# 离散数学方法—Polya计数原理

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

林翠琴，《组合学与图论》，清华大学出版社（2009）

- 【定义】（对称群）$X$为$|X|=n$的有限集，$X$上全体置换（双射）构成的群称为$n$阶置换群（其上的运算为映射的复合），记为$S_n$

  元素个数，$|S_n|=n!$

  【定义】（置换群）对称群的子群称为置换群

- 【命题】
  - 任何置换可以写成不交轮换的乘积，且在不记次序的意义下拆分是唯一的（不相交的轮换本身也是交换的）
  - 任何置换可以写成若干对换的乘积（未必唯一），且不论拆分方法如何，相同的一个置换中对换个数的奇偶性不变。如果含有奇数个对换，则称为**奇置换**，否则为**偶置换**
  - 【命题/定义】交错群$A_n$指的是$S_n$中全体偶置换组成的$S_n$的子群
  - 【命题/定义】设$g\in S_n$是置换，写成不交轮换的乘积，如果各轮换因子中长度为$i$的轮换的个数为$c_i(g)$，则称$g$的型为

    $(c_1(g),\cdots,c_n(g))$，显然有$\sum_{i=1}^n ic_i(g)=n$.

    $S_n$中两个元素的**型相同当且仅当它们相互共轭**，即若$g_1$和$g_2$具有相同的型，则存在$h\in S_n$使得$g_1=hg_2h^{-1}$
  - $S_n$中型为$(c_1,\cdots,c_n)$的置换的数目是

    $$\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}.$$

    事实上，这一数目恰好对应的是整数$n$的不记次序的分划个数

- 【定义】$G$置换群，$G<S_n$，考虑$G$作用在集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$
  - 称$\mathrm{Orb}_G(k):=\{g(k):g\in G\}\subset X$为置换群$G$在元素$k$处的**轨道**
  - 【命题】定义$X$上的一个关系，$k\sim l$当且仅当$\mathrm{Orb}_G(k)=\mathrm{Orb}_G(l)$，则这是一个等价关系。事实上集合$X$可以写成若干不同轨道的剖分
  - 称$\mathrm{Stab}_G(k):=\{g\in G:g(k)=k\}$，也就是以$k$为不动点的群元素组成的$G$的子集。显然这样一个集合同时也是$G$的**子群**，称为$k$的**稳定化子**
  - 【命题】$k\in X$，记$\mathrm{Orb}_G(k)=\{k_1,\cdots,k_r\}$，则存在$p_i\in G$使得$p_i(k)=k_i$. 记$P=\{p_1,\cdots,p_r\}$，则任何$g\in G$，存在$p\in P$以及$f\in \mathrm{Stab}_G(k)$，使得$g=pf$，且分解是唯一的

    【证明】考虑映射$f:G\to \mathrm{Orb}_G(k)$，$g\mapsto g(k)$. 如果$g(k)=k_i=p_i(k)$，则$p_i^{-1}g\in \mathrm{Stab}_G(k)$，即存在$f\in \mathrm{Stab}_G(k)$使得$g=p_if$. 分解的唯一性由每个$k_i$对应的$p_i$的唯一性来保证.

    【remark】事实上这里的$P$就是在每个$\mathrm{Stab}_G(k)$-陪集中取一个代表元
  - 【推论】（轨道-稳定化子公式）$|G|=|P||\mathrm{Stab}_G(k)|=|\mathrm{Orb}_G(k)|\,|\mathrm{Stab}_G(k)|$.

- 【定理】（Burnside引理）

  $G$作用在集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$，则$G$在$X$上的轨道个数$t=\sum_{g\in G}c_1(g)/|G|$

  【证明】构造一个$m\times n$表格，其中列为$X$中的$n$个元素，行为$G$的$m$个元素.

  如果$g_i(k)=k$，则取$s_{ik}=1$，否则取$s_{ik}=0$.

  下面我们数表格中1的总数.

  第一种方法：对每个$g$中的元素，去计算它的$c_1(g)$，这恰好就等于不动点个数，因此1的总数$=\sum_{g\in G}c_1(g)$.

  第二种方法：对每个$X$中元素，去计算它在哪些$G$中元素作用下不变，这恰好等于稳定子群$\mathrm{Stab}_G(k)$的阶，所以1的总数=$\sum_{k\in X}|\mathrm{Stab}_G(k)|$

  由此，结合轨道-稳定化子公式：

  $$\sum_{g\in G}c_1(g)=\sum_{k\in X}\mathrm{Stab}_G(k)=\sum_{k\in X}\frac{|G|}{|\mathrm{Orb}_G(k)|},$$

另一方面

$$\sum_{k\in X}\frac{1}{|\mathrm{Orb}_G(k)|}=\sum_{k=1}^{t}\sum_{j\in\mathrm{Orb}_G(k)}\frac{1}{|\mathrm{Orb}_G(j)|}=\sum_{k=1}^{t}|\mathrm{Orb}_G(j)|\cdot\frac{1}{|\mathrm{Orb}_G(j)|}=t.$$

所以

$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}c_1(g).$$

【remark】我们只需要知道每个群元素$g$的不动点个数，就可以根据Burnside引理计算出$G$在$X$上的轨道个数.

- 【定理】（Polya计数原理）
  - 【定义和记号】
    - $X$的染色方式指的是$f:X\to C$，$a\in X$，$c\in C$. 记这样的映射全体为$C^X$，则：

      $$|C^X|=|C|^{|X|}=m^n.$$

    - 染色等价：$f_1\sim f_2$，当且仅当存在$g\in G$，使得$f_1(g(a))=f_2(a)$，$\forall a\in S$.

      染色等价是一个等价关系
    - **轮换指标**：$G$作用于集合$S=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$g$的型为$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，定义一个单项式$x_1^{c_1}x_2^{c_2}\cdots x_n^{c_n}$，定义：

      $$P_G(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x_1^{c_1(g)}\cdots x_n^{c_n(g)}.$$

      t称为置换群$G$的轮换指标
  - 【Polya定理】

    同样的设定，则$C^X$中的所有染色方式中，在$G$的作用下互不等价的染色方式一共有

    $$P_G(m,m,\cdots,m)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}m^{c(g)}.$$

    其中$P_G$是轮换指标，$c(g)$指的是置换$g$中不相交的轮换的总数，也就是$c(g)=|(c_1(g),\cdots,c_n(g))|$
  - 【证明】

    考虑$g\in G$诱导了集合$C^X$上的置换$\tilde{g}$，定义为：

    $$\tilde{g}(f)=f\circ g,\quad f\in C^X.$$

    令$\widetilde{G}=\{\tilde{g}:g\in G\}$是$C^X$上置换群，则互不等价的染色数目就等于$\widetilde{G}$作用在$C^X$上轨道数目

    根据Burnside引理，轨道个数等于

    $$t=\frac{\sum_{\tilde{g}\in\widetilde{G}}c_1(\tilde{g})}{\left|\widetilde{G}\right|}.$$

    下面只需要计算不动点个数. 设$g$有轮换分解

    $$g=(abc\cdots pq)(rs\cdots t)\cdots(uv\cdots w),$$

    设$f\in C^X$是$\tilde{g}$的不动点，则$f$应当满足：

    $$f(a)=\tilde{g}(f)(a)=f(g(a))=f(b)=f(g(b))=f(c)=\cdots=f(p)=f(q),$$

    类似地

    $$f(r)=f(s)=\cdots=f(t),\quad f(u)=f(v)=\cdots=f(w).$$

    由此可见如果$f$是$\tilde{g}$的不动点，则$f$一定将位于置换$g$的同一个轮换中的元素染成同样的颜色

    反过来，如果$f$把$g$的同一个轮换因子中所有元素染成同一个颜色，则必然一定是$\tilde{g}$的不动点，所以：

    $$\#\{\tilde{g}\text{的不动点}\}=\#\{g\text{中各轮换因子染色相同的染色方式}\}=m^{c(g)}.$$

    也就是

$$c_1(\tilde{g}) = m^{c(g)}.$$

代入Burnside引理即可得结论.

- 更一般地，可以引入**Polya母函数**得到每种染色方式具体用色情况是什么. 事实上轮换因子可以写成

$$P = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(b_1+\cdots+b_m)^{c_1(g)}\cdots(b_1^k+\cdots+b_m^k)^{c_k(g)}\cdots(b_1^n+\cdots+b_m^n)^{c_n(g)}.$$

【解释】幂次表示颜色使用的次数，$c_i(g)$表示长度为$i$的轮换的个数，$b_1,\cdots,b_m$是每种颜色的代号，而用加号连接表示颜色选择中的"或者"

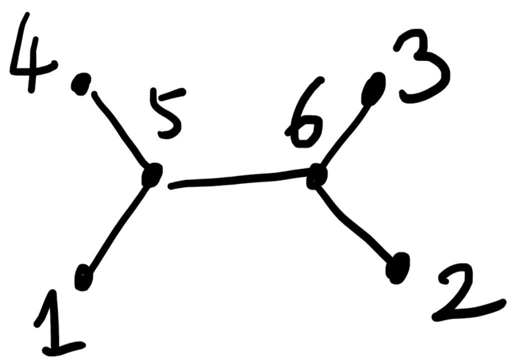
- 【例】六种颜色对正六面体的六个面染色，要求每个面颜色不相同，求方案数

【解】利用Burnside引理. 由于染色不同，总方案数为$6\times5\times4\times3\times2=24$

考虑正六面体置换群$G$作用在染色方案$C^X$中，只有单位元有不动点，其他均没有不动点，于是$c_1(f_0)=24$（其中$f_0$是单位元），而对于其他的$f_1,\cdots,f_{23}$都有$c_1(f_i)=0$，所以，根据Burnside引理可知，染色等价类个数（恰好等于轨道个数）为：

$$t = \frac{\sum_{g\in G}c_1(g)}{|G|} = \frac{6!}{24} = \frac{720}{24} = 30.$$

- 【例】一棵树$S$如下图，用$A,B$两种颜色染其顶点，一共有多少种不标号的染色方法？




【解】先写置换群元素

$$g_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6),\quad g_1=(56)(34)(12),\quad g_2=(14)(23)(5)(6),\quad g_3=(12)(34)(56),$$
$$g_4=(13)(24)(56),$$

写其轮换指标：

$$P_G(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4}(x_1^6+x_2^2x_1^2+2x_2^3).$$

$m=2$，$n=6$，根据Polya定理

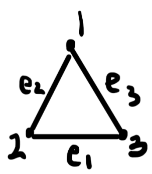
$$t=P_G(2,2,2)=\frac{1}{4}(2^6+2^2\cdot2^2+2\cdot2^3)=24.$$

- 【例】同构图计数，看成对完全图$K_n$的$\{0,1\}$边染色

顶点的置换$g$诱导边的置换$\pi_g$，$\pi_g$以以下方式作用在$E(K_n)$：

$$\pi(g)(ij):=(\pi(i),\pi(j)),\quad \forall ij\in E(K_n).$$

$$S_3=\{(1)(2)(3),(123),(321),(1)(23),(2)(13),(3)(12)\}\to G_3=\{(e_1),(e_2e_3),(e_1e_2),(e_1e_3),(e_1e_2e_3),(e_1e_3e_2)\}$$




其Polya母函数为

$$P(G;x,y)=\frac{1}{6}((x+y)^3+2(x^3+y^3)+3(x+y)(x^2+y^2))=x^3+y^3+xy^2+x^2y.$$

$$x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y$$