离散数学方法—图论

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

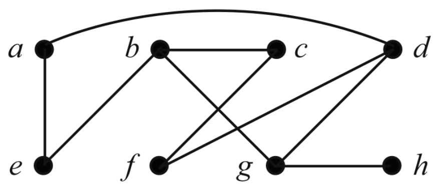
J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

1. 基本概念 Introductory Concepts

- 【定义】图 (graph) G是一个二元组$G=(V,E)$，其中V,E是集合
  - 集合V称为**顶点集**，其中的元素称为**顶点**，例如$V=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$
  - 集合E称为**边集**，它是$V\&V=\{\{a,b\}:a\in V,b\in V\}$的子集，例如

$$E=\{\{a,e\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,f\},\{d,f\},\{d,g\},\{g,h\}\}$$

  - 图的自然可视化表示：用线（边）将平面上的点（顶点）连起来形成的图形



- 【定义】空图，平凡图，图的阶，多重边及其重数，邻接点和邻接边，环（loop），简单图（simple graph，即无环和多重边的图），顶点的度（规定环给一个顶点贡献的度为2），奇 (odd) 点，偶 (even) 点，顶点度序列
- 【定义】最大度：$\Delta(G):=\max\{d(v):v\in V(G)\}$；最小度：$\delta(G):=\min\{d(v):v\in V(G)\}$
- 【命题】设G为非空简单图，则G必然存在度相同的两个点

  【证明】设$|V(G)|=n.$
  - 假设G存在度为0的点，因为G是简单图，所以G中的任何一个点之多与$n-2$个其他点有边相连，因此度的取值只能为：

$$0,1,2,\cdots,n-2;$$

  - 假设$\delta(G)\geq 1$，则度的取值只能为：

$$1,2,3,\cdots,n-1;$$

  - 由此可知，G中顶点的度的取值总是不超过$n-1$种，根据抽屉原理可知必然存在度相同的两个点.
- 【定理】每个无向图顶点的度之和等于边数的两倍：$\sum_{v\in V}d(v)=2|E|$

  【证明】每条边各贡献给它关联的两个顶点的度为1（重复记重数），由此立刻得要证明的等式. $\square$
- 【定理】每个无向图必有偶数个奇数度的顶点

  【注】这个定理和上一个定理一样，不需要假设图是简单图

  【证明】设V_1和V_2分别是V中奇点和偶点的集合，$V=V_1\sqcup V_2$，根据上一个定理可知：

$$\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)=2|E|.$$

  因为$\sum_{v\in V_2}d(v)$和$2|E|$都是整数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$是偶数. 而根据V_1的取法可知该求和中每一项都是奇数，所以必然有偶数项，也就是$|V_1|=2.$ $\square$
- 【定义】（k-正则图）G是无项简单图，若$\Delta(G)=\delta(G)=k$，则称G是一个k-正则图
- 【定义】$\pi=(d_1,\cdots,d_n)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，如果存在以$V=\{v_1,\cdots,v_n\}$为点集的$n$阶**简单图**$G$，使得$d_G(v_i)=d_i$，$\forall i=1,\cdots,n$，则称$\pi$是一个可图序列（graphic），$G$称为$\pi$的实现图（不一定唯一）
- 【定理】假设π满足：

  1）$n-1\geq d_1\geq\cdots\geq d_n$（不本质，调整顺序都能做到）

  2）$\sum_{i=1}^n d_i$是偶数（这是一个可图的必要条件，回忆等式$\sum_{v\in V}d(v)=2|E|$）

  则π可图，当且仅当$\pi'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$可图

【证明】

- 对于必要性，设π'的实现图是G'，在G'中添加一个点v和边$\{v,v_2\},\cdots,\{v,v_{d_1+1}\}$，则此时$d(v)=d_1$，$d(v_k)=d_k$对于$k=2,\cdots,d_1+1$. 对于$v_k$，$k=d_1+2,\cdots,n$，由于在添加点和边之后没有发生变化，所以它们的度仍然满足$d(v_k)=d_k$，综上所述所得到的新图G就是π的实现图.
- 反之，假设π可图，G为实现图. 令$S=\{v_i|i=2,\cdots,d_1+1\}$，$S_{v_1}=\{u\in V(G):\{u,v_1\}\in E(G)\}$. 因为$G$是简单图，所以根据定义可知$|S_{v_1}|=d_1$. 我们取$\pi$的使得$|S_{v_1}\cap S|$最大的实现图$G$，断言这时实际上有$S=S_{v_1}$，若不然，则存在$v_i\in S-S_{v_1}$，以及$v_j\notin S$，使得$\{v_1,v_j\}\in E(G)$（根据抽屉原理），由于$v_j\notin S$，所以$d_i\geq d_j$（$\pi$的条件（1））所以存在$v_k$，使得$\{v_i,v_k\}\in E(G)$但是$\{v_j,v_k\}\in E(G)$. 令$G^*$是$G$中以$\{v_1,v_i\}$与$\{v_j,v_k\}$分别代替$\{v_1,v_j\}$与$\{v_i,v_k\}$所得到的图，则此时$G^*$也是$\pi$的实现图（因为做替换操作之后，$v1,v_i,v_j,v_k$的度都不发生改变）.

  但是，在G^*中，$|S^*_{v_1}\cap S|>|S_{v_1}\cap S|$，这矛盾于$G$的选取，因此我们证明了在$G$中实际上有$S=S_{v_1}$. 在$G$中删去$v_1$以及其关联的所有的边，即可得到$\pi'$的一个实现图.

- 【定义】（完全图）顾名思义. G简单图，若$\forall v_i,v_j\in V(G)$，$i\neq j$，都有$\{v_i,v_j\}\in E(G)$，则称G是完全图，记n个顶点为完全图K_n.
- 【命题】
  - 完全图一定是正则图，每个顶点的度都是$n-1$；
  - $|E(K_n)|=\frac{n(n-1)}{2}$；
- 【定义】（补图）G是简单图，$V(H)=V(G)$，且$\{v_i,v_j\}\in E(H)$当且仅当$\{v_i,v_j\}\in E(G)$

  则称H是G的补图（complement graph），记为$H=\overline{G}$
- 【定义】（图同构）$G=(V,E)$和$G'=(V',E')$是图，如果存在双射$f:V\to V'$，而且任何$v_i,v_j\in V$，若$e=\{v_i,v_j\}\in E$当且仅当$e'=\{f(v_i),f(v_j)\}\in E'$，且$e$和$e'$的重数相同，则称$G$和$G'$是同构的，记$G\cong G'$.

  【命题】显然，如果$G\cong G'$，则$|V(G)|=|V(G')|$，$|E(G)|=|E(G')|$，而且有$d_G(v)=d_{G'}(f(v))$

  【注】判定图同构一般来说是一个NP-hard问题
- 【定义】（子图）H是G的子图，如果$V(H)$和$E(H)$分别是$V(G)$和$E(G)$的子集. 如果有多重边，那么H中边的重数不能超过G中对应边的重数
- 【定义】（生成子图）H是G的子图，如果H和G的顶点集相同，则称H是G的生成子图（spanning subgraph）
- 【定义】（导出子图）$V'\subset V$，V'将V中的边"都携带过去"所生成的G的子图称为导出子图，具体来说，称G'是G的导出子图，如果$V'\subset V$而且对任何$u,v\in V'$，$\{u,v\}\in E(G)$当且仅当$\{u,v\}\in E(G')$
- 【定义】（边导出子图）$E'\subset E$，由E'以及其所有V中端点构成的图称为边导出子图，具体来说，称G'是G的导出子图，如果$E'\subset E$而且$u\in V'$当且仅当存在v使得$\{u,v\}\in E'$.
- 【定义】（重构图）

  【Motivation】为了研究图的局部性质，我们引入重构图的概念.

  称图H是G的重构图，如果存在双射$\phi:V(G)\to V(H)$使得$G_v\cong H_{\phi(v)}$，其中记号G_v表示G删去v所得到的删点主子图.

  称图G是可重构的，如果G的每个重构图都和G本身同构.

  【例】$\overline{K}_2$是K_2的重构图（非常容易验证），但显然不同构（边数并不相同）
- 【定义/命题】（路）
  - 途（walk）指的是图G中的点边交替序列$w=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$，如果满足对任何$1\leq i\leq k$都有$e_i=\{v_{i-1},v_i\}$，则称w为途（walk）. 又如果$v_0=v_k$，则称w为闭途（closed walk）. 边k的个数称途的长度

    【remark】对于简单图，由于不存在重边，这其中的边通常省略，例如$w=v_0v_1\cdots v_{k-1}v_k$
  - 迹（chain）是满足$e_1,\cdots,e_k$互不相同（但是顶点可以有相同）的途$w=v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$. 又如果$v_0=v_k$，则称w为闭迹（closed chain）
  - 路（path）若迹w中顶点$v_0,\cdots,v_k$互不相同，则称其为路（path）. 另外，如果$v_0=v_k$，而顶点$v_0,\cdots,v_{k-1}$互不相同，则称迹w为圈（cycle）
  - 【命题】若G中有途则必有迹，有迹则必有路
- 【定义】连通性

  G是无向图，若u,v之间存在一条路，则称u和v连通. 规定对任何点u，u都和自己本身连通.

  连通是一个等价关系

连通分支、连通图

- 【定理】$G=(V,E)$是连通的，当且仅当对任何分划$V=V_1\sqcup V_2$，都存在$u\in V_1$以及$v\in V_2$，使得$\{u_1,u_2\}\in E(V)$.

  【证明】显然.

  【例】G简单图，$|V(G)|=n$且$m=|E(G)|>\binom{n-1}{2}$，则G连通.

  【证明】考虑V的任何一个分划$V=V_1\sqcup V_2$，断言存在$u\in V_1$，$v\in V_2$，使得$\{u,v\}\in E$，否则对任何$u\in V_1$和$v\in V_2$，都有$\{u,v\}\notin E$，所以此时$|E|$不会超过将V_1中顶点两两相连、V_2中顶点也两两相连所得到的图的边数，若$|V_1|=1$或$|V_2|=1$（不妨$|V_1|=1$），则有:

$$m=|E|\leq 0+\binom{|V_2|}{0}=\binom{n-1}{2}.$$

  这与提给条件$m>\binom{n-1}{2}$是矛盾的.

  若$|V_1|=k$满足$1<k<n-1$，则:

$$|E|\leq\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}=\frac{k(k-1)+(n-k)(n-k-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(k-1)(k-(n-1))<\binom{n-1}{2}.$$

  以下是$n=3$的G不连通的例子，这里$m=\frac{(3-1)(3-2)}{2}=1$.

图 1: $n=3$，$m=1$，G 不连通

- 【命题】$\delta\geq 2$的连通简单图必有圈

  【证明】从任何一个点u出发，因为$\delta\geq 2$，所以存在v_1使得$\{u,v_1\}\in E(V)$，对v_1做相同论断可知存在v_2使得$\{v_1,v_2\}\in E(V)$，一直找下去，因为G是有限图，因此必然存在一个n，使得v_n与已经走过的点重合，这就找到一个圈.□

  【命题】$\delta\geq 3$的连通简单图必有带弦的圈（即存在圈C以及$u,v\in C$，$\{u,v\}\in E(V)$但是$\{u,v\}$不是C中的边），进一步地，必有长为偶数的圈.

  【证明】设$P=v_1v_2\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_\ell$是$G$的一条最长的路. 断言所有与$v_1$和$v_\ell$有边相连的点都在路上（否则与$G$的最长性矛盾）

  因为$\delta\geq 3$，所以存在i,j，$i\neq j$，$i\neq 2$，则（例如）$v_1v_2\cdots v_jv_1$就是一个带有弦的圈.

  考虑$v_1v_2\cdots v_jv_1$，如果i和j之一为偶数，则分别考虑$v_1v_2\cdots v_iv_1$和$v_1v_2\cdots v_jv_1$可知存在长度为偶数的圈

  如果i和j都是奇数，则$v_i\cdots v_jv_1v_i$是长度为偶数的圈.

  【remark】事实上，设$\delta=k\geq 2$，则G必有长度为至少是$k+1$的圈

  【证明】设$P=v_1\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_\ell$是$G$的最长路，取$v_i$是与$v_1$相连的且使得$i$最大的点. 因为$d(v_1)\geq\delta\geq k$，所以在$P$中，$v_1$和$v_i$之间至少有$k$个顶点（根据与$v_1$和$v_\ell$右边相连的点都在路上，否则与$G$的最长性矛盾），考虑$v_1\cdots v_iv_1$，这就是一个长度至少是$k+1$的圈.

  【命题】G连通简单图，但不是完全图，则存在$u,v,w\in V(G)$使得$\{u,v\},\{v,w\}\in E$但是$\{u,w\}\notin E$.

  【证明】G不是完全图$\Rightarrow|V(G)|\geq 3$且存在$u,x\in V(G)$，$\{u,x\}\notin E$.

  G是连通图$\Rightarrow$ 存在u到x的最短路径$P=uv_1\cdots x$.

  如果P的长度是2，则$w=x$，$v=v_1$就是所求.（此时$\{u,x\}\notin E$根据G长度的最短性就可以得到）

  否则令$v=v_1$，$w=v_2$，根据P的最短性可知$\{u,v_2\}\notin E$，也就是$\{u,w\}\notin E$

- 【定义】割集

  $G=(V,E)$，如果**删去**$V_1\subset V$中所有顶点（包括与之相连的边）导致G变得不连通或者只剩下一个顶点，就称V_1是G的（点）割集. 如果V_1是单点集，则称为割点.

- 【定义】连通度

  【motivation】用来描述连通性的强弱

  G图，定义$\kappa(G)=\min\{|V_1|:V_1\text{是割集}\}$为$G$的点连通度

  【例】有割点的连通图的$\kappa(G)=1$，非连通图的$\kappa(G)=0$，完全图的$\kappa(K_n)=n-1$

- 【定理】一个至少有三个点的连通图G，v是其割点当且仅当存在u,w使得从u到w的任何路都通过v

  【证明】显然. $\square$

- 【定义】$G=(V,E)$，$E_1\subset E$，删去E_1后G不连通，则称E_1为G的**边割集**，如果E_1是单元素集，则称为**割边**或者**桥**

- 【定义】边连通度

  G图，定义$\lambda(G)=\min\{|E_1|:E_1\text{是边割集}\}$为$G$的边连通度.

  【例】完全图的$\lambda(K_n)=n-1$.

  【证明】考虑任何一个顶点，删去与之相连的$n-1$条边后图不连通.

- 【定理】G连通，$\lambda(G)=k$，则存在$E_1\subset E$，$|E_1|=k$而且$G-E_1$只有两个连通分支.

  【证明】假设删去E_1后有三个连通分支，那么加上一条边后仍然不连通，这说明可以删去更少的边使得G变得不连通，这与$|E_1|=k$的最小性矛盾.

- 【定理】e是割边当且仅当存在$u,v\in G$使得任何一条u到v的路都路过e

- 【定理】e是割边当且仅当e不在G的任何一个圈上

  【证明】

  - $\Rightarrow$：设e是割边，根据定义可知存在$u,v\in V$，使得u,v在G中有路连接，但是在$G-e$中无路连接. 设$e=\{x,y\}$，如果e在圈C上，则$G-e$中一定有路$C-e$连接x和y，矛盾.
  - $\Leftarrow$：用反证法，假设$e=\{x,y\}$不是割边，则$G-e$仍然是连通的. 所以$G-e$中有路P连接x和y. 因为这条路来自$G-e$，所以它必然不经过e，于是$P+e$是G中的圈，这与e不在G中任何一个圈上矛盾.