离散数学方法—二项式系数、容斥原理、鸽巢原理与Ramsey计数理论

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

1. 初等计数方法

- 排列数$\mathrm{P}(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$；
- 圆排列（标号或者不重复）$\mathrm{Q}(n,n)=\mathrm{P}(n,n)/n=(n-1)!$

  选排列

  $$\mathrm{Q}(n,r)=\mathrm{P}(n,r)/r=\frac{n!}{r(n-r)!}.$$

  （关键：注意到k个k-线排列对应同一个k-圆排列）
- 可重排列：$S=\{\infty\cdot a_1,\cdots,\infty\cdot a_k\}$的$r$-可重排列数为$k^r$

  $S=\{n_1\cdot a_1,\cdots,n_k\cdot a_k\}$的可重全排列数等于

  $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

  （注意消去相同元素的序即可）
- 【例】

  求4位数的二进制数的个数，2^4

  用两面红旗，三面黄旗依次悬挂在一根旗杆上，问可以组成多少种不同的标志？$\frac{5!}{2!3!}=10$
- 组合，即从n个元素中选出r个元素（不记次序），不同的方案数

  $$\binom{n}{r}=\frac{\mathrm{P}(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

  （从选排列中消去次序）
- 多组组合，分成第i组有n_i个元素共m组元素，组合数为

  $$\binom{n}{n_1,\cdots,n_m}=\frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}.$$

- 【例】在$n\times m$棋盘中的方格上放k枚棋子，$k\le\min(n,m)$，使得任意两枚棋子不同行也不同列，求放法总数.

  【解】假设这k枚棋子的组态分别为(x_1,y_1)，$\cdots$，(x_k,y_k)，则要求$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)$中每个元素是1到$n$的不同整数，$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_k)$中每个元素也是1到$m$中的不同整数，因此共有$\frac{m!}{(m-k)!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}$种组态.

  但是，由于棋子之间是不可 分辨的，于是相差一个置换的两种组态应当被看成是同一种组态，注意到k阶对称群$\mathfrak{S}_k$的阶数应该是$k!$，所以总的（考虑到棋子之间不可分辨）的组态数为：

  $$\frac{m!n!}{(m-k)!(n-k)!k!}.$$

- 【例】（分类法）$1,2,\cdots,30$中选3个数使得它们的和可以被3整除，一共有多少方法？

  【解】记A_0,A_1,A_2分别是$1,2,\cdots,30$中被3除余$0,1,2$的数的集合，则$|A_0|=|A_1|=|A_2|=10.$ 如果选出3个数使得其和能够被3整除，只有以下两种情况：

  - 三个数取自同一个A_i，这样共有$3\times\binom{10}{3}$种；
  - 三个数分别取自A_0,A_1和A_2，这样共有10^3种.

  所以一共有$3\times\binom{10}{3}+10^3=1360$种方法。
- 【映射方法】

  设有$nm+1$个互不相同的整数排成一列，则其中必有一个$m+1$元的减子序列或者一个$n+1$元的增子序列

  【证明】

  - $U=\{u_1,\cdots,u_{nm+1}\}$

- $U=\{u_1,\cdots,u_{nm+1}\}$
    - l_i^-：以u_i开头的最长减子序列长度；l_i^+：以u_i开头最长增子序列长度；
    - 假设符合命题条件的子序列不存在，则$l_i^-\le m$，$l_i^+\le n$对任何$i=1,2,\cdots,mn+1$
    - 定义映射$f:U\to\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$，$u_i\mapsto(l_i^+,l_i^-)$；
    - 断言：f为单射. 事实上，如果$i<j$，$u_i\neq u_j$，如果$u_i<u_j$，则$l_i^+>l_i^-$；如果$u_i>u_j$，则$l_i^->l_j^-$，这说明不论如何只要$u_i\neq u_j$，都有$f(u_i)\neq f(u_j)$，所以f是单射，因此有$|U|\le|\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n|$，也就是$nm+1\le nm$，矛盾.
- 组合恒等式
    - 二项式系数
    - $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
    - $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$【考虑从$\{1,2,\cdots,n\}$中取$k$个元素的方法可以分两类，如果不包含$n$，则方法数为$\binom{n-1}{k}$；如果包含$n$，则方法数为$\binom{n-1}{k-1}$】
    - $\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$（$k\ge r$）

      【考虑n个物品不记次序地分成甲乙丙三组，使得三者分别有r个，$k-r$个和$n-k$个，我们既可以先取出k个，再拨出r个；又可以先取r个，再从余下的$n-r$个中拨出$k-r$个】
    - $2^m=\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}$
    - $0=\sum_{k=0}^m(-1)^k\binom{m}{k}$
    - $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$【从$m$个女同志和$n$个男同志中挑选$r$人小组，可以分成$r$类，分别为0女$r$男，1女$r-1$男，$\cdots$，$r$女0男（$r\le\min(m,n)$）】

2. 容斥原理

- 【例】求从1到10000中不能被4，5，6整数的数的个数

  【解】令A_4，A_5和A_6分别表示从1到10000的整数中能够被4，5和6整除的数的集合，则：

$$|A_4|=[10000/4]=2500,\quad |A_4\cap A_5|=[10000/20]=500,$$
$$|A_4\cap A_6|=[10000/\mathrm{lcm}(4,6)]=833,\quad |A_4\cap A_5\cap A_6|=[10000/\mathrm{lcm}(4,5,6)]=166.$$
$$|A_5|=2000,\quad |A_6|=1666,\quad |A_5\cap A_6|=[10000/\mathrm{lcm}(5,6)]=333.$$

  于是根据容斥原理可得

$$|\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_6}|=10000-(|A_4|+|A_5|+|A_6|)+|A_4\cap A_5|+|A_4\cap A_6|+|A_5\cap A_6|-|A_4\cap A_5\cap A_6|=5334.$$

- 【例】Eulerφ函数的表达式为

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^m(1-1/p_i),$$

  其中n有素分解

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}.$$

  【证明】
    - 回忆$E_n:=\{k:k\in\mathbb{N}_n,\forall i\in\mathbb{N}_m,p_i\nmid k\}$，$\varphi(n):=|E_n|$.
    - 令$A_i=\{k:k\in\mathbb{N}_n,p_i\mid k\}$，则$E_n=\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i}$，另外$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_j}|=[n/(p_{i_1}\cdots p_{i_j})]=n/(p_{i_1}\cdots p_{i_j})$
    - 根据容斥原理：

$$\varphi(n)=|\mathbb{N}_n|-\sum_{i=1}^m|A_i|+\sum_{i\le i_1<i_2\le m}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|-\cdots+(-1)^m|A_1\cap\cdots\cap A_m|.$$

      代入可得

$$\varphi(n)=n-\sum_{1\le i\le m}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i_2\le m}\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}}-\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}=n\prod_{i=1}^m\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

- 【例】（第二类Striling数的展开）

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^k(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

【证明】把n个不同的球放在k个不同的盒子里，每盒都不空的方法总数就是$S(n,k)$. 记X是所有无约束条件的放球方法（允许有空盒子），A_i为第i盒空的放法全体，则$S(n,k)=|\bigcap_{i=1}^k A_i^c|$. 我们计算

$$S(n,k)=|X|-\sum_{i=1}^n|A_i|+\sum_{1\le i_1<i_2\le n-1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|-\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n-1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}|.$$

而$|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_r}|=(k-r)^n$，所以:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^k(-1)^r\binom{k}{r}(k-r)^n=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^k(-1)^{k-i}\binom{k}{k-i}i^n=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^k(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

3. 鸽巢原理

- 【例】从整数$1,2,\ldots,100$中任选51个数，证明在所选的数中间必然存在两个整数，其中之一可以被另一个整除。

  【证明】每个整数可以写成$2^s\cdot a$的形式，其中$s\ge 0$，a是奇数. 记$A_a=\{2^s\cdot a|s\ge 0,2^s\cdot a\le 100\}$

  从1到100一共有50个奇数，所以不同的A_a共有50个，如果任选51个数，一定存在两个数x,y，$x\ne y$但落在同一个A_a当中，此时显然这两者其中一个是另一个的因子.

- 【例】在$\{1,2,\ldots,2n\}$中任取$n+2$个数，其中必有两个数，其和为$2n$。

  【证明】考虑如下的集合:

  $$\{1,2n-1\},\quad\{2,2n-2\},\cdots,\{n-1,n+1\},\quad\{n\},\quad\{2n\}.$$

  任取$n+2$个数，必然有两个数落在某二元集合当中，所以其和为$2n$

- 【例】将$\mathbb{N}_5=\{1,2,3,4,5\}$分为两组，则必有某个数，它是同组中的一个数的2倍，或者是同一组中另两个数之和。

  【证明】用反证法，假设分组$A\sqcup B=\mathbb{N}_5$使得以上性质是不成立的，也就是

  $$a,b\in A\Rightarrow a-b,b-a\notin A,\quad a,b\in B\Rightarrow a-b,b-a\notin B.$$

  根据鸽巢原理，不妨设$a_1,a_2,a_3\in A$，$a_1>a_2>a_3$（也就是A中至少有3个元素），根据反证法的假设可知

  $$b_1=a_1-a_2\notin A\Rightarrow b_1\in B,$$

  $$b_2=a_1-a_3\notin A\Rightarrow b_2\in B,$$

  而根据B中的数不是同组中另一个数的两倍，所以$b_2-b_1\ne b_1$，而$b_2-b_1>0$，所以$b_2-b_1\in A$，但是:

  $$b_2-b_1=(a_1-a_3)-(a_1-a_2)=a_2-a_3\notin A,$$

  这是矛盾.

- 【例】

  设序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2002}$ 各项都是正整数，证明在这个序列中必存在若干个连续项组成的子序列，其各项之和为 2002 的倍数.

  证明. 记 $S_n=\sum_{i=1}^n a_i$，其中 $1\le n\le 2002$. S_n 被 2002 除的余数只能在 $\{0,1,\cdots,2001\}$ 这一共 2002 个数字中选择.

  如果这 2002 个数 $\{S_n\}_{n=1}^{2002}$ 都不相同，则存在一个 k 使得 $S_k=0$，这样 $a_1,\cdots,a_k$ 的和被 2002 整除.

  否则，根据鸽巢原理，存在 $k\ne l$（不妨 $k<l$），使得 S_k 和 S_l 被 2002 除的余数相同，这样 $S_l-S_k=\sum_{s=k+1}^l a_s$ 被 2002 整除.

  综上所述，一定存在这样的连续子序列，其各项之和被 2002 整除. $\square$

- 【例】

n 个运动员参加单打循环赛，每人打 $n-1$ 场，每场比赛胜者得 1 分，没有平局. 证明：如果没有人全胜，则一定有两名运动员，他们的总分相同.

证明. 如果没有人全胜，则每个人的得分只能是 $S=\{0,1,\cdots,n-2\}$ 中的数字，$|S|=n-1<n$，所以根据鸽巢原理至少存在两个人得分相同. □

4. Ramsey计数理论

- 问题描述：对K_n进行2-边染色，$R(p,q)$表示满足如下性质的最小的正整数n：对于任何一种染色方法，要么存在单色K_p，要么存在单色K_q. 也就是：
  - K_n的2-边染色要么存在单色K_p，要么存在单色K_q；
  - K_{n-1}存在2-边染色，既不存在单色K_p，又不存在单色K_q.

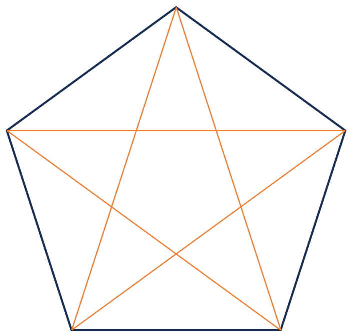
  另一种描述：任取n个人，$R(p,q)$表示满足如下性质的最小正整数n：这n个人中要么有p个人相互认识，要么有q个人相互不认识
- 【定理】$R(3,3)=6$.

  【证明】
  - 首先说明任何6个人必然存在3个人互相认识，或者3个人互相不认识

    固定一个人A，设与A认识的人组成的集合是T_A，与A不认识的人组成的集合为F_A，根据鸽巢原理可知$|F_A|\geq 3$或者$|T_A|\geq 3$.

    如果$|F_A|\geq 3$，如果F_A中所有人都互相认识，则已经得证，否则存在两个人互相不认识，而这两个人又和A互相不认识，所以这两个人加上A是3个人互相不认识，又得证

    如果$|T_A|\geq 3$，如果T_A中所有人都互相不认识，已经得证，否则存在两个人互相认识，再加上A就有三个人互相认识
  - 对于K_5，以上的2-边染色没有单色三角形：



  综上所述$R(3,3)=6$
- 由10人组成的集合中或者有4人互不认识，或者至少有3人互相认识；

  由20人组成集合中或者有4人互相认识，或者有4人互不认识。

  【证明】
  - 对于10个人，同样固定一个人A，设F_A，T_A分别是A认识和A不认识的人的集合，根据鸽巢原理可知$|F_A|\geq 5$或者$|T_A|\geq 5$. 分类讨论. 如果$|F_A|\geq 6$，根据$R(3,3)=6$可知，F_A中一定有3个人互相认识，或者3个人互相不认识，如果有3个人互相认识，则已经得证，如果有3个人互相不认识，则加上A是4个人互相不认识，又得证.

    如果$|F_A|\leq 5$，则$|T_A|\geq 4$. 如果 T_A中所有人都互相不认识，则至少有4人互不认识，得证明. 如果T_A中存在两个人互相认识，则加上A是3个人互相认识，得证.
  - 对于20人，固定一个人A，设F_A，T_A如上. 根据鸽巢原理可知$|F_A|\geq 10$或者$|T_A|\geq 10$，如果是后者，则根据（1）结论可知其中有4人互相不认识或者3人互相认识，若是4人互相不认识，则已经得证，若是3人互相认识，则加上A是4人互相认识，又得证. 根据（1）的对称情况可知，10个人中也成立：或有4人互相认识，或有3人互不认识。这时候对于$|F_A|\geq 10$就或者有4人互相认识（这样就得证），或者有3人互相不认识（但加上A是4人互相不认识，又得证）。综上所述$R(4,4)\leq 20$.
- 【定理】有关Ramsey数的简单性质
  - $R(p,q)=R(q,p)$;
  - $R(1,p)=1$，$\forall p$;
  - $R(2,p)=p$，$\forall p$; 【证明】这是因为，对K_p进行边染色，如果所有边都染红色，则存在红色K_p，如果存在一条边染蓝色，则存在蓝色K_2.
- 【定理】上界估计，对任何$k,l\geq 2$，都有：

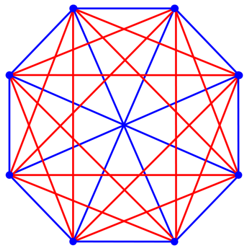
$$R(k,l) \le R(k,l-1) + R(k-1,l).$$

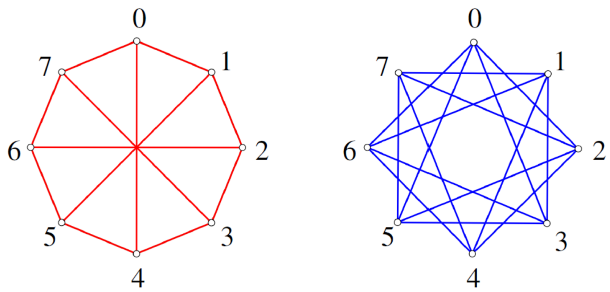
特别地，如果$R(k,l-1)$和$R(k-1,l)$均为偶数，则上述不等式可以改进为严格的.

- 【推论】$R(3,4)=9$

  【证明】

  - $R(3,3)=6$，$R(2,4)=4$，于是根据上面定理可得$R(3,4)\le R(3,3)+R(2,4)-1=6+4-1=9$;
  - K_8的如下2-边染色不包含单色的三角形或者单色的K_4，所以$R(3,4)\ge 9$，综上所述$R(3,4)=9$





- 【推论】$R(4,4)=18$

  【证明】

  - $R(4,4)\le R(3,4)+R(3,3)=18$
  - 用$\mathbb{F}_{17}$标记K_{17}的顶点，ij是红色的当且仅当$i-j\ne 0$且$i-j$是$\mathbb{F}_{17}$中的平方元，也就是 $i-j\in\{1,4,9,16,8,2,15,13\}$.
  - 如果有单色的K_4，顶点为a,b,c,d，不妨$a=0$，否则做平移（平移不影响两个顶点的差，所以颜色不变）

    此时$b\ne 0$，我们不妨设$b=1$，否则用b^{-1}去乘每一个数，此时$i-j\mapsto b^{-1}(i-j)$. 如果b是平方元，则每条边都不改变颜色，如果b不是平方元，则每条边都改变颜色，不论如何单色性不变
  - 由此可不妨设$a=0$，$b=1$，$c\ne d$. 因为$1-0$是平方元，所以$c-1,d-1,d-c$也是平方元，所以c,d是$9,16,2$中的两个，但是这三个数任何两个数的差都不是平方元，即$d-c$不可能是平方元，矛盾. 所以$R(4,4)\ge 18$.

- 【定义】一般Ramsey定理

  $p_1,\cdots,p_n$，t是正整数，$p_1,\cdots,p_n\ge t$，那么一定存在一个最小的正整数（记为$R(p_1,p_2,\cdots,p_n;t)$）满足:

  将S的全部t元子集分配给n个盒子，则或者存在p_1个元素使得这些元素的全部t元子集都分布在第一个盒子中，或者存在p_2个元素使得这些元素的全部t元子集都分布在第二个盒子中，$\cdots$，或者有p_n个元素使得这些元素的全部t元子集都分布在第n个盒子中.

  或者描述成:

  对完全超图$K_n=(V,E)$（其中E是边集，G的每条边关联t个顶点，即t个顶点组成一条边，完全超图指的是任取$v_1,\cdots,v_t\in V(K_n)$，$v_1\cdots v_t\in E(K_n)$）用n种颜色进行边染色，则或者存在c_1色的单色完全超图K_{p_1}，或者存在c_2色的单色完全超图K_{p_2}，$\cdots$，或者存在c_n色的完全超图K_{p_n}.

  - 例：$t=1$，这就是鸽巢原理（把单元素集合分配给n个盒子）

    $$R(p_1,p_2,\cdots,p_n;1)=p_1+p_2+\cdots+p_n-n+1.$$

    （最坏的情况是每个盒子都恰好只放了p_1-1个元素）
  - 例：$t=2$，是图的着色问题. 即$R(p_1,p_2,\cdots,p_n;2)$表示最小的正整数m，使得对K_m用n种颜色染色，或者存在c_1色的K_{p_1}，$\cdots$，或者存在c_n色的K_{p_n}.

- 【命题】一些简单性质

  - $R(t,p_1,p_2,\cdots,p_n;t)=R(p_1,p_2,\cdots,p_n;t)$;
  - $R(p_1,\cdots,p_n;t)\le R(p_1-1,\cdots,p_n;t)+\cdots+R(p_1,\cdots,p_n-1;t)-n+t$.（形式上类比鸽巢原理一般形式，只不过只成立不等号）

- 【命题】$R(3,3,3;2)=17$.

- 【定理，Schur】设$n \geq 2$是任意给定的自然数，则必存在自然数N，当$r_n \geq N$时，对于集合$S = \{1, 2, \cdots, r_n\}$的任何$r$-分划$S = \sqcup_{i=1}^{n} \alpha_i$，必然存在某个$\alpha_i$使得存在$x, y, z \in \alpha_i$，$x + y = z$.

  【证明】

  - 考虑一个$r_n = R(3, 3, \cdots, 3; 2)$个顶点的顶点集$\{1, 2, \cdots, r_n\}$，对它进行$n$-染色，规则为：如果$|u - v| \in \alpha_i$，则染$c_i$色
  - 根据Ramsey定理，这个图一定有单色的三角形，也就是存在a, b, c（不妨$a > b > c$）使得$a - b \in \alpha_i$，$b - c \in \alpha_i$，$a - c \in \alpha_i$，分别记这三个数是x, y, z.
  - 于是$x + y = z$且$x, y, z \in \alpha_i$.

- 【例】若将集合{1,2, ...,67}划分成不交的4部分：S_1，S_2，S_3，S_4，则至少存在一个S_i，其中的一对元素之差属于S_i

  【证明】

  - 根据Schur定理，如果$67 \geq R(3, 3, 3, 3; 2)$，则命题得证.
  - $R(3, 3, 3, 3; 2) \leq 4R(2, 3, 3, 3; 2) - 4 + 2 = 4R(3, 3, 3, 3; 2) - 2 = 4 \times 17 - 2 = 66 < 67$.