2022-2023 春《测度与积分》期末（回忆）

2023 年 6 月 10 日

1. (1) 设 A 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间且 $A \neq H$，证明对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in H$，$\|x\| = 1$，使得 $\operatorname{dist}(x, A) > 1 - \varepsilon$.

   (2) 设 Hilbert 空间 H 中单位球是紧的，证明 H 是有限维的.

   (3) 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧算子，证明 0 是 T 的连续谱点，即 T 不存在有界算子逆.

   (4) 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧算子，证明 $I - T$ 的零空间 $\ker(I - T)$ 是有限维的.

   (5) 设 T 是 Hilbert 空间 H 上紧算子，证明 $I - T$ 的像空间 $\operatorname{Ran}(I - T)$ 是闭的.

2. 设 $H = L^2([a, b])$，$\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ 是 H 的规范正交基. $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$ 是一列正交向量组，而且满足：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |\varphi_k(x) - \psi_k(x)|^2 \mathrm{d}x < 1.$$

   证明 $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$ 是 H 的一组正交基.

3. 定义 $\mathcal{M}_+$ 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ 上全体有限的（正的）Borel 测度. 设 $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+$，定义 μ 和 ν 的卷积为 $(\mu * \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x + y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y)$.

   证明卷积满足交换律和结合律，即 $\mu * \nu = \nu * \mu$，$(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$；并说明是否存在卷积单位元，即是否存在 $\nu \in \mathcal{M}_+$，使得对任何 $\mu \in \mathcal{M}_+$，都有 $\mu * \nu = \mu$?

4. 对 $j = 1, 2$，令 μ_j, ν_j 是 $(X_j, \mathcal{M}_j)$ 上两个 σ- 有限的正测度，满足 $\nu_j \ll \mu_j$. i 证明 $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ ，而且其 Radon-Nikodym 导数满足:

$$\frac{\mathrm{d}\nu_1 \times \nu_2}{\mathrm{d}\mu_1 \times \mu_2}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1) \frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

5. 设 $H = L^2((0, 1))$，定义其上的算子 $\mathscr{A}$：$x(t) \mapsto t x(t)$.

   (1) 证明 $\mathscr{A}$ 是有界、对称算子，但不是紧算子；

   (2) 证明 $\mathscr{A}$ 没有特征向量；

   (3) 对任何 $0 < \lambda < 1$，证明 λ 不是 $\mathscr{A}$ 的谱点（即 $\ker(\lambda I - \mathscr{A}) = \{0\}$），且 $\overline{\operatorname{Ran}(\lambda I - \mathscr{A})} = H$，但 $\operatorname{Ran}(\lambda I - \mathscr{A}) \neq H$.

6. 设 μ^* 为 X 上外测度，$\mathcal{M}$ 为 μ^*-可测集组成的 σ-代数，$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 为测度. $E \subset X$，且 $\mu^*(E) = \mu^*(X)$（E 未必属于 $\mathcal{M}$）

(1) 设 $A, B \in \mathcal{M}$ 且满足 $A \cap E = B \cap E$，证明 $\mu(A) = \mu(E)$;

(2) 记 $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$，证明 $\mathcal{M}_E$ 是 σ-代数. 对 $A \cap E \in \mathcal{M}_E$ 定义 $\nu(A \cap E) = \mu(A)$，证明 ν 是 $\mathcal{M}_E$ 上的测度.