布列、期望的题目, 而是推陈出新设计了决策类问题, 令人耳目一新. 另外, 将本题中的 3 和 5 改成其他奇数, 只要 A 的元件数比 B 的少, 结论依然成立. 感兴趣的同学可以试着计算一下.

二项分布还有一个特殊的性质. 二项分布的通项是 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. 这是一个关于 k 的数列, 它的最大项在何处? 这是一个简单的数列求增减性的问题. 我们可以对相邻两项作商比较.

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

所以当 $(n-k+1)p > k(1-p)$, 也就是 $k < (n+1)p$ 时,$\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} > 1$. 也就是当 $k < (n+1)p$ 时,$P(X = k)$ 单调增. 所以最大值是: $k = (n+1)p$ 向下取整.(如果这个值大于 n, 那么最大项自然是第 n 项.) 可以看出概率最大项和期望泾渭分明, 并无关联.

超几何分布

以上两种分布都是在伯努利实验延伸出来的随机变量分布. 而**超几何分布**不同, 它不建立在重复的伯努利实验上. 看下面的例子.

已知现有 N 件产品, 其中有 M 个次品. 从 N 个产品中抽取 n 个, 记 X 为抽取的次品数, 则

$$P(X=i) = \frac{C_M^i C_{n-m}^{n-i}}{C_N^n}$$

X 的取值范围和 n 与 M 和 $N-M$ 的关系有关, 最小可以到 $\min\{0, N-M\}$, 最大值为 $\max\{n, M\}$. 假设 X 的范围就是 0 到 n. 则将 X 写成分布列为:

X	0	$\cdots$	i	$\cdots$	n
P	$\frac{C_M^0 C_{n-m}^n}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^i C_{n-m}^{n-i}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^n C_{n-m}^0}{C_N^n}$

这里的 X 我们称其符合**超几何分布**, 记作 $X \sim H(n, M, N)$. 超几何分布是由 n, M, N 三个参数完全确定的.

再来算期望值. 在计算这个期望值的时候依然需要使用等式:

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n} C_{M-1}^{i-1} C_{N-M}^{n-i} = C_{N-1}^{n-1}$$

这是因为等号两边都在描述从 $N-1$ 个物品中选取 $n-1$ 个的过程. 左边是先从 $M-1$ 个中选择 $i-1$ 个再从剩下的 $N-M$ 中选择 $n-i$ 个, 右边是直接描述这个过程.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=0}^{n} \frac{iC_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} = \sum_{i=1}^{n} i\frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} M\frac{C_{M-1}^{i-1} C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} = M\frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{nM}{N} \end{aligned}$$

也就是说, $EX = \dfrac{nM}{N}$. 这个结果是符合我们心理预期的: 从 N 个元素中选 n 个, 次品的比例应该不变.

同样的方法我们也可以计算 X 的方差 DX. 但是这个过程过于繁琐因此不在这里展示, 只给出结果:

$$DX = \frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

同二项分布一样, 期望可以直接使用但是方差不行.

超几何分布和二项分布有着极强的相似程度. 如果我们把定义中的抽取改为摸出并放回, 那么 X 将服从二项分布. 从某种角度来说, 超几何分布和二项分布都是摸球, 只不过超几何分布是无放回地摸球, 二项分布是有放回地摸球. 这是表面上最重要的区别.

更大的区别体现在参数上. 超几何分布有三个变量: n, M, N. 而二项分布只有两个变量 n, p. 因此如果题目的描述是类似于"100 个产品" 这种确定的总数描述, 那么有比较大的可能会是超几何分布. 而如果是" 有若干产品" 这种不确定的描述, 那么是可以用二项分布计算的.

超几何分布和二项分布的这种相似性很多时候会带来概念上的混淆, 但是也会带来一定的便利性. 当 n 与 N 的相差的过大 (如 2 和 100), 超几何分布与二项分布算出来的结果差距已经不大, 可以用以估算. 但若是实际计算的话还是应该认真列出组合数的式子进行计算.

符合超几何分布的随机变量范围被限制在 $\min\{0, N-M\}$ 和 $\max\{n, M\}$ 之间. 但是不管范围如何, 期望的公式与方差的公式是不会改变的. 这点与几何分布不同.

12.3.5 连续型随机变量, 正态分布

以上我们讨论的都是离散型随机变量. 离散型随机变量可以被枚举出来进行直接的计算, 在这个阶段是比连续型随机变量方便研究的.

我们都知道可以通过分布列来表示离散型随机变量, 但是连续型随机变量的值无穷多. 且不说能否被枚举出来, 就算可以, 概率 $P(X=i)$ 也只能等于 0: 你不可能找到一个灯泡恰好在 3 年熄灭而非 3.0000000001 年或是其他相近的时间熄灭. 因此我们谈论在某点处的概率是没有意义的. 但是我们可以考虑 $P(A < X < B)$. 比如:

例 12.21. *随机取一个 $x \in [-1, \pi]$, 则 x 是正数的概率为多少?*

解. 在几何概型处我们已经讨论过这个问题. 带着连续型随机变量的观点我们可以重新审视一下它. 这里 X 就是一个取值范围为 $[-1, \pi]$ 的随机变量, 所求的概率就是 $P(X > 0)$. 这个概率的值为 $\dfrac{\pi}{1+\pi}$. 如果我们要求的是事件 $P(a \le x \le b)$ 呢? 这个值应该等于 $\dfrac{b-a}{1+\pi}$. 我们用积分的形式理解这

个结果就是:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b \frac{1}{1+\pi} dx = \frac{b-a}{1+\pi}$$

如果对于一个连续型随机变量, 我们能找到一个函数 $f(x)$ 使得 $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$, 则 $f(x)$ 叫做该随机变量的一个**概率分布密度函数**. 易知对于任意一个概率分布密度函数都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

这是因为总概率 $P(x \in \mathbb{R}) = 1$. ♡

上题中的概率分布密度函数就是 $f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1 \\ \dfrac{1}{\pi+1}, -1 \le x \le \pi \\ 0, \pi \le x \end{cases}$. 这种分布叫做**均匀分布**.

有了概率分布密度函数, 就可以定义期望和方差了. 对于连续型随机变量 X, 我们定义期望和方差分别为积分:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, DX = E((X-EX)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)^2 f(x)dx$$

牵扯到积分, 不要求进行计算, 只要求定性理解.

下面我们介绍一种最重要的连续型随机变量的分布: 正态分布. 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有两个参量: 平均值 μ, 方差 σ^2. 其概率分布密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

从形式上很复杂, 我们将进行一些探讨搞清楚它的性质.

1. $f(x) > 0$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 是为了满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 条件凑出来的系数, 对函数图像整体走势无影响.
3. 函数主体是 e^{-x^2}. 这个函数展现出中间高两边平的形状, 被称为**钟型曲线**.
4. μ 只在 $(x-\mu)^2$ 中出现, 即函数关于 $x = \mu$ 轴对称, μ 只影响对称轴. 这与我们对平均数影响平均值的考虑相同.
5. σ 在 $\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 中出现. 它影响了函数的横向伸展和纵向拉长. 而且二者的变换方向相反, 即如果 σ 的绝对值变大, 横向会拉长而纵向会缩短. 这与我们对方差影响集中程度的理解相同.

从这四点考虑, 很容易发现复杂函数形式中体现的本质. 这个函数是一个由 μ 控制位置, σ 控制高度的钟型曲线. 如下图所示.

如果 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 做变换 $Y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, 则 Y 服从 $N(0,1)$. 也就是说所有的正态分布曲线都只是差一个系数. 我们把 $N(0,1)$ 叫做**标准正态分布**.

如果一个连续型随机变量是**众多的**, **互不相干的**, **不分主次**的**偶然**因素作用之和, 那么它将服从或近似服从正态分布. 比如同一次考试中许多考生的考试成绩, 某地区人的身高体重, 某产品线上生产出的产品指标等等. 正态分布有着广泛的应用. 一个比较重要的应用是 3σ **准则**.

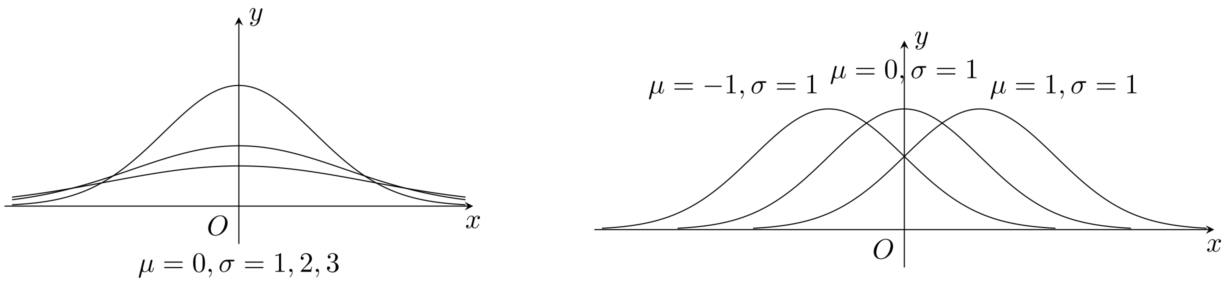


图 12.6: 正态分布曲线 (为方便观察，这些图像都做了纵向伸长 4 倍的处理.)

利用计算机可以算出:

$$P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx)=0.6827$$

这个值与 μ,σ 无关. 同理有

$$P(\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma)=0.9545, P(\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma)=0.9973$$

可以看到正态分布的总体都处于区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之间. 如下图所示:

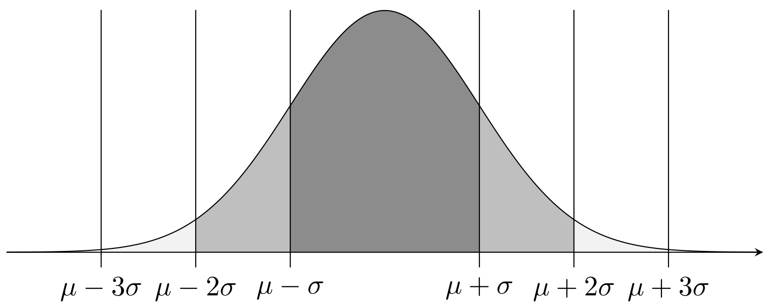


图 12.7: 3σ 准则

因此通常认为服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量只取区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的值. 这就是 3σ **准则**. 如果随机抽取某生产线上的产品, 一次实验抽取到这个区间值外的样品, 那么我们会倾向于认为是生产线出现故障, 需要检修.

例 12.22. *$X\sim N(0,1)$. 求 $P(2\le X\le 3)$.*

解. 由对称性, 我们知道:

$$P(2\le x\le 3)=\frac{1}{2}(P(-3\le X\le 3)-P(-2\le X\le 2))=0.0214$$

♡

习题 12.3

1. 将某选手的 9 个得分去掉 1 个最高分，去掉 1 个最低分，7 个剩余分数的平均分为 91，现场做的 9 个分数的茎叶图有一个数据模糊，无法辨认，在图中以 x 表示，则 7 个剩余分数的方差为______.

8	7 7
9	4 0 1 0 x 9 1

2. 从 $1, 2, \ldots, 10$ 中随机抽取三个各不相同的数字，其样本方差 $s^2 \leq 1$ 的概率 =______.

3. 随机挑选一个三位数 I，则 I 含有因子 5 的概率为______.

4. 将一颗均匀的正方体骰子连续掷两次，先后出现的点数分别为 a、b，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 有实根的概率为______.（用最简分数作答）

5. 将一个质地均匀的色子连续投掷三次．落地时朝上的点数依次成等差数列的概率为______.

6. 从 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 中任取两个不同的数，则取出的两数之和为偶数的概率是______.

7. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$I = \{X | X \subseteq U\}$，从集合 I 中任取两个不同的元素 A、B，则 $A \cap B$ 中恰有 3 个元素的概率为______.

8. 从 $1, 2, \cdots, 20$ 中任取 3 个不同的数，则这 3 个数构成等差数列的概率为______.

9. 中装有 m 个红球和 n 个白球，$m > n \geq 4$. 现从中任取两球，若取出的两个球是同色的概率等于取出的两个球是异色的概率，则满足关系 $m + n \leq 40$ 的数组 (m, n) 的个数为______.

10. 某市公租房源位于 A, B, C 三个小区，每位申请人只能申请其中一个小区的房子，申请其中任意一个小区的房子是等可能的，则该市的任意 4 位申请人中，恰有 2 人申请 A 小区房源的概率是______.

11. 某校高三年级要从 5 名男生和 2 名女生中任选 3 名代表参加数学竞赛（每人被选中的机会均等），则在男生甲被选中的情况下，男生乙和女生丙至少一个被选中的概率是______.

12. 已知五件产品中有三件合格品，两件次品．每次任取一个检验，检验后不再放回．则恰经过三次检验找出两件次品的概率为______.

13. 袋中装有 2 个红球、3 个白球、4 个黄球，从中任取 4 个球，则其中三种颜色的球都有的概率为______.

14. 将 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 这 9 个数随即填入 3×3 的方格中，每个小方格恰填写一个数，且所填的数各不相同，则使每行、每列所填的数之和都是奇数的概率为______.

15. 对于正整数 n，随机选取集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 和非空子集 A 和 B，则 $A \cap B$ 不是空集的概率是______.

16. 随机地投掷 3 粒骰子，则其中有 2 粒骰子出现的点数之和为 7 的概率为______.

17. 甲、乙两人玩猜数字游戏，先由甲心中想一个数字，记为 a，再由乙猜甲刚才所想的数字，把乙猜的数字记为 b，其中 $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，若 $|a - b| \leq 1$，就称甲乙"心相近"．现任意找两人玩这个游戏，则他们"心相近"的概率为______.

18. 随机取一个由 0 和 1 构成的 8 位数，它的偶数位数字之和与奇数位数字之和相等的概率为______.

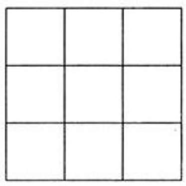
19. 某地举行一次民歌大奖赛，六个省各有一对歌手参加决赛，现要选出四名优胜者. 则选出的四人中恰只有两人来自同一省份的概率为______.

20. 第一只口袋里有 3 个白球、7 个红球、15 个黄球，第二只口袋里有 10 个白球、6 个红球、9 个黑球，从两个口袋里各取出一球，取出的球颜色相同的概率是______.

21. 在正方体的十二条面对角线和四条体对角线中随机地选取两条对角线. 则这两条对角线所在的直线为异面直线的概率等于______.

22. 六个人围成一圈玩掷硬币游戏 (硬币质地均匀)，每人掷一次硬币. 规定：硬币的反面朝上的要表演节目，正面朝上的不用表演，则没有两个表演者相邻的概率为______.

23. 从如图所示的由 9 个单位小方格组成的 3×3 方格表的 16 个顶点中任取三个顶点，则这三个点构成直角三角形的概率为______.



24. 从正九边形中任取三个顶点构成三角形，则正九边形的中心在三角形内的概率为______.

25. 从各位数字两两不等且和为 10 的所有四位数中任取两个数，则 2017 被取到的可能性为______.

26. 一枚骰子连续投掷四次，从第二次起每次出现的点数都不小于前一次出现的点数的概率为______.

27. 从正十二边形的顶点中取出 4 个顶点，它们两两不相邻的概率是______.

28. 三对夫妻排成一排照相，仅有一对夫妻相邻的概率为______.

29. 6 个相同的红色球，3 个相同的白色球，3 个相同的黄色球排在一条直线上，那么同色球不相邻的概率是______.

30. 将 8 个三好生名额分配给甲、乙、丙、丁 4 个班级，每班至少 1 个名额，则甲班恰好分到 2 个名额的概率为______.

31. 某侦察班有 12 名战士，其中报务员有 3 名. 现要将这 12 名战士随机分成 3 组，分别有 3 名战士、4 名战士、5 名战士，那么每一组都有 1 名报务员的概率是______.

32. 某人抛掷一枚硬币，出现正面向上和反面向上的概率都是 $\dfrac{1}{2}$. 构造数列 $\{a_n\}$，使

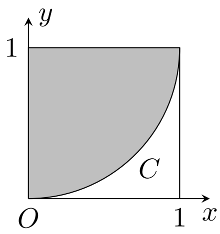
$$a_n=\begin{cases}1, & \text{第 } n \text{ 次正面向上},\\ -1, & \text{第 } n \text{ 次反面向上}.\end{cases}$$

记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $S_2\neq 0$ 且 $S_8=2$ 的概率为______. (用最简分数作答)

33. 将 10 个小球（5 个黑球和 5 个白球）排成一行，从左边第一个小球开始向右数小球，无论数几个小球，黑球的个数总不少于白球个数的概率为______.

34. 在边长为 3 的正方形中随机选取 n 个点，其中与正方形的顶点距离小于 1 的点有 m 个，则用随机模拟方法得到的圆周率 π 的实验值为______.

35. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点，则落入阴影部分（曲线 C 的方程为 $x^2-y=0$）的点的个数的估计值为______.



36. 已知点 $A(1,1),B(\frac{1}{2},0),C(\frac{3}{2},0)$，经过点 A,B 的直线和经过点 A,C 的直线与直线 $y=a(0<a<1)$ 所围成的平面区域为 G，已知平面矩形区域 $\{(x,y)|0<x<2,0<y<1\}$ 中任意一点进入区域 G 的可能性为 $\frac{1}{16}$，则 $a=$______.

37. 对于实数 α, 用 $[\alpha]$ 表示不超过 α 的最大整数. 例如 $[3]=3,[\sqrt{2}]=1$, $[-\pi]=-4$. 设 x 为正实数, 如果 $[\log_2 x]$ 为偶数, 则称 x 为幸运数. 在区间 $(0,1)$ 中随机选取一个数, 它是幸运数的概率为______.

38. 若小张每天的睡眠时间在 6 小时至 9 小时之间随机均匀分布，则小张连续两天平均睡眠时间不少于 7 小时的概率是______.

39. 在一个圆上随机取三点. 则以这三点为顶点的三角形是锐角三角形的概率为______.

40. 已知点 $P(x,y)$ 满足 $|x|+|y|\le 2$，则到 x 轴的距离 $d\le 1$ 的点 P 的概率是______.

41. 已知在三棱锥 $S-ABC$ 内任取一点 P，使 $V_{P-ABC}<\frac{1}{2}V_{S-ABC}$ 的概率为______.

42. 某届世界杯上，巴西队遇到每个对手，获胜的概率为 $\frac{1}{2}$，打平的概率为 $\frac{1}{3}$，输的概率为 $\frac{1}{6}$，获胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 已知小组赛每支球队需打三场比赛，获得 4 分或 4 分以上即可小组出线，且淘汰赛双方打平需互罚点球. 已知巴西队点球获胜的概率为 $\frac{3}{5}$. 则巴西队获得最后的冠军且四场淘汰赛中恰有一场点球的概率为______.

43. 某种电路开关闭合后，会出现闪动的红灯或绿灯. 已知开关第一次闭合，出现红灯和出现绿灯的概率都是 $\frac{1}{2}$，从开关第二次闭合起，若前次出现红灯，则下次出现红灯的概率是 $\frac{1}{3}$，出现绿灯的概率是 $\frac{2}{3}$；若前次出现绿灯，则下次出现红灯的概率是 $\frac{3}{5}$，出现绿灯的概率是 $\frac{2}{5}$. 则开关第 3 次闭合后出现红灯的概率是______.

44. 一名篮球队员进行投篮练习，若第 n 次投篮投中，则第 $n+1$ 次投篮投中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，若 n 第次投篮不中，则第 $n+1$ 次投篮投中的概率为 $\dfrac{1}{3}$. 若该队员第 1 次投篮投中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，则第 4 次投篮投中的概率为______.

45. 甲、乙两人轮流掷一枚硬币至正面朝上或者朝下，规定谁先掷出正面朝上为赢：前一场输者，则下一场先掷，若第一场甲先掷，则甲赢得第 n 场的概率为______.

46. 甲、乙两人轮流掷骰子，甲先掷. 规定：若甲掷到 1 点，则甲继续掷，否则由乙掷；若乙掷到 3 点，则乙继续掷，否则由甲掷. 两人始终按此规则进行. 则第 n 次为甲掷的概率 P_n=______.

47. 掷一枚硬币, 每次出现正面得 1 分, 出现反面得 2 分. 反复掷这枚硬币, 则恰好得 n 分的概率为______.

48. 甲乙两人各自独立地抛掷一枚质地均匀的硬币, 甲抛 10 次, 乙抛 11 次则乙出现正面朝上的次数比甲出现正面朝上的次数多的概率为______.

49. 掷两次骰子，用 X 记两次掷得点数的最大值，则期望 $E(X)=$______.

50. 盒子里有大小相同的球 8 个，其中三个 1 号球，三个 2 号球，两个 3 号球。第一次从盒子里先任取一球，放回后第二次从盒子里再任取一球，记第一次与第二次取到的球上的号码的积为 ξ ，则 ξ 的数学期望 $E\xi=$______.

51. 一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标以数字 0，两个面上标以数字 1，一个面上标以数字 2。将这个正方体的抛掷两次，则向上的数之积的数学期望是______.

52. 设一个袋子里有红、黄、蓝色小球各一个，现每次从袋子里取出一个球（取出某色球的概率均相同)，确定颜色后放回，直到连续两次均取出红色球时为止，记此时取出球的次数为 ξ，则 ξ 的数学期望为______.

53. 已知集合 $M=\{1,2,\cdots,99\}$，现随机选取 M 中 9 个元素做成子集，记该子集中的最小数为 ξ，则 $E\xi$=______.

54. 设集合 $A=\{x|\dfrac{x+4}{x-3}\leq 0, x\in\mathbf{Z}\}$，从集合 A 中随机抽取一个元素 x，记 $\xi=x^2$，则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$=______.

55. 某植物种子的发芽率为 0.8，种子的成苗率为 0.6. 现有 100 粒已发芽的种子用来育苗，这些种子成苗的期望是______.

56. 甲乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 6 局时停止. 设甲在每局中获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$，且各局胜负相互独立，则比赛停止时已打局数 ξ 的期望 $E\xi$ 为______.

57. 在 $1,,2,3,\cdots,9$ 这 9 个自然数中，任取 3 个数，记 x 为这 3 个数中两数相邻的组数（例如，若取 3 个数为 1,2,3，则有两组相邻的数为 1,2 和 2,3 此时 x 的值是 2)，则 x 的数学期望为______.

58. 甲乙两人打乒乓球，甲每局获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$，当有一人领先两局的时候比赛终止，比赛的总局数为 $x_i(i \in \mathbf{N}_+)$ 的概率为 p_i，这里要求 $x_i < x_{i+1}(i \in \mathbf{N}_+)$，则 $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i =$______.

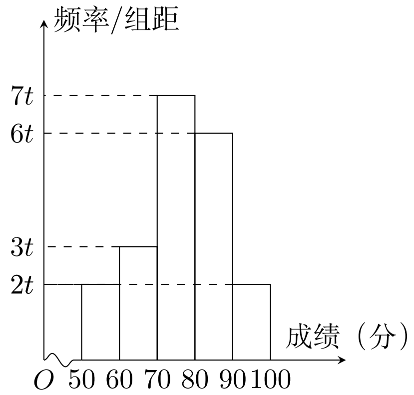
12.4 第 12 章综合习题

1. 已知由甲、乙两位男生和丙、丁两位女生组成的四人冲关小组，参加由某电视台举办的知识类答题闯关活动，活动共有四关，设男生闯过一至四关的概率依次是 $\dfrac{5}{6}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}$，女生闯过一至四关的概率依次是 $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}$.

   (1) 求男生闯过四关的概率;

   (2) 设 ξ 表示四人冲关小组闯过四关的人数，求随机变量 ξ 的分布列和期望.

2. 在一次全省科普知识竞赛中，某市 3000 名参赛选手的初赛成绩统计如图所示.



   (1) 求 t 的值，并估计该市选手在本次竞赛中，成绩在 $[80, 90)$ 上的选手人数;

   (2) 如果在本次竞赛中该市计划选取 1500 人入围决赛，那么进入决赛选手的分数应该如何制定?

   (3) 如果用该市参赛选手的成绩情况估计全省参赛选手的成绩情况，现从全省参赛选手中随机抽取 4 名选手，记成绩在 80（含 80）分以上的选手人数为 ξ，试求 ξ 的分布列和期望.

3. 某单位甲、乙两个科室人数及男女工作人员分布如下表. 现采用分层抽样方法（层内采用不放回简单随机抽样）从甲、乙两个科室中共抽取 3 名工作人员进行一项关于“低碳生活”的调查.

   (1) 求从甲、乙两科室各抽取的人数;

   (2) 求从甲科室抽取的工作人员中至少有 1 名女性的概率;

   (3) 记 ξ 表示抽取的 3 名工作人员中男性的人数，求 ξ 的分布列及数学期望.

人数 \ 性别 科别	男	女
甲科室	6	4
乙科室	3	2

4. 某厂每日生产一种大型产品两件，每件产品的投入成本为 2000 元. 产品质量为一等品的概率为 0.5，二等品的概率为 0.4. 每件一等品的出厂价为 10000 元，每件二等品的出厂价为 8000 元. 若产品质量不能达到一等品或二等品，除成本不能收回外，每生产一件产品还会带来 1000 元的损失.

(1) 求在连续生产的三天中，恰有一天生产的两件产品均为一等品的概率；

(2) 某日生产的两件产品中有一件为一等品，求另一件也为一等品的概率；

(3) 求每日生产这种产品所获利润 (元) 的分布列和期望.

5. 2019 年数学奥林匹克实行改革：某市在高二一年中举行 5 次联合竞赛，学生如果有 2 次成绩达到该市前 20 名即可进入省队培训，不用参加其余的竞赛，而每个学生最多也只能参加 5 次竞赛. 规定：若前 4 次竞赛成绩都没有达到全市前 20 名，则第 5 次不能参加竞赛. 假设某学生每次成绩达到全市前 20 名的概率都是 $\dfrac{1}{4}$，每次竞赛成绩达到全市前 20 名与否相互独立.

(1) 求该学生进入省队的概率;

(2) 如果该学生进入省队或者参加完 5 次竞赛就结束，记该学生参加竞赛的次数为 ξ，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望.

6. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售，如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润 y(单位：元) 关于当天需求量 n(单位：枝，$n \in \mathbf{N}$) 的函数解析式.

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位：枝)，整理得下表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花，X 表示当天的利润 (单位：元)，求 X 的分布列、数学期望及方差.

(2) 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由.

7. 在某批次的某种灯泡中，随机地抽取 200 个样品，并对其寿命进行追踪调$\boxed{\text{F}}$，将结果列成频率分布表如下．根据寿命将灯泡分成优等品、正品和次品三个等级，其中寿命大于或等于 500 天的灯泡为优等品，寿命小于 300 天的灯泡为次品，其余的灯泡为正品.

寿命（天）	频数	频率
$[100,200)$	20	0.10
$[200,300)$	30	a
$[300,400)$	70	0.35
$[400,500)$	b	0.15
$[500,600)$	50	0.25
合计	200	1

(1) 根据频率分布表中的数据，写出 a、b 的值；

(2) 某人从灯泡样品中随机地购买了 n（$n \in \mathbf{N}^*$）个，若这 n 个灯泡的等级情形恰与按三个等级分层抽样所得的结果相同，求 n 的最小值；

(3) 某人从这个批次的灯泡中随机地购买了 3 个进行使用，若以上述频率作为概率，用 X 表示此人所购买的灯泡中次品的个数，求 X 的分布列和数学期望.

8. 在一个盒子中，放有标号分别为 1、2、3 的三张卡片，现从这个盒子中，有放回地先后抽得两张卡片的标号为 x、y，记 $\xi = |x-2| + |y-x|$.

(1) 求随机变量 ξ 的最大值，并求事件“ξ 取得最大值”的概率；

(2) 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

9. 在某电视娱乐节目的游戏活动中，每人需完成 A、B、C 三个项目．已知选手甲完成 A、B、C 三个项目的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$，每个项目之间相互独立.

(1) 选手甲对 A、B、C 三个项目各做一次，求甲至少完成一个项目的概率.

(2) 该活动要求项目 A、B 各做两次，项目 C 做三次．若两次项目 A 均完成，则进行项目 B，并获得积分 a；两次项目 B 均完成，则进行项目 C，并获积分 $3a$；三次项目 C 只要两次成功，则该选手闯关成功并获积分 $6a$(积分不累计)，且每个项目之间互相独立．用 X 表示选手甲所获积分的数值，写出 X 的分布列并求数学期望.

第十三章　附录

13.1 2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题（新高考 I 卷）

考试时间 120 分钟.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x|\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x|3x\geq 1\}$，则 $M\cap N=$

(A) $\{x|0\leq x<2\}$　(B) $\{x|\frac{1}{3}\leq x<2\}$　(C) $\{x|3\leq x<16\}$　(D) $\{x|\frac{1}{3}\leq x<16\}$

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$，记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$

(A) $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　(B) $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　(C) $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　(D) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 $140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 $180.0\mathrm{km}^2$. 若该水库在这两个水位间的形状看做一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）

(A) $1.0\times 10^9\mathrm{m}^3$　(B) $1.2\times 10^9\mathrm{m}^3$　(C) $1.4\times 10^9\mathrm{m}^3$　(D) $1.6\times 10^9\mathrm{m}^3$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为

(A) $\frac{1}{6}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图像关于 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2})=$

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 3

7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1},b=\frac{1}{9},c=-\ln 0.9$，则

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π，且 $3\leq l\leq 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是

(A) $[18,\frac{81}{4}]$　(B) $[\frac{27}{4},\frac{81}{4}]$　(C) $[\frac{27}{4},\frac{64}{3}]$　(D) $[18,27]$

二. 选择题：在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则

(A) 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$

(B) 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

(C) 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$

(D) 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则

(A) $f(x)$ 有两个极值点　　(B) $f(x)$ 有三个零点

(C) 点 $(0,1)$ 是 $y=f(x)$ 的对称中心　　(D) 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P,Q 两点，则

(A) C 的准线为 $y=-1$　　(B) 直线 AB 与 C 相切

(C) $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　(D) $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f(\dfrac{3}{2}-2x)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则

(A) $f(0)=0$　　(B) $g(-\dfrac{1}{2})=0$　　(C) $f(-1)=f(4)$　　(D) $g(-1)=g(2)$

三. 填空题.

13. $(1-\dfrac{y}{x})(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________.(用数字作答)

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程________.

15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________.

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D,E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________.

四. 解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明:$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

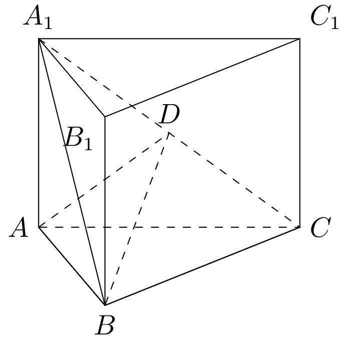
(1) 若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；

(2) 求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离；

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1 = AB$，平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

(2) 从该地的人群中任选一人，A 表示事件 “选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示 “选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

(i) 证明：$R = \dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)} \cdot \dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

(ii) 利用该调查数据，给出 $P(A|B)$，$P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

附：$K^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2-1} = 1 (a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P, Q 两点，直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率；

(2) 若 $\tan\angle PAQ = 2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a；

(2) 证明：存在直线 $y = b$，其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

13.2 2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题（新高考 II 卷）

考试时间 120 分钟.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x||x-1|\leq 1\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{-1,2\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{1,4\}$　(D) $\{-1,4\}$

2. $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$

(A) $-2+4\mathrm{i}$　(B) $-2-4\mathrm{i}$　(C) $6+2\mathrm{i}$　(D) $6-2\mathrm{i}$

3. 图 1 是中国的古建筑的举架结构，AA'，BB'，CC'，DD' 是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举. 图 2 是某古建筑屋顶截面示意图，其中 DD_1，CC_1，BB_1，AA_1 是举，OD_1，DC_1，CB_1，BA_1 是相等的步，相邻桁的举步的比分别为 $\dfrac{DD_1}{OD_1}=0.5$，$\dfrac{CC_1}{DC_1}=k_1$，$\dfrac{BB_1}{CB_1}=k_2$，$\dfrac{AA_1}{BA_1}=k_3$，已知 k_1,k_2,k_3 是公差为 0.1 的等差数列，且直线 OA 的斜率为 0.725，则 $k_3=$

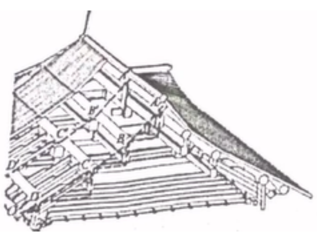


图 1

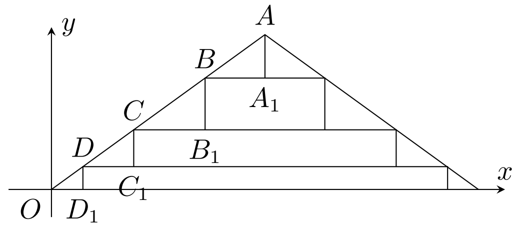


图 2

(A) 0.75　(B) 0.8　(C) 0.85　(D) 0.9

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$. 若 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，则实数 $t=$

(A) -6　(B) -5　(C) 5　(D) 6

5. 甲乙丙丁戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻的不同排列方式有

(A) 12 种　(B) 24 种　(C) 36 种　(D) 48 种

6. 若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则

(A) $\tan(\alpha+\beta)=-1$ (B) $\tan(\alpha+\beta)=1$　(C) $\tan(\alpha-\beta)=-1$ (D) $\tan(\alpha-\beta)=1$

7. 已知正三棱台的高为 1，上下底面的边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为

(A) 100π　(B) 128π　(C) 144π　(D) 192π

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，则 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{22}f(k)=$

(A) -3　(B) -2　(C) 0　(D) 1

二. 选择题：在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象关于 $(\dfrac{2\pi}{3},0)$ 中心对称，则

(A) $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{5\pi}{12})$ 单调递减

(B) $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12})$ 有两个极值点

(C) 直线 $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴

(D) 直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

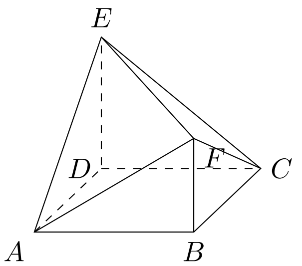
10. 已知 O 是坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线与 C 交于 A,B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若 $|AF|=|AM|$，则

(A) 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　(B) $|OB|=|OF|$

(C) $|AB|>4|OF|$　　(D) $\angle OAM+\angle OBM<180°$

11. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB//ED$，$AB=ED=2FB$，记三棱锥 $E-ACD$，$F-ABC$，$F-ACE$ 体积分别为 V_1,V_2,V_3，则

(A) $V_3=2V_2$　　(B) $V_3=V_1$　　(C) $V_3=V_1+V_2$　　(D) $2V_3=3V_1$



12. 若 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则

(A) $x+y\le 1$　　(B) $x+y\ge -2$　　(C) $x^2+y^2\le 2$　　(D) $x^2+y^2\le 1$

三. 填空题.

13. 随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,若 $P(2<X\le 2.5)=0.36$,则 $P(X>2.5)=$________________.

14. 曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线方程为 ________________，________________.

15. 设点 $A(-2,3)$，$B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $C:(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围为________________.

16. 已知直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在第一象限交于 A,B 两点，l 与 x 轴、y 轴分别相交于 M,N 两点，且 $|MA|=|NB|$，$|MN|=2\sqrt{3}$，则 l 的方程为________________.

四. 解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1) 证明：$a_1=b_1$；

(2) 求集合 $\{k|b_k = a_m + a_1, 1 \le m \le 500\}$ 中元素个数.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，分别以 a,b,c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1,S_2,S_3，已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

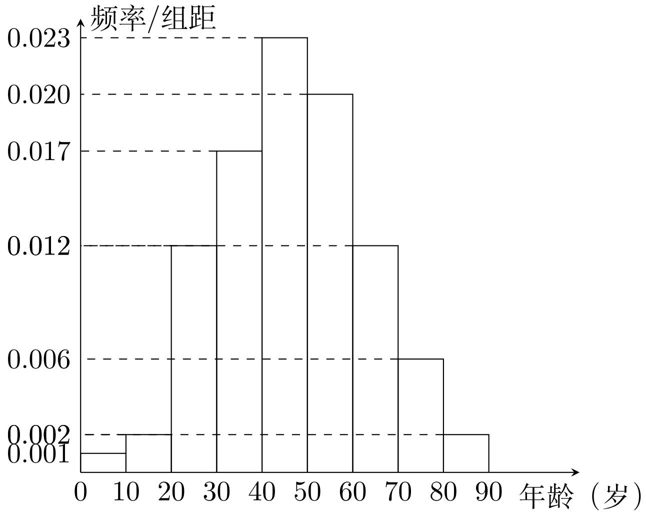
(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$，求 B.

19. 在某地进行流行病学调查，随机调查了 100 位某种疾病患者的年龄，得到如下样本数据的频率分布直方图.

(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄（同一组数据用该区间的中点值作代表）;

(2) 估计该地区一位这种患者年龄位于区间 $[20,70)$ 的概率;

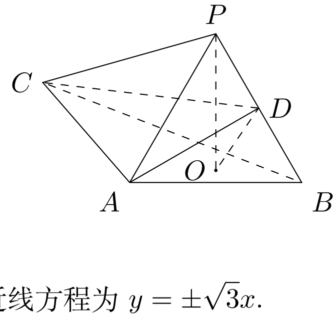
(3) 已知该地区这种疾病患者的患病率为 0.1%，该地区年龄位于区间 $[40,50)$ 的人口数占该地区总人口数的 16%，从该地区选出 1 人，若此人的年龄位于区间 $[40,50)$，求此人患这种疾病的概率（以样本数据中患者的年龄位于各区间的频率作为患者的年龄位于该区间的概率，精确到 0.0001）.



20. 如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA = PB$，$AB \perp AC$，E 为 PB 的中点.

(1) 证明：$OE //$ 平面 PAC;

(2) 若 $\angle ABO = \angle CBO = 30^\circ$，$PO = 3$，$PA = 5$，求二面角 $C - AE - B$ 的余弦值.



21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点，点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 在 C 上，且 $x_1 > x_2 > 0$，$y_1 > 0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M，从下面 ① ② ③ 中选取两个作为条件，证明另一个成立.

① M在 AB 上; ② $PQ//AB$; ③ $|AM| = |BM|$.

22. 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时，$f(x) < -1$，求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$，证明 $\dfrac{1}{\sqrt{1^1+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

13.3 2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题（乙卷理科）

考试时间 120 分钟.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 3\}$，则

(A) $2 \in M$ (B) $3 \in M$ (C) $4 \notin M$ (D) $5 \notin M$

2. 已知 $z = 1 - 2i$，且 $z + a\bar{z} + b = 0$，其 a, b 为实数，则:

(A) $a = 1, b = -2$ (B) $a = -1, b = 2$

(C) $a = 1, b = 2$ (D) $a = -1, b = -2$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，满足 $|\boldsymbol{a}| = 1$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}| = 3$，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$: $b_1 = 1 + \dfrac{1}{\alpha_1}$，$b_2 = 1 + \dfrac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$，$b_3 = 1 + \dfrac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}$，$\cdots$，依此类推，其中 $\alpha_k \in \mathbb{N}^*(k = 1, 2, \cdots)$，则

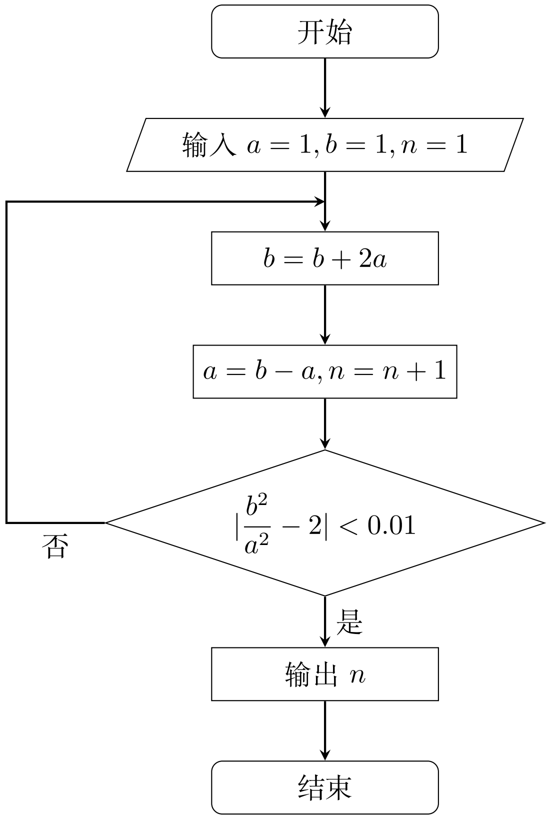
(A) $b_1 < b_5$ (B) $b_3 < b_8$ (C) $b_6 < b_2$ (D) $b_4 < b_7$

5. 设 F 为抛物线 $C : y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3, 0)$，若 $|AF| = |BF|$，则 $|AB| =$

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $3\sqrt{2}$

6. 执行下面的程序框图，输出的 $n =$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 AB,BC 的中点，则

(A) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　　(B) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

(C) 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC　　(D) 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则 $a_8=$

(A) 14　　(B) 12　　(C) 6　　(D) 3

9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立，已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p，则

(A) p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

(B) 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

(C) 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

(D) 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，以 C 为实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 过点 D 的切线与 C 交于 M,N 两点，其中点 N 在 C 的右支，且 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，则 C 的离心率为[1]

[1]【编者注】原题目为：双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，以 C 为实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 过点 D 的切线与 C 交于 M,N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，则 C 的离心率为

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5, g(x)-f(x-4)=7$. 若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22} f(k)=$

(A) -21 (B) -22 (C) -23 (D) -24

二. 填空题.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作,则甲、乙都入选的概率为____________.

14. 过四点 $(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，$(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为____________.

15. 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T. 若 $f(T)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为____________.

16. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2(a>0\text{且}a\neq1)$ 的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是____________.

三. 解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（一）必考题.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知

$$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A).$$

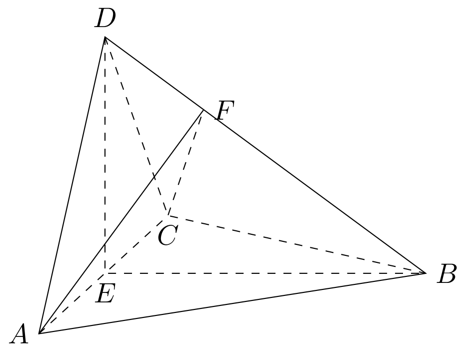
(1) 证明：$2a^2=b^2+c^2$;

(2) 若 $a=5$，$\cos A=\dfrac{25}{31}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E 为 AC 的中点.

(1) 证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD;

(2) 设 $AB=BD=2$，$\angle ACB=60^\circ$，点 F 在 BD 上，当 $\triangle AFC$ 的面积最小时，求 CF 到平面 ABD 所成角的正弦值.



19. 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位 : m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$，$\sum\limits_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$，$\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有树木的根部横截面积总和为 $186\mathrm{m}^2$. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$，$\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$ 两点.

(1) 求 E 的方程；

(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M,N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$，证明：直线 MH 过定点.

21. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + ax\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0),(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

（二）选考题：请考生在第 22、23 题中任选一题作答.

[坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos 2t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ （t 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) + m = 0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程；

(2) 若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

[不等式选讲]

23. 已知 a,b,c 都是正数，且 $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} = 1$，证明：

(1) $abc \leq \dfrac{1}{9}$；

(2) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2abc}}$.

13.4

2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题（甲卷理科）

考试时间 120 分钟.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$

(A) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　(B) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　(C) $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　(D) $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

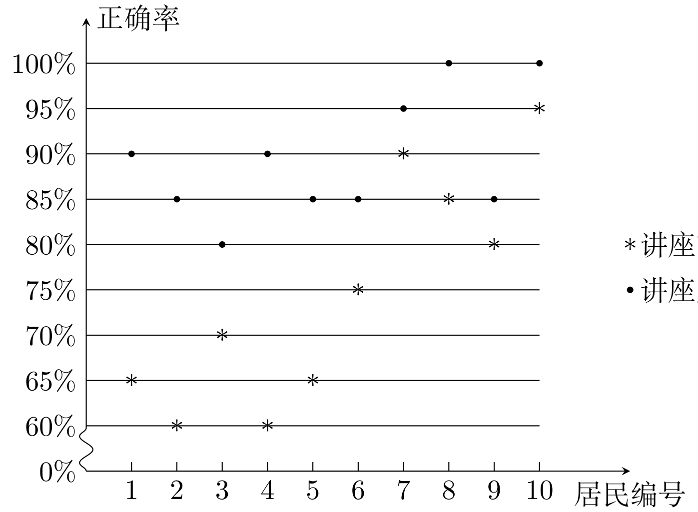
2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识，为了解讲座效果，随机抽取 10 位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：

(A) 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%

(B) 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

(C) 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

(D) 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

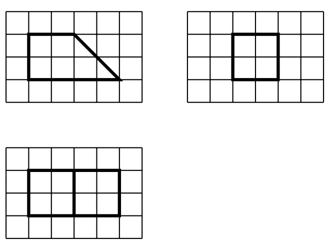


3. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1.2\}$，$B=\left\{x|x^2-4x+3=0\right\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

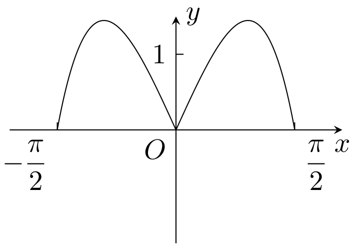
(A) $\{1,3\}$　(B) $\{0,3\}$　(C) $\{-2,1\}$　(D) $\{-2,0\}$

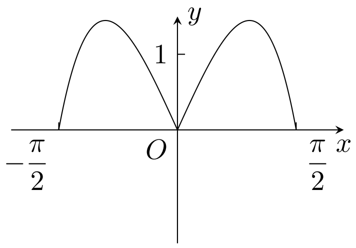
4. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该多面体的体积为

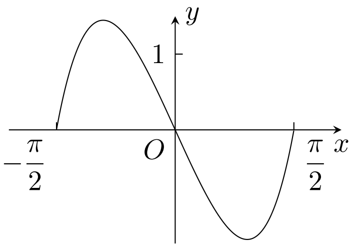
(A) 8　(B) 12　(C) 16　(D) 20

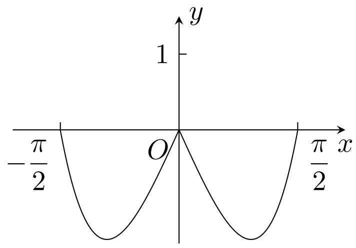


5. 函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的图像大致为

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$

(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$，则

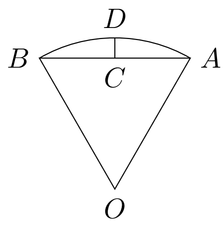
(A) $AB=2AD$ (B) AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

(C) $AC=CB_1$ (D) B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

8. 沈括的《梦溪笔谈》是我国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”。如图，$\overset{\frown}{AB}$ 是以 O 为圆心，OA 为半径的圆弧，C是AB 的中点，D 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，$CD\perp AB$，“会圆术”给出 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长的近似值 s 的计算公式，$s=AB+\frac{CD^2}{OA}$. 当 $OA=2,\angle AOB=60°$时，$s=$

(A) $\frac{11-3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{11-4\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$



9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$，若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，点P,Q均在C 上，且关于 y 轴对称，若直线 AP，AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$，则 C 的离心率为

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点，则 ω 的取值范围是

(A) $[\dfrac{5}{3},\dfrac{13}{6})$ (B) $[\dfrac{5}{3},\dfrac{19}{6})$ (C) $(\dfrac{13}{6},\dfrac{8}{3}]$ (D) $(\dfrac{13}{6},\dfrac{19}{6}]$

12. 已知 $a=\dfrac{31}{32}$，$b=\cos\dfrac{1}{4}$，$c=4\sin\dfrac{1}{4}$，则

(A) $c>b>a$ (B) $b>a>c$ (C) $a>b>c$ (D) $a>c>b$

二. 填空题.

13. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$, 且 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, 则 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$________.

14. 若双曲线 $y^2-\dfrac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切, 则 $m=$________.

15. 从正方体的 8 个顶点中任取 4 个，则这 4 个点在同一个平面的概率为________.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$，当 $\dfrac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$________.

三. 解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（一）必考题.

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

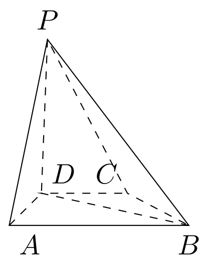
(1) 证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

(2) 若 a_4,a_7,a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值。

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$底面$ABCD, CD\parallel AB, AD=DC=CB=1, AB=2, DP=\sqrt{3}$.

(1) 证明：$BD\perp PA$；

(2) 求 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值。



19. 甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军。已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 $0.5,0.4,0.8$，各项目的比赛结果相互独立。

(1) 求甲学校获得冠军的概率；

(2) 用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望。

20. 设抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点，当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF|=3$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 MD，ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN，AB 的倾斜角分别为 α，β，当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程。

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x+x-a$.

(1) 若 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围；

(2) 证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，则 $x_1x_2<1$.

（二）选考题：请考生在第 22、23 题中任选一题作答.

[坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2+t}{6}, \\ y=\sqrt{t}, \end{cases}$ （t 为参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{2+s}{6}, \\ y=-\sqrt{s}, \end{cases}$ （s 为参数）.

(1) 写出 C_1 的普通方程；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标，及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

[不等式选讲]

23. 已知 a,b,c 都是正数，且 $a^2+b^2+4c^2=3$，证明：

(1) $a+b+2c\leq 3$；

(2) 若 $b=2c$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3$.

13.5

2022 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题（浙江卷）

考试时间 120 分钟.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,4,6\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2\}$　(C) $\{2,4,6\}$　(D) $\{1,2,4,6\}$

2. 已知 $a,b\in\mathbb{R}$，$a+3\mathrm{i}=(b+\mathrm{i})\mathrm{i}$ （i 为虚数单位），则

(A) $a=1,b=-3$　(B) $a=-1,b=3$　(C) $a=-1,b=-3$　(D) $a=1,b=3$

3. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 2x+y-7\leq 0, \\ x-y-2\leq 0, \end{cases}$ 则 $z=3x+4y$ 的最大值是

(A) 20　　(B) 18　　(C) 13　　(D) 6

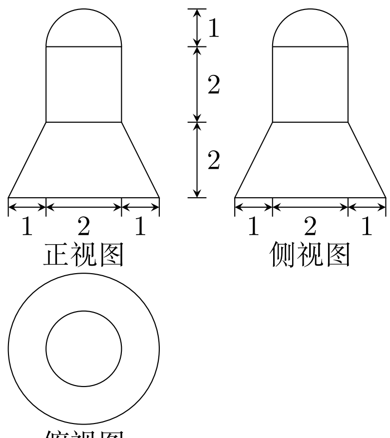
4. 设 $x\in\mathbb{R}$，则 "$\sin x=1$" 是 "$\cos x=0$" 的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

5. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是

(A) 22π　　(B) 8π　　(C) $\dfrac{22}{3}\pi$　　(D) $\dfrac{16}{3}\pi$



6. 为了得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图像，只要把函数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图像上所有的点

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{5}$ 个单位长度　　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{5}$ 个单位长度

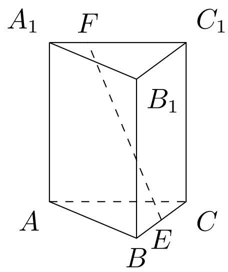
(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{15}$ 个单位长度　　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{15}$ 个单位长度

7. 已知 $2^a=5$，$\log_8 3=b$，则 $4^{a-3b}=$

(A) 25　　(B) 5　　(C) $\dfrac{25}{9}$　　(D) $\dfrac{5}{3}$

8. 如图，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AC=AA_1$，E,F 分别是棱 BC,A_1C_1 上的点. 记 EF 与 AA_1 所成的角为 α，EF 与平面 ABC 所成的角 β，二面角 $F-BC-A$ 的平面角为 γ，则

(A) $\alpha\leq\beta\leq\gamma$　　(B) $\beta\leq\alpha\leq\gamma$　　(C) $\beta\leq\gamma\leq\alpha$　　(D) $\alpha\leq\gamma\leq\beta$



9. 已知 $a,b\in\mathbb{R}$，若对任意 $x\in\mathbb{R}$，$a|x-b|+|x-4|-|2x-5|\geq 0$，则

(A) $a\leq 1, b\geq 3$ (B) $a\leq 1, b\leq 3$

(C) $a\geq 1, b\geq 3$ (D) $a\geq 1, b\leq 3$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{3}a_n^2$ $(n\in\mathbb{N}^*)$，则

(A) $2<100a_{100}<\dfrac{5}{2}$ (B) $\dfrac{5}{2}<100a_{100}<3$

(C) $3<100a_{100}<\dfrac{7}{2}$ (D) $\dfrac{7}{2}<100a_{100}<4$

二. 填空题.

11. 我国南宋著名数学家秦九韶，发现了从三角形三边求面积的公式，他把这种方法称为“三斜求积术”，它填补了我国传统数学的一个空白. 如果把这个方法写成公式，就是 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$，其中 a,b,c 是三角形的三边，S 是三角形的面积. 设某三角形的三边 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}, c=2$，则该三角形的面积 $S=$____________.

12. 已知多项式 $(x+2)(x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2=$____________.

13. 若 $3\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{10}$, $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha=$____________,$\cos 2\beta=$____________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, x\leq 1,\\ x+\dfrac{1}{x}-a, x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(\dfrac{1}{2}))=$____________；若当 $x\in[a,b]$ 时，$1\leq f(x)\leq 3$，则 $b-a$ 的最大值是 ____________.

15. 现有 7 张卡片，分别写上数字 1,2,2,3,4,5,6. 从这 7 张卡片中随机抽取 3 张，记所抽取的卡片上数字的最小值为 ξ，则 $P(\xi=2)=$____________，$E(\xi)=$____________.

16. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且斜率为 $\dfrac{b}{4a}$ 的直线交双曲线于点 $A(x_1,y_1)$，交双曲线的渐近线于点 $B(x_2,y_2)$ 且 $x_1<0<x_2$. 若 $|FB|=3|FA|$，则双曲线的离心率是____________.

17. 设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上，则 $|\overrightarrow{PA_1}|^2+|\overrightarrow{PA_2}|^2+\cdots+|\overrightarrow{PA_8}|^2$ 的取值范围是____________.

三. 解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $4a=\sqrt{5}c$，$\cos C=\dfrac{3}{5}$.

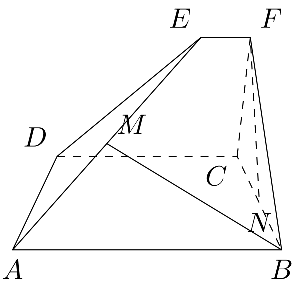
(1) 求 $\sin A$ 的值；

(2) 若 $b=11$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图，已知 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形，$AB//DC$，$DC//EF$，$AB=5$，$DC=3$，$EF=1$，$\angle BAD=\angle CDE=60^\circ$，二面角 $F-DC-B$ 的平面角为 60°，设 M,N 分别为 AE,BC 的中点.

(1) 证明：$FN\perp AD$;

(2) 求直线 BM 与平面 ADE 所成角的正弦值.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-1$，公差 $d>1$. 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n（$n\in\mathbb{N}^*$）.

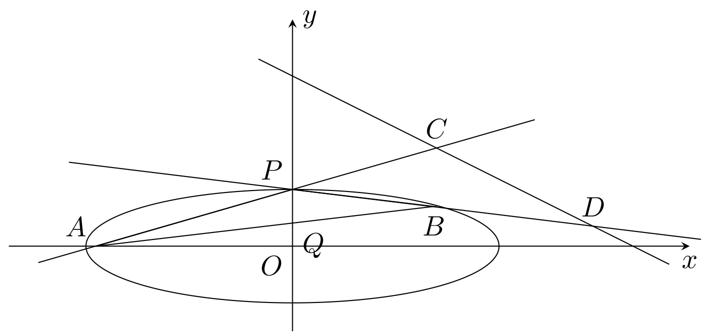
(1) 若 $S_4-2a_2a_3+6=0$，求 S_n;

(2) 若对于每个 $n\in\mathbb{N}^*$，存在实数 c_n，使得 a_n+c_n，$a_{n+1}+4c_n$，$a_{n+2}+15c_n$ 成等比数列，求 d 的取值范围.

21. 如图，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+y^2=1$. 设 A,B 是椭圆上异于 $P(0,1)$ 的两点，且点 $Q(0,\dfrac{1}{2})$ 在线段 AB 上，直线 PA,PB 分别交直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 于 C,D 两点.

(1) 求点 P 到椭圆上的点的距离的最大值;

(2) 求 $|CD|$ 的最小值.



22. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{2x}+\ln x(x>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $a,b\in\mathbb{R}$，曲线 $y=f(x)$ 上不同的三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$ 处的切线都经过点 (a,b). 证明:

(i) 若 $a>\mathrm{e}$，则 $0<b-f(a)<\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{\mathrm{e}}-1)$;

(ii) 若 $0<a<\mathrm{e}$，$x_1<x_2<x_3$，则 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}+\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}<\dfrac{2}{a}-\dfrac{\mathrm{e}-a}{6\mathrm{e}^2}$.

（注：$\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）

13.6 习题参考答案

第八章 立体几何与空间向量

习题 8.1

1. $8\sqrt{3}$

2. 2

3. $\sqrt{3}$

4. $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$

5. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. $\sqrt{6}$

7. 84π

8. $\frac{\sqrt{2}}{12}$

9. $\sqrt{11}$

10. $\frac{9\pi}{4}$

11. 25π

12. 1

13. 3

14. 20

15. $\frac{\sqrt{5}}{60}$

16. 3

17. $[0,\arctan\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)]$

18. $\frac{\sqrt{3}}{48}$

19. $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

20. $\frac{11}{72}$

21. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

22. $\sqrt{57}$

23. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

24. 32

25. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

26. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

27. $\frac{20\sqrt{39}}{39}$

28. $\frac{3}{2}\pi$

29. $\sqrt{7}$

30. 16π

31. $[\frac{4}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}]$

32. $8\sqrt{6}$

33. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$

34. $2\sqrt{6}$

35. $4+2\sqrt{6}$

36. $9:7$，$27:23$

37. $\sqrt{3}$

38. $9\sqrt{3}$

39. 50π

40. $\frac{4}{3(1+\sqrt{2})^3}$

41. $\frac{4}{3}$

42. $\frac{\sqrt{6}\pi}{216}$

43. $\frac{\sqrt{805}}{10}$

44. $\sqrt{6}$

45. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46. $\dfrac{2}{3}$

47. 0

习题 8.2

1. $\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$

2. $\pi R^2(1+\sqrt{5})$

3. $\dfrac{1}{2}$

4. $\dfrac{\pi}{2}$

5. 14

6. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

7. $(7-4\sqrt{3})\pi$

8. $\dfrac{3}{16}$

9. $\dfrac{28\pi}{3}$

10. $\sqrt{7}+\sqrt{3}+1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

11. $\dfrac{\sqrt{189}-9}{2}$

12. 36

13. 36

14. 无数条

15. $\sqrt{7}+2$

16. $\dfrac{3\sqrt{55}}{64}$

17. $2\sin(42^\circ)$

18. $\dfrac{1}{2}$

19. (1)(3)

20. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

21. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

22. 2

23. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

24. $\dfrac{\pi}{2}$

25. 9

26. $(\dfrac{1}{2}, 1)$

27. $[\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$

28. $\dfrac{\sqrt{13}}{8}$

29. $\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$

30. 18

31. $4\sqrt{3}$

32. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{24}$

习题 8.3

1. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $8\sqrt{3}$

3. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. 40°

5. 5

6. $\{0, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, 2\}$

7. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

8. $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

10. $2\sqrt{13}$

11. $2\sqrt{70}$

12. $8\sqrt{3}$

13. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

14. 45°

15. 2

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

17. $\dfrac{4\sqrt{21}}{9}$

18. 120°

19. $10\sqrt{2}\text{cm}$

20. 60°

21. $\sqrt{13}$

22. $\dfrac{6}{7}$

23. $(2\sqrt{15}, 2\sqrt{13})$

24. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

25. 7

26. 2

27. 6π

28. 750

29. 90° 或 36°

30. $\dfrac{18\pi}{13}$

31. $\dfrac{16\sqrt{5}}{375}$

32. $\dfrac{\sqrt{3}b^3}{12(a+b)(b+c)}$

33. $\sqrt{2}$

34. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

35. $4+2\sqrt{6}$

36. $\dfrac{2}{3}$

37. $(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2})$

38. 12π

39. $6\sqrt{5}-12$

40. $\dfrac{\pi}{3}$

41. $\dfrac{1}{3}$

42. 1

43. $\dfrac{1}{5}$

44. $\dfrac{\pi}{2}$

45. 60°

46. $\dfrac{1}{4}$

47. $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})a$

48. $\dfrac{2}{9}$

49. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

50. $\dfrac{\sqrt{6}R}{3+\sqrt{6}}$

51. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

52. 6

53. $2\sqrt{7}$

54. $\dfrac{4}{3}$

55. $\arctan\sqrt{2}$

56. $64\sqrt{3}$

57. 14

58. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

59. $\dfrac{8}{3}$

60. $\dfrac{2014}{3}$

61. 2

62. $\sqrt{2}a$

63. $\dfrac{13}{36}$

习题 8.4

1. (1) $[0, 2.5)$

   (2) $\pi - \arccos\dfrac{8}{25}$

(3) $\frac{3\sqrt{561}-82}{24}$

2. (1) $\frac{a^3}{4}$

   (2) $\frac{4}{5}$

3. (1) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

   (2) $\frac{8}{3}$

4. (1) 略

   (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. (1) 略

   (2) 略

   (3) $\frac{8\sqrt{5}}{25}$

6. (1) F 为 PD 中点

   (2) $\frac{4\sqrt{31}}{31}$

7. (1) 略

   (2) $\frac{6\sqrt{41}}{41}$

   (3) 不存在

8. (1) 略

   (2) $\frac{\pi}{4}$

   (3) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

9. (1) 略

   (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. (1) $\frac{1}{2}$

    (2) 略

    (3) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

第九章 直线与圆/解析几何 I

习题 9.1

1. $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{5})$
2. $\frac{2}{3}$
3. ② ③
4. 存在；$|CD|_{\max}=4+\sqrt{2}$
5. $a=0$
6. $a+b=-\frac{1}{2}$
7. $5\sqrt{2}$
8. $\sqrt{10}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $[0,\sqrt{13})$
11. $x+7y=15$ 或 $7x-y=5$

习题 9.2

1. 两个半圆
2. $2\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$
3. $t=\frac{4}{3}$
4. $[0,2]$
5. $(\frac{4}{3},2)$(切点弦过定点)
6. $(0,\frac{3}{2}\sqrt{3})\cup(\frac{3}{2}\sqrt{3},6\sqrt{3})$
7. $n(n-1)$
8. $\frac{4}{3}$
9. $x-y+1=0$
10. 72
11. $y=\frac{4}{3}x$
12. $6\sqrt{5}$
13. $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

14. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $\frac{1}{2(\pi+4)}$

16. $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

17. $[0,\frac{12}{5}]$

18. $\frac{25+3\sqrt{41}}{2}$

19. $x^2-y^2=(x^2+y^2)^2$

20. $m-2n=1$

21. (1) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})_{\min}=-2$

(2) $(S_{\triangle POM}\cdot S_{\triangle PON})_{\max}=4$

第十章 圆锥曲线/解析几何 II

习题 10.1

1. $\arccos\frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1(y\neq 0)$

4. $(\sqrt{2},1)$ 或 $(\sqrt{2},-1)$ (注意上下两侧)

5. $[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

6. $\frac{1}{5}$

7. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

8. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. $(\frac{4\sqrt{3}}{21},\frac{\sqrt{3}}{3})$

11. $(2\sqrt{3},3)$

12. $-\frac{11}{5}$

13. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

14. 充分不必要条件

15. 5

16. $e=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17. $\frac{16}{7}$

18. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(\frac{a^2}{b})^2}=1(|x|<a)$
其轨迹为一个椭圆（去掉其与 x 轴的两个交点 $(\pm a,0)$）

20. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

21. $\sqrt{1+\sqrt{3}}$

22. $(\frac{1}{2},1)$

23. $\sqrt{3}$

24. $|MN|_{\min}=\sqrt{6}$

25. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

26. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

27. $\sqrt{2}$

28. $\frac{9}{16}\pi$

29. $\frac{1}{7}$

30.

(1) 点 G 的轨迹 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 动点 P 在定圆 $x^2+y^2=5$ 上

31. $(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{min}=18\sqrt{2}-27$

32. $S_{\triangle AOB}\in[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

33. $[5,21]$

34. a

35. 相切或相交（$k^2=\frac{1}{2}$ 时相切，其余情况相交，记得讨论斜率不存在 kora!）

36. $[2,14]$

37. (1) 椭圆 E: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 直线 l: $x+y-6=0$

(2) d_1、d_2、d_3 可以是某三角形三条边的边长

38. $S_{\triangle ABC}=9$

39. $|OP|=\frac{\sqrt{6}}{3}$

40. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

41. $25x-20y=64$

42. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$

43. $kx+y-2=0$

44. $(0,\frac{\sqrt{6}}{3}]$

45. $(1,\frac{1}{2})$（熟悉的切点弦过定点对吧?）

46. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

47. $\frac{k_1}{k_2}=\frac{a-1}{a+1}$

习题 10.2

1. $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$

2. $\sqrt{2}$

3. $4\sqrt{3}$（实轴长是 $2a$! ）

4. 5

5. $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$

6. $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2})$

7. $(1,\frac{3}{2})$

8. 5

9. $[\sqrt{2},\frac{\sqrt{21}}{3})$

10. $\sqrt{5}$

11. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

12. $\sqrt{3}+1$

13. $\sqrt{5}+2$

14. $[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}]$

15. $\sqrt{3}$

16. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

17. $\sqrt{2}$

18. $\frac{16}{7}$

19. $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$

20. $\sqrt{2}$

21. $\sqrt{2}$

22. $\frac{\sqrt{37}}{5}$

23. $\frac{4}{5}$

24. $\sqrt{3}$

25. $\sqrt{2}+1$

26. $\sqrt{3}+1$

27. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

28. $(\frac{2}{3},+\infty)$

29. $\frac{\sqrt{6}}{2}-1$

30. 5

31. 2

32. $\sqrt{6}$

33. 2

34. 6

35. $e=1+\sqrt{2}$

36. (1) 略

(提示：这是个结论，注意到垂直，用旋转角建立代换方程即可快速搞定)

(2) $\frac{1}{|\overrightarrow{OP_1}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{OP_2}|^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$
(只要第一问会了第二问还不秒杀？不要忘记在同一支上的情况！)

37. $k=\pm3$

习题 10.3

1. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
2. $(\frac{1}{5},1)$
3. $st=1$
4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{3}$
6. $2\sqrt{15}$
7. $3\sqrt{2}$
8. 3
9. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}p,0)$
10. $(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$ 和 $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$
11. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
12. $\frac{\pi}{4}$
13. 1 或 0
14. $10\sqrt{5}$
15. 2
16. $[1,+\infty)$
17. 2
18. 2

习题 10.5

第一部分. 椭圆中的定点、定直线、定值问题

1. (1) $k_l\cdot k_{OM}=-\frac{a^2}{b^2}$
   (2) $k_l=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{a}{b}$
2. (1) 线段 AB 中点 M 的轨迹方程为:
   $x=-2\ (-\sqrt{2}<y<\sqrt{2})$
   (2) $AB_{\max}=2\sqrt{2}$
3. (1) 定点 $Q(-\frac{25}{b},\frac{9}{b})$
   (2) 略
4. (1) 略
   (2) $(S_{\triangle PAB})_{\min}=\frac{9}{2}$
5. (1) 点 Q 的轨迹方程为：$x+y=2$
   (2) $(S_{\triangle AQB})_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{12}$
6. (1) 略
   (2) $(\frac{PQ}{MF})_{\max}=\sqrt{3}$
7. (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$
   (2) 点 M 的轨迹方程为:$x=-8$
   (3) $\frac{|NF_1|}{|MF_1|}=\frac{1}{2}$
8. (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$
   (2) $(S_1-S_2)_{\max}=15$
9. (1) l 过定点 $G(4,0)$
   (2) MN' 恒过定点 $(4,0)$
10. (1) $(x-2)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$
   (2) 略 (分情况讨论)
11. (1) l 的方程为：$x=4$
   (2) 定点为：$(1,0)$ 和 $(7,0)$
   注：只求出一个不扣分，也可以先把定点蒙出来再做证明
12. 直线 AB 过定点: $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
13. (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$
   (2) 定点为：$(\frac{2}{7},0)$
   只有这一个定点！$(2,0)$ 舍去
14. (1) 直线 l 过定点：$(0,-\frac{1}{2})$

(2) $S_{\triangle BPQ} \in [\frac{9}{4}, +\infty)$

15. (1) 直线 MN 过定点：$(\frac{3}{5}, 0)$

(2) $(S_{\triangle FMN})_{max} = \frac{4}{25}$

16. (1) $k \cdot k_1 = 1$

(2) $\forall k$, 直线 MN 过定点：$(0, -\frac{5}{3})$

17. (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) $k_{AB} = -\frac{1}{2}$

18. $k_1 k_2 = \frac{1}{2}$

19. (1) 略（提示，直线的参数方程会很快）

(2) $k_1 + k_2 = 0$

习题 10.5

第二部分. 椭圆中的求值、求范围问题

1. l 的方程为：$y = \pm(x + c)$

2. $\frac{x^2}{4+2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{4-2\sqrt{2}} = 1$

3. 最大距离为：$\frac{4}{3}$

4. 略（提示，使用参数方程更快哦）

5. 最大值为：$2\sqrt{2}$

6. $S_{\triangle OPQ} \in (0, 1)$

7. $t = \pm 2\sqrt{3}$ 时，$k_{\max} = \frac{4}{3}$

8. (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $A(0, 2)$ $(0, -2)$

9. (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(2) $k = \frac{3}{5}$

10. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $y = 2(x - 1)$

11. (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) 所求圆的方程为：$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

(3) $ON = \sqrt{2}$

12. (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $m + n = -4$

(3) $(S_{\triangle QAB})_{\min} = \frac{16}{3}$

13. (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) $\lambda \in (0, 3 + 2\sqrt{2})$ 且 $\lambda \neq 1$

14. (1) $e = \frac{1}{2}$

(2) $\frac{2S_1S_2}{S_1^2 + S_2^2} \in (0, \frac{9}{41})$

习题 10.5

第三部分. 椭圆中的探究性问题

1. $|AC|^2 < |CD| \cdot |CB|$

2. (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 直线 l 的方程为：$x - y - 2 = 0$ 或 $x + y - 2 = 0$

3. 以椭圆中心为坐标原点，长轴为 x 轴，建立平面直角坐标系，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，若 $a^2 = 2b^2$，则必有 $BA \perp CA$

4. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 交于定点 $N(\frac{5}{2}, 0)$

5. (1) 标准方程为：$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(2) $k_1 + k_2 = 0$

6. (1) 四边形 $PMQN$ 面积最小值 $S_{\min} = 8$

(2) $D(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

7. (1) $(S_{\triangle OAB})_{\max} = \frac{ab}{2}$

(2) 存在，椭圆为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$

习题 10.5

第四部分. 与抛物线有关的解析几何问题

1. (1) 略

(2) $(S_{\triangle ABE})_{\min}=\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$
此时 $\lambda=\dfrac{1}{2}$

2. (1) l 过定点 $F(\dfrac{p}{2},0)$
(2) 四边形 $ABB'A'$ 面积最小值 $S_{\min}=\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$，此时四边形 $ABB'A'$ 为矩形

3. (1) AB 过定点 $(k,1)$
(2) 易证

4. (1) MN 过定点 $(13,8)$
(2) $(R_{\triangle ABC\text{的外接圆}})_{\min}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

5. (1) AB 过定点 $(3,2)$
(2) $(S_{\triangle ABC})_{\min}=4\sqrt{2}$

6. (1) AB 过定点 $(5,-2)$
(2) $(x-3)^2+y^2=8(x\neq 1)$

7. (1) l 过定点 $(0,2)$
(2) 四边形 $OABC$ 面积最小值 $S_{\min}=3$

8. (1) M 的轨迹方程为：$y=-2(x>-1$且 $x\neq 5)$，是一条射线（去掉端点和 $(5,-2)$）
(2) $(S_{\triangle PAB})_{\min}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$

9. $S_1>3S_2$

10. 略

11. 弦长为 $\sqrt{3}$, 此时 $k=0$

12. l 的方程为：$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+1$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+1$

13. (1) $x^2=4y$
(2) $|AC|\cdot|BD|=1$
(3) $(S_{\triangle ACM}+S_{\triangle BDM})_{\min}=2$

14. (1) 抛物线方程：$y^2=4x$,
椭圆方程：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$
(2) ① $S_{\triangle F_1CD}\in(4,\dfrac{5\sqrt{6}}{3})$
② $\dfrac{|BE|\cdot|GF_2|}{|CD|\cdot|HF_2|}=3$

第十一章 导数

习题 11.1

1. 3
2. $[5-2\ln 2,\mathrm{e}^2-1)$
3. 2
4. $\sqrt{2}$
5. 2
6. $3-2\sqrt{2}$
7. $\dfrac{1+\ln(\ln 2)}{\ln 2}\sqrt{2}$
8. 15

习题 11.2

1. $a\geqslant 0$
2. $x>0$
3. $(-\infty,-2018)$
4. $(-1,0)\cup(0,1)$
5. $\dfrac{13}{16}\pi^2$
6. -2
7. $(0,\dfrac{1}{2})$
8. $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$
9. $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$
10. $(0,1)\cup(\mathrm{e}^{\frac{1}{2\mathrm{e}}},+\infty)$
11. $(0,4e^{-2})$
12. $0<a<(2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

13. $6-6\ln 6$

14. 6

15. $m<2+2\sqrt{2}$

16. $b=-3$

17. $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

18. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

19. $a\leq 1$

20. 8060

21. $[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\dfrac{1}{2\mathrm{e}})$

22. $x\geq 3$或$x\leq\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

23. 8

24. (1) $a\leq 2$，在 $(0,+\infty)$ 递减，$a>2$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$，$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递增.

25. (1) $0<a\leq 2\sqrt{2}$，在 $(0,+\infty)$ 递减，$a>2\sqrt{2}$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$，$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty)$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 递增.

26. (1) $a\leq 0$, 在 $(0,+\infty)$ 单调递减, 没有极值点, $a>0$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 递增, 有一个极值点

27. (1) $a\leq 0$, 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, $a>0$, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增.

28. (1) $a\geq -2$，单调递减区间为 $(-1,1)$，$a<-2$，单调递减区间为 $(\sqrt{\dfrac{a+2}{a}},1)$,$(-1,-\sqrt{\dfrac{a+2}{a}})$.

(2) 极小值为 $f(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{4}{3}+\ln 3$, 极大值为 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{4}{3}-\ln 3$,

29. (1) $a>1$, 单调递减区间为 $(0,\dfrac{1}{a}]$，单调递增区间为 $[\dfrac{1}{a},1)$,

(2) 当 $a=1$ 时, 无极值, 当 $a>1$ 时,$f(x)$ 的极小值为 $f(\dfrac{1}{a})=-(a+\dfrac{1}{a})\ln a+a-\dfrac{1}{a}$,$f(x)$ 的极大值为 $f(a)=(a+\dfrac{1}{a})\ln a-a+\dfrac{1}{a}$, 当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 的极小值为 $f(a)=(a+\dfrac{1}{a})\ln a-a+\dfrac{1}{a}$,$f(x)$ 的极大值为 $f(\dfrac{1}{a})=-(a+\dfrac{1}{a})\ln a+a-\dfrac{1}{a}$.

30. (1) $n=6$

(2) 当 $n\leq 1$ 时, $f(x)$ 最大值为 $f(1)=m-n$, 当 $n>1$ 时，$f(x)$ 最大值为 $f(n)=m-1-\ln n$,

31. (1) $f(x)=[a(x^2)+x-1](\mathrm{e}^x)$，当 $-\dfrac{1}{2}<a<1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0]$, $[-\dfrac{2a+1}{a},+\infty)$，单调递增区间为 $[0,-\dfrac{2a+1}{a}]$. 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,+\infty)$，当 $a<=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-\dfrac{2a+1}{a}]$, $[0,+\infty)$，单调递增区间为 $[-\dfrac{2a+1}{a},0]$.

32. (1) 切线方程为 $y=3x$.

(2) 当 $a\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1\ +\infty)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,-1-a)$ 上单调递减，在 $(-1-a,+\infty)$ 上单调递增.

33. (1) $g(x)$ 的单调递增区间为 $[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$,$g(x)$ 的单调递减区间为 $[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$

(2) a 的取值范围为 $(-\mathrm{e}^{-2\pi},-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}})$.

34. (1) $m\leq 0$,

(2) $a=1/2$,

习题 11.3

1. $(-3,-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})\cup(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},3)$

2. 注意到 $t=0$ 或 $t=-\sin\alpha$ 或 $t=\sin\beta$，自然有 t 的绝对值小于等于 1

3. 1

4. $(0,1)$

5. 3

6. $-\frac{5}{2}<a\leq -1$

7. $b=-3$

8. 利用辗转相除法可以证明 $f'(x)$ 不整除 $f(x)$，从而得到结论（事实上，在高等代数的学习中，可以学习到更多的相关结论）

9. $[\frac{1}{2e},e]$

10. $a\leq \frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}$

11. (1) $p\geq 1$,
    (2) $p>\frac{4e}{e^2-1}$,

12. $a\leq 1$

13. $a\leq 4$

14. $a\leq 2$

15. (1) $a\leq 3$,
    (2) 当 $0<m<\frac{1}{e^2}$ 时,$f(x)$ 最小值为 $f(\frac{1}{e^2})=-\frac{1}{e^2}$,$f(x)$ 最大值为 $f(m+3)=(m+3)[\ln(m+3)+1]$, 当 $m>\frac{1}{e^2}$ 时,$f(x)$ 最小值为 $f(m)=m(\ln m+1)$,$f(x)$ 最大值为 $f(m+3)=(m+3)[\ln(m+3)+1]$,

16. (1) $-1\leq a<0$,
    (2) $b>-\frac{3}{2}$,

17. (2) $a\geq 1$

习题 11.4

1. 略

2. 略

3. 略

4. 略

5. 略

6. (1) 略
   (2) $0<a<\frac{1}{e}$或$\frac{1}{e}<a<\frac{1}{2}$

7. 略（事实上，若将 $\frac{1}{n}$ 当作主元 x，则右式为 $\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 点处的二阶泰勒展开式）

8. 略

9. 略

10. 略

11. 略

12. 略

13. (1) 有唯一零点 $x=1$.

14. (1) $(-\frac{5}{2},+\infty)$
    (2) 当 $\frac{3}{2}<a<2\sqrt{2}-1$ 时，只有一个公共点; 当 $a=2\sqrt{2}-1$ 或 $a=2$ 时，有两个公共点；当 $a>2\sqrt{2}-1$ 且 $a\neq 2$ 时，有三个公共点.

15. (1) 当 $0<a\leq\frac{1}{3}$ 时,$h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{3-a}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3-a}{2},+\infty)$ 上单调递增；当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1-a}{2},a)$ 上单调递增，在 $(a,\frac{3-a}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{3-a}{2},+\infty)$ 上单调递增；当 $a\geq 1$ 时，$h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1-a}{2},+\infty)$ 上单调递增.
    (2) $a=\frac{1}{2}$

16. (2) $-\frac{3}{e}-\frac{1}{6}<m<-1$

17. (2) 当 $0 < a < 1$ 时，$f(x)$ 有两个零点；当 $a = 1$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $a > 1$ 时，$f(x)$ 无零点。

18. $b \geq -\ln 2$

19. (1) 略

(2) 3

20. (1) $a = -1, b = 2$

(2) $\frac{e}{2}$, 其中 $a = \sqrt{e}, b = \frac{\sqrt{e}}{2}$

21. (2) $k \geq \frac{1}{2}$

22. $A \geq -\frac{1}{2}$

23. (1) $m \geq \frac{1}{2}$

24. (1) $m \leq \frac{1}{2}$

25. (1) $a \geq -2$

26. (1) 略

(2) $a \leq 2$

27. 略（实际上是对数均值不等式的左半部分）

28. 略（实际上是对数均值不等式的右半部分）

29. (2) 略 (利用类似于证明对数均值不等式的方法齐次化)

30. (3) 略 (构造一元函数再比较大小)

31. (1) 略（数学归纳法易证）

(2) 略（事实上，该结论为拉格朗日中值定理的显然结果）

32. (1) 略 (分别把 a 和 b 当成变元然后分离，再求导处理)

(2) 略 (把 λ 当作变元构造函数，然后去分母，最后连续求两次导数来处理)

33. (1) 略（直接求导即可）

(2) 略(反复利用均值不等式得到 $f(\sqrt{x_1x_2}) > f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 和 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} > 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，从而计算得到 $[f(\frac{x_1+x_2}{2})]^2 > f(x_1)f(x_2)$, 进而得到结论)

34. (1) 略（对数均值不等式）

(2) 略（很常规的偏移问题，与数 2017 无关）

35. (2) 略（常规的偏移问题）

36. (2) 略（常规的偏移问题）

37. (3) 略（依旧是常规的偏移问题）

38. (1) $0 < a \leq 2\sqrt{2}$，在 $(0, +\infty)$ 递减，$a > 2\sqrt{2}$，$f(x)$ 在 $(0, \frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}, +\infty)$ 递减，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}, \frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 递增.

(2) 不存在这样的 a，使得 $k = 2 - a$.

第十二章 概率统计

习题 12.2 第一部分

1. 6

2. 21

3. 37

4. 63

5. 16

6. 42

7. 186

8. 326

9. 768

10. 27

11. 6050

12. 200

习题 12.2 第二部分

1. 30
2. 42
3. 48
4. 3888
5. 15
6. 155
7. 4851
8. 120
9. 120
10. 360
11. 150
12. 165
13. 14
14. 72
15. 264

习题 12.2 第三部分

1. $-2^{1007}i$
2. 6
3. 45
4. $\dfrac{1}{2}$
5. 20
6. -4128
7. 512
8. $\dfrac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$
9. $\dfrac{5}{16}$
10. 959
11. 5
12. 1
13. 3^6
14. 0
15. 18
16. 0
17. $2^{2015}+2^{1007}$
18. 216
19. 180
20. -20
21. -1259
22. 1792
23. $\dfrac{3^n-1}{2}$
24. -4

习题 12.3

1. $\dfrac{36}{7}$
2. $\dfrac{1}{15}$
3. $\dfrac{1}{5}$
4. $\dfrac{19}{36}$
5. $\dfrac{1}{12}$
6. $\dfrac{4}{9}$
7. $\dfrac{5}{62}$
8. $\dfrac{3}{38}$
9. 3

10. $\frac{8}{27}$

11. $\frac{3}{5}$

12. $\frac{3}{10}$

13. $\frac{4}{7}$

14. $\frac{1}{14}$

15. $\frac{4^n-3^n}{(2^n-1)^2}$

16. $\frac{5}{12}$

17. $\frac{4}{9}$

18. $\frac{35}{128}$

19. $\frac{16}{33}$

20. $\frac{72}{625}$

21. $\frac{9}{20}$

22. $\frac{9}{32}$

23. $\frac{5}{14}$

24. $\frac{5}{14}$

25. $\frac{1}{48}$

26. $\frac{7}{72}$

27. $\frac{7}{33}$

28. $\frac{2}{5}$

29. $\frac{5}{924}$

30. $\frac{2}{7}$

31. $\frac{3}{11}$

32. $\frac{13}{128}$

33. $\frac{1}{6}$

34. $\frac{9m}{n}$

35. 6667（原题为选择题, 所以此题可能要用到四舍五入）

36. $\frac{1}{2}$

37. $\frac{1}{3}$

38. $\frac{7}{9}$

39. $\frac{1}{4}$

40. $\frac{3}{4}$

41. $\frac{7}{8}$

42. $\frac{1}{12}$

43. $\frac{107}{225}$

44. $\frac{41}{81}$

45. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(-\frac{1}{3})^{n-1}$

46. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})^{n-2}$

47. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n}$

48. $\frac{1}{2}$

49. $\frac{161}{36}$

50. $\frac{225}{64}$

51. $\frac{4}{9}$

52. 12

53. 10

54. 5

55. 75

56. $\frac{266}{81}$

57. $\frac{2}{3}$

58. $\frac{18}{5}$

第 12 章综合习题

1. (1) $\frac{1}{3}$

(2) ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{64}{225}$	$\frac{96}{225}$	$\frac{52}{225}$	$\frac{12}{225}$	$\frac{1}{225}$

期望值为：

$E(\xi) = 0\times\frac{64}{225} + 1\times\frac{96}{225} + 2\times\frac{52}{225} + 3\times\frac{12}{225} + 4\times\frac{1}{225} = \frac{16}{15}$.

2. (1) 900 人

(2) 题目即要求出该组数据的中位数，即为 77.14

(3) 由题意，$\xi \sim B(4,\frac{2}{5})$，所以 ξ 的分布列为：$P(\xi=k)=\binom{4}{k}(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{4-k},(k=0,1,2,3,4);E(\xi)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$.

3. (1) 甲科室 2 人, 乙科室 1 人

(2) $\frac{2}{3}$

(3) 分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{22}{75}$	$\frac{34}{75}$	$\frac{1}{5}$

期望值为 $E(\xi)=\frac{9}{5}$

4. (1) $\frac{27}{64}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) ξ 的分布列为：

ξ	16000	14000	5000	12000	3000	-6000
P	0.25	0.4	0.1	0.16	0.08	0.01

$E(\xi)=12200$

5. (1) $\frac{47}{128}$

(2) ξ 的分布列为：

ξ	2	3	4	5
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$E(\xi)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{3}{32}+4\times\frac{27}{64}+5\times\frac{27}{64}=\frac{269}{64}$

6. (1)

$$y=\begin{cases}10n-80, & n<16\\ 80, & n\geq 16\end{cases}$$

(2) (1) X 的分布列为：

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

期望值为：$E(X)=60\times0.1+70\times0.2+80\times0.7=76$. 方差：$D(X)=(60-76)^2\times0.1+(70-76)^2\times0.2+(80-76)^2\times0.7=44$

(2) 言之有理即可。买 16 枝玫瑰花，方差较小，利润波动较小；买 17 枝玫瑰花，平均利润较多。

7. (1) $a=0.15,b=30$.

(2) n 的最小值为 4.

(3) 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

(写服从二项分布，并写成相应的形式也算正确)
$E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$

8. (1) 随机变量 ξ 的最大值为 3, 概率为 $\frac{2}{9}$

(2) 随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

数学期望为 $E\xi=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{14}{9}$

9. (1) $\frac{47}{48}$

(2) X 的分布列为：

X	0	a	$3a$	$6a$
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{21}{256}$	$\frac{15}{64}$

数学期望为 $E(X)=0\times\frac{7}{16}+a\times\frac{63}{256}+3a\times\frac{21}{256}+6a\times\frac{15}{64}=\frac{243}{128}a$

后记

终于完成了《高中数学讲义》最后的审核工作，双手离开键盘，长舒一口气. 想来这勉强能算是我参与署名的第一本书，心情还是很激动的.

由于时间仓促还有一些个人原因，很遗憾并没有从始至终贯彻严谨的写作风格，这主要体现在我对于很多细节的处理未免草率. 尽管如此，我依然认为我在用心地做这件事；当我对某些问题没有十足的把握（还是学艺不精）时，我也愿意花上一个上午去把问题尽可能厘清之后再下笔，并享受着从这种反复推敲中获得的独特体验.

讲义本身实在没什么可聊的，姑且作罢. 思来想去，还是希望聊一聊高中阶段的学习. 高考（包括前期的备考）的过程从根本上体现的是个人智力、情绪管理和时间分配等素质，现在的学科竞赛、强基计划也多少具有这样的特点；而从这些方面修炼自己本就需要付出时间和精力.《西游记》里面师徒四人到了灵山脚下，遇到玉真观的金顶大仙. 大仙正要给唐僧指路，孙悟空说：“ 不必你送，老孙认得路.” 金顶大仙回答说：“你认得的是云路. 圣僧还未登云路，当从本路而行.” 这个的“ 云” 有点像现在说的“ 云玩家” 的“ 云”，指没有亲身经历之意. 吴承恩是想说修行正途不可偷懒，要脚踏实地. 学习高中数学也是这样，希望这本小小的讲义可以让大家喜欢上亲自动手去做一些问题的感觉. 有时一些看似棘手的问题，只要自己从头到尾地走一遍过程、想一遍逻辑，问题就变得非常自然. 这里谨借著名美国数学家 Halmos 一句名言与大家共勉，愿大家都能做到 “Don’t just read it; fight it!”

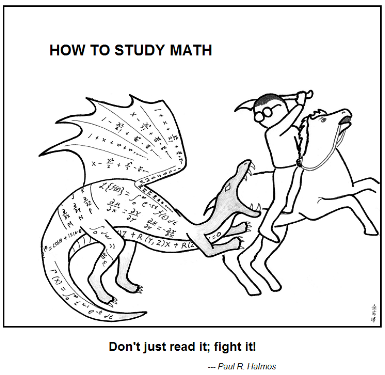


图 13.1: Don’t just read it; fight it!

另外还想向大家道个歉，早有编写这样一本讲义以方便各位同学整理知识点的想法，却由于学业忙碌和一些其他的个人原因，屡次爽约成了一个不守信用的人，希望这本书的姗姗来迟并没有给大家带来困扰.

自吹自擂了大半页纸，勉强成一篇内容杂乱的 “乱炖”，在最后祝各位同学学业进步，心想事成！

也祝愿母校能够继承前贤，越来越好！

李昊恩

2022 年 7 月于家中