离散数学方法—母函数、递推、反演原理

参考：

清华大学陆玟老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

1. 母函数

- 【定义】对于离散的数列$\{a_n\}$，可以和母函数一一对应

  $$G(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i, \quad E(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i.$$

  对于组合问题，常用的是普通型的母函数，对于排列问题，常用的是指数型的母函数。

  【remark】母函数书写策略："加号"表示"或者"，多项式之间"乘号"表示"分步"

- 【例】投掷四枚色子，求出现点数和为15的结果种类数.

  【解】记a_n是点数和为n的丢掷结果种数，则$\{a_n\}$的母函数是

  $$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4(1 + x^2 + \cdots + x^5)^4 = x^4 \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$
  $$= x^4 \left[\binom{3}{0} + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \cdots\right](1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24})$$

  所以x^{15}的系数为

  $$\binom{11}{7} - 4 \times \binom{5}{2}.$$

- 【例】有1分、2分、4分,...,2^p分的硬币各一枚，问一张n分的纸币兑换硬币，有多少种兑换方法.

  【解】记a_n为n分纸币兑换硬币的方法种类数，则$\{a_n\}$的母函数为

  $$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^p}) = 1 + x + \cdots + x^{2^{p+1}-1}.$$

  所以当$1 \le n \le 2^{p+1} - 1$时，$a_n = 1$，当$n > 2^{2p+1} - 1$时，$a_n = 0$.

- 【例】r个没有区别的球，分放到n个不同的盒子，求分放种数a_r

  【解】写$\{a_r\}$的母函数为

  $$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r.$$

  $a_r = \binom{n+r-1}{r}$（负二项系数）

- 【例】r个没有区别的球，分放到n个不同的盒子，要求每盒不空，求分放种数a_r（$r \ge n$）.

  【解】这次每个盒子不能不放球，因此母函数变成

  $$f(x) = (x + x^2 + \cdots)^n = x^n(1 + x + x^2 + \cdots)^n = x^n(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{n+r} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} x^k.$$

  $a_k = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$.

- 【例】（带有权值的母函数问题）某单位有8位男同志，5位女同志，现要组织一个由数目为偶数的男同志和数目不少于2的女同志组成的小组，试求有多少种组成方式。

  【证明】分步，先选男同志，再选女同志. 选择n个男同志的允许组合数设为$\{a_n\}$，选择n个女同志的允许组合数设为$\{b_n\}$，

  $$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{10} = a_{11} = \cdots = 0, \quad a_2 = \binom{8}{2}, \quad a_4 = \binom{8}{4}, \quad a_6 = \binom{8}{6}, \quad a_0 = a_8 = 1,$$

  $$b_0 = b_1 = 0, \quad b_2 = \binom{5}{2}, \quad b_3 = \binom{5}{3}, \quad b_4 = \binom{5}{4}, \quad b_5 = 1, \quad b_n = 0 \quad \text{for} \quad n \ge 6.$$

$$A(x)=1+\binom{8}{2}x^2+\binom{8}{4}x^4+\binom{8}{6}x^6+x^8,$$

$$B(x)=\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+x^5.$$

设选择k小组的方法数为c_k，则c_k母函数是

$$C(x)=A(x)B(x)=\left[1+\binom{8}{2}x^2+\binom{8}{4}x^4+\binom{8}{6}x^6+x^8\right]\left[\binom{5}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\binom{5}{4}x^4+x^5\right]$$

计算$c_2+\cdots+c_{13}$，也就是$C(1)=\left[1+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+1\right]\left[\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+1\right]$

- 【例】（用母函数解递推问题）

  求n位十进制正数中出现偶数（奇数）个1的数的个数a_n（b_n）

  【证明】递推关系为

  $$a_n=9a_{n-1}+b_{n-1}$$

  $$b_n=9b_{n-1}+a_{n-1}$$

  初始条件，$a_1=8$；$b_1=1$

  设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的母函数是$A(x)$和$B(x)$，于是:

  $$A(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}+\cdots$$

  $$-9xA(x)=-9a_1x-9a_2x^2-9a_3x^3-\cdots-9a_nx^n-\cdots$$

  $$-xB(x)=-b_1x-b_2x^2-b_3x^3-\cdots-b_nx^n-\cdots$$

  相加可得

  $$A(x)-9xA(x)-xB(x)=a_1=8$$

  同样可得（完全对称地）

  $$B(x)-9xB(x)-xA(x)=b_1=1$$

  解得

  $$A(x)=\frac{8-71x}{1-18x+80x^2},\quad B(x)=\frac{1-x}{1-18x+80x^2},$$

  于是:

  $$A(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(7\times 8^{n-1}+9\times 10^{n-1})x^{n-1}.$$

  $$B(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(9\times 10^{n-1}-7\times 8^{n-1})x^{n-1}.$$

- 【例】（指数型母函数）用$1,2,3,4,5$组成n位数，$4,5$出现偶数次，$1,2,3$出现次数没有要求，共有多少方法?

  【解】设方法数为a_n，考虑指数型的母函数:

  $$f(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^3=e^{3x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^x+2e^{3x}+e^{5x}).$$

  再展开

  $$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+2\times 3^n+5^n)\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

  所以，方法数为

  $$a_n=\frac{1}{4}(1+2\times 3^n+5^n).$$

2. 递推关系及其解法

- 【例】Fibonacci数列
  - 满足递推关系$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，$n=1,2,3,\cdots$，以及初值条件$F_1=F_0=1$的数列称为Fibonacci数列
  - 解法：降阶法；特征根法；线性代数方法；母函数方法
  - 【Kaplansky定理】对于集合$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$，其不含有相邻整数的子集的个数（包括空集）恰好是Fibonacci数F_{n+1}.

    $X_0=\varnothing$，个数为$F_1=1$

    $X_1=\varnothing$，个数为$F_2=2$

    对于$X_{n+1}=\{1,2,\cdots,n+1\}$，分为两类，如果包含$n+1$这个数，则如果去掉$n+1$，剩下的集合个数恰好是$\{1,2,\cdots,n-1\}$的满足条件的子集，根据定义可知就是$F_n$. 如果不包含$n+1$这个数，则又和$X_n$满足条件的子集数一样（即$F_{n+1}$），所以$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
- 常系数齐次和非齐次线性递归关系的解法
  - 齐次情形

    $$H_n-a_1H_{n-1}-a_2H_{n-2}-\cdots-a_rH_{n-r}=0.$$

    定义如下的特征方程

    $$x^r-a_1x^{r-1}-a_2x^{r-2}-\cdots-a_{r-1}x-a_r=0.$$

    如果有r个互不相同的特征根，则通解为

    $$H_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_rq_r^n.$$

    代入初值条件求解即可. 注意由于特征根互不相同，对应的线性方程组的系数行列式是Vandemonde行列式，因此解一定非退化.
  - 存在重特征根

    q是k重特征根，除了q^n这一个基础解以外，还有nq^n，n^2q^n，$\cdots$，$n^{k-1}q^n$

    【例】解下列递推关系（用特征方程求解）：

    $$h_n-12h_{n-1}+36h_{n-2}=0,\quad h_1=h_2=1,$$

    【解】特征方程为

    $$\lambda^2-12\lambda+36\lambda=0,\quad\Rightarrow\lambda=6(\text{二重根})$$

    通解为

    $$h_n=A\cdot 6^n+B\cdot n6^n,$$

    代入初值$h_1=h_2=1$可得$A=11/36$，$B=-5/36$，

    所以

    $$h_n=\frac{11\cdot 6^n-5n\cdot 6^n}{36}.$$
  - 非齐次递归关系

    $$H_n-a_1H_{n-1}-\cdots-a_rH_{n-r}=f(n),$$

    如果$f(n)$是多项式，则特解也是次数相同的多项式

    如果$f(n)=a^n$，如果a不是特征方程的根，则特解形式为pa^n；若a是k重根，则一个特解为

    $$\sum_{i=0}^{k}p_in^ia^n.$$

    【例】解以下递推方程：

    $$f(n)-4f(n-1)+4f(n-2)=2^n,$$

初值条件为$f(0)=1$，$f(1)=4$.

【解】特征方程为

$$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2(\text{二重根})$$

可以设特解的形式为

$$A\cdot 2^n+B\cdot n2^n+C\cdot n^2 2^n$$

代入可得

$$\begin{gathered}A\cdot 2^n+B\cdot n2^n+C\cdot n^2 2^n-4A\cdot 2^{n-1}-4B(n-1)2^{n-1}-4C(n-1)^2 2^{n-1}\\ +4A\cdot 2^{n-2}+4B(n-2)2^{n-2}+4C(n-2)^2 2^{n-2}=2^n\end{gathered}$$

左边
$=\left[A+Bn+Cn^2-2A-2B(n-1)-2C(n-1)^2+A+B(n-2)+C(n-2)^2\right]\cdot 2^n=2C\cdot 2^n=2^n$
,

所以$C=\frac{1}{2}$，也就是特解为$A2^n+Bn2^n+n2^{n-1}$，A,B进一步用边界条件确定.

通解为$D2^n+En2^n$，所以原递推方程通解为

$$\widetilde{A}2^n+\widetilde{B}n2^n+n2^{n-1}$$

代入$f(0)=1$和$f(1)=4$解得$\widetilde{A}=1$，$\widetilde{B}=1/2$，所以

$$f(n)=\left(n^2+n+2\right)2^{n-1}.$$

3. Stirling数与集合的划分

- Stirling数

  定义第一类Stirling数$s(m,n)$和$S(m,n)$是如下的多项式线性空间$\mathbb{R}[x]$中两组基$\{[x]_n\}$和$\{x^n\}$之间的关系，

$$[x]_n=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)x^i,$$

$$x^n=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)[x]_i.$$

- 【例】（集合的划分问题）

  【定理】一个n元集合X的$k-$划分个数等于第二类Stirling数$S(n,k)$（不计k个子集的次序，也就是把元素放到不标号的k个盒子里）

  【remark】这给出第二类Stirling数的组合意义

- 【例】（对称群S_n中恰好含有k个轮换的置换个数）

  【回忆】对称群S_n中每个元素都可以拆成若干不交轮换的乘积，而且在不记次序的意义下是唯一的（注意到不相交的置换之间的乘积可以交换），因此我们可以问：恰好含有k个置换的轮换有多少个?

  【定理】对称群S_n中，含有k个轮换的置换的个数等于$|s(n,k)|$，而且$s(n,k)$的符号是$\mathrm{sgn}(s(n,k))=(-1)^{n+k}$.

- 【命题】第二类Stirling数有如下递推关系：

$$S(n+1,m)=\sum_{k=m-1}^{n}\binom{n}{k}S(k,m-1).$$

  【证明】设X_{n+1}是$n+1$元集合$\{x_1,\cdots,x_{n+1}\}$，从其每个m-分划中除去含有元素x_{n+1}的类，得到含有$k(m-1\le k\le n)$个元素的集合K的$m-1$分划. 注意到如果两个分划本身不同，那么去掉含有x_{n+1}之后所得到的分划一定也不同；反过来，对每一种$K\subset X-\{x_{n+1}\}$，$|K|=k$，在K的任何一个$(m-1)$分划$A_1,\cdots,A_{m-1}$中添加一类$A_m=X\backslash K$，就又得到X的一个m-划分，而$K\subset X-\{x_{n+1}\}$的选择方法有$\binom{n}{k}$种，所以上面的式子成立.

- 【命题】第二类Stirling数有如下递推关系

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m).\quad S(n,1)=S(n,n)=1.$$

  【证明】将X_n的m-分划分为两种：

一种是，元素x_n独占一个集合，这样的m-分划和$X_{n-1}=X_n-\{x_n\}$的$m-1$-分划是一一对应的，因此一共有$S(n-1,m-1)$种

另一种是，元素x_n不独占一个集合，考虑将满足这种条件的所有m-分划中都删去x_n，则剩下的部分恰好都是X_{n-1}的m-分划. 反过来，对任何X_{n-1}的m-分划，可以在任何一类中添加x_{n+1}得到满足x_n不独占一个集合的X_n的m-分划，于是一共有$mS(n-1,m)$种.

- Bell数：X_n的所有（不编号）的分划数记为B_n. 约定$B_0=1$，则$\{B_n\}$为Bell数

$$B_n=S(n,1)+\cdots+S(n,n).$$

【定理】（递推关系）

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

【证明】X_{n+1}的分划中删掉含有x_{n+1}的子集，只剩下k（$k=0,\cdots,n$）元. 如果$k=0$，则只有一种划分方法，若$k\neq 0$，则k元集合的不同分划数为B_k，而k元可以从X_{n+1}的n元中任取，所得的划分都不同，因此

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

也可以用上第二类Stirling数的递推公式，直接推导：

$$\begin{aligned}B_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}S(n+1,k)=1+\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=k-1}^{n}\binom{n}{i}S(i,k-1)=1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{i+1}\binom{n}{i}S(i,k-1)=1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=1}^{i}S(i,j)\\=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i.\end{aligned}$$

【定理】（指数型母函数）

$\{B_n\}$的指数型母函数为

$$f(t)=\exp\left(e^t-1\right).$$

【证明】

- 设f是函数项级数$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i[x]_i$，满足$\sum_{i=0}^{\infty}a_i$收敛，定义线性泛函$\ell(f):=\sum_{i=0}^{\infty}a_i$.
- 计算$\ell(x^n)=\ell(\sum_{i=0}^{n}S(n,i)[x]_i)=\sum_{i=0}^{\infty}S(n,i)=\sum_{i=1}^{\infty}S(n,i)=B_n$.
- 形式上考虑$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$，则 $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell(x^n)}{n!}t^n=\ell\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}t^n\right)=\ell(e^{tx})=\ell((1+e^t-1)^x)$ $=\ell(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}(e^t-1)^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\ell[x]_n/n!(e^t-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(e^t-1)^n=\exp\left(e^t-1\right)$

4. 反演公式与Mobius函数

- 【定理】第一反演公式

设n是自然数，$\{p_n\}$，$\{q_n\}$是$\mathbb{R}[x]$中序列，

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}q_k(x),\quad q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}p_k(x),$$

则，如果u_i,v_i两个数列的以下两种关系是等价的（称为互为反演）

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}u_k\quad\Leftrightarrow\quad u_n=\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}v_k.$$

【证明】令

$$\mathbf{p}=(p_0,\cdots,p_n)^T,\quad \mathbf{q}=(q_0,\cdots,q_n)^T,$$

则

$$\mathbf{p}=A\mathbf{q},\quad A=\begin{pmatrix}\alpha_{00}&0&\cdots&0\\ \alpha_{10}&\alpha_{11}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n0}&\alpha_{n1}&\cdots&\alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{q}=B\mathbf{p},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_{00}&0&\cdots&0\\ \beta_{10}&\beta_{11}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_{n0}&\beta_{n1}&\cdots&\beta_{nn}\end{pmatrix}.$$

由此可知

$$\mathbf{q}=B\mathbf{p}=BA\mathbf{p}\quad\Rightarrow\quad BA=\mathbb{I}\quad\Rightarrow\quad B=A^{-1}.$$

- 【例】
  - $x^n=(1+x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k$
    $(x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k$
    所以，成立**二项反演公式**：
    $$u_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}v_k\Leftrightarrow v_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}u_k.$$
  - $[x]_n=\sum_{k=1}^{\infty}s(n,k)x^n$，$x^n=\sum_{k=1}^{\infty}S(n,k)[x]_n$
    所以，成立**Stirling反演公式**：
    $$u_n=\sum_{k=1}^{n}s(n,k)v_k\Leftrightarrow v_n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)u_k.$$
- 【例】n个布尔变量$x_1,x_2,...,x_n$的布尔函数全体记为$B(X)$，$X=\{0,1\}^n$，其中，实际上依赖于n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的布尔函数的个数记为b_n，求b_n
  【解】
  - A_k：$B(X)$ 中实际上依赖于k个变量的布尔函数的全体；
  - $|B(X)|=2^{|X|}=2^{2^n}$；
  - $|A_k|=\binom{n}{k}b_k\Rightarrow 2^{2^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$；
  - 根据二项反演公式可知
    $$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}2^{2^k}.$$
- 【例】用$m(m\geq 2)$种颜色去涂 $1\times n$ 棋盘，每格涂一种颜色. 以$h(m,n)$表示使得相邻格子异色且每种颜色都用上的涂色方法，求$h(n,m)$ 的计数公式.（用反演公式做）
  【解】令$H(n,m)$是用m种颜色$(m\geq 2)$涂$1\times n$棋盘且相邻格子颜色不同的涂色方法（不要求每种颜色都用上），则：
  $$H(n,m)=\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h(n,k),$$
  另一方面，对于$H(n,m)$，我们可以从左向右涂色，第一个格有m种选择，第二个格由于第一个格已用掉一种颜色只剩下$m-1$种颜色可用有$m-1$种选择，以此类推，最后
  $$H(n,m)=m(m-1)^{n-1},$$
  根据二项式反演原理可知：
  $$h(n,m)=\sum_{k=2}^{m}k(k-1)^{n-1}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}.$$
- **Mobius反演公式**
  - 【定义】两个数论函数

Euler-φ函数：$E(n) := \{k \le n, (k,n)=1\}$，$\varphi(n) = |E(n)|$.

【命题】设n有素分解$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 则$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^m (1-1/p_i)$.

Mobius函数：设n有素分解

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

则：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1; \\ (-1)^r, & \alpha_1 = \cdots \alpha_r = 1; \\ 0, & \exists \alpha_i \ge 2. \end{cases}$$

- 【命题】（φ和μ的关系）

  $$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|n} d\mu(n/d),$$

  【证明】直接计算，写n的素分解$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$，则：

  $$\{d : d|n\} = \{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m} : 0 \le \beta_i \le \alpha_i, 1 \le i \le m\},$$

  $$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{0 \le \beta_i \le 1} \frac{\mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m})}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}} = \sum_{0 \le \beta_i \le 1} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^m \beta_i}}{p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}} = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \frac{1}{n}\varphi(n).$$

- 【命题】（$\mu(d)$的和）

  $$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

  【证明】$n=1$，不用证明

  $n>1$，

  $$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{0 \le \beta_i \le 1} (-1)^{\sum_{i=1}^m \beta_i} = \prod_{j=1}^m (1-1) = 0.$$

- **【定理】（Mobius反演公式）**

  设$f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数（或者两个序列），则：

  $$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d).$$

  这两个公式称为Mobius反演公式.

- 【例】用Mobius反演公式推导Eulerϕ函数的表达式

  $$\varphi(n) = |\{1 \le k \le n : gcd(k,n) = 1\}|, \quad n \ge 1.$$

  【证明】

  - 设d为n的正因子，$A_d := \{k : 1 \le k \le n, gcd(k,n) = d\}$，则 $|A_d| = \{k/d : 1 \le k/d \le n/d : gcd(k/d, n/d) = 1\} = \varphi(n/d)$.
  - 注意$\{1, 2, \cdots, n\} = \bigsqcup_{d|n} A_d$，$n = \sum_{d|n} |A_d| = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$.
  - 根据Mobius反演公式

  $$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) d = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{k=0}^r \sum_{\{i_1, \cdots, i_k\} \subset [r]} (-1)^k \frac{n}{\prod_{j=1}^k p_{i_j}} = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

- 【例】r色可重圆排列：$[r]$中取n个（允许重复），排成一个圆周

  $T_r(n)$：所有的r色可重n圆排列的方法数；$M_r(n)$：最小周期为n的r色可重n圆排列的方法数

  于是：

  $$T_r(n) = \sum_{d|n} M_r(d).$$

  （这只需要注意到，若$d|n$，则最小周期为d的r色n圆排列的方法数等于$M_r(d)$）

【命题】$M_r(n)$的计算公式为

$$M_r(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)r^{n/d}.$$

【证明】

- 观察：r色可重n-线排列方法的全体记为A，则$|A|=r^n$，定义$A(d)$为：A中如果按照顺时针方向绕成一个圆圈，最小周期为d的那些先排列的集合，则$A=\bigsqcup_{d|n}A(d)$. 对于$A(d)$的计数，我们需要注意到最小周期为d的n圆排列依照顺时针方向展开回线排列可以得到d种，于是

$$|A(d)|=dM_r(d)$$

- 于是有$r^n=\sum_{d|n}dM_r(d)$，根据Mobius反演公式可得

$$nM_r(n)=\sum_{d|n}\mu(d)r^{n/d}.$$

  所以得到$M_r(n)$的计算公式为

$$M_r(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)r^{n/d}.$$

- 【例】r色可重圆排列公式的应用

  （1）用红色、蓝色、绿色三种珠子一共取10个排列成一个圆周，其最小周期为10，求排列方法数

  【解】即求$M_3(10)$，根据公式可得

$$M_3(1)=\frac{1}{10}(\mu(1)3^{10}+\mu(2)3^5+\mu(5)3^2+\mu(10)3^1)=\frac{1}{10}(3^{10}-3^5-3^2+3^1)$$

  （2）用红色、蓝色、绿色、黄色4种颜色的珠子中，共取12个排成一个圆周，一共多少排列方法？

  【解】即求解$T_4(12)$，除了计算$T_r(n)=\sum_{d|n}M_r(d)$之外，还可以用$T_r(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)r^{n/d}$.

  【推导：设全体圆排列方案为集合S，旋转群$G\cong C_n$作用在S（此处不考虑翻转的对称性，只考虑旋转的对称性）. 设C_n的生成元为g，则g^k（$1\le k\le n-1$）的型恰好为$(n/d)^d$，其中$d=\gcd(n,k)$，而这样的元素一共有$\varphi(n/k)$个，所以

$$T_r(n)=\frac{1}{|C_n|}\sum_{g\in G}r^{\sum_i c_i(g)}=\frac{1}{n}\sum_{k|n}\varphi(n/k)\cdot r^k=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)r^{n/d}.$$

  】

  所以

$$T_4(12)=\frac{1}{12}\sum_{d|12}\varphi(12/d)4^d=\frac{1}{12}\left(\varphi(12)\cdot 4+\varphi(6)\cdot 4^2+\varphi(4)4^3+\varphi(3)4^4+\varphi(2)4^6+\varphi(1)4^{12}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(4\times 4+2\times 4^2+2\times 4^3+2\times 4^4+4^6+4^{12}).$$

- 更一般的反演：偏序集上的反演原理（略）