离散数学方法—树与生成树

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

2. 树与生成树

【定义】一个连通、无圈的无向图T（当然自动为简单图）称为树

【定义】（树叶）树中度数为1的顶点称为树叶

【定义】树中度数大于1的顶点称为分支顶点

【定义】若无向图T的每个连通分支都是树，则称之为森林

【定理】图T，则TFAE：

- T是树
- T中每一对之间有且仅有一条路（因此可以将这条路记为$P(u,v)$）
- T是无圈的，但是任何一对不相邻的顶点之间加上一条边之后，$T+e$有唯一的圈
- T是连通的，且每条边都是割边
- T是连通的，且满足$m=n-1$
- T是无圈的，且满足$m=n-1$

【例子】T是阶数$n\geq 2$的树，则它是二分的

【证明】回忆二分图的充分必要条件，一个无向图是二分图当且仅当其所有圈的长度都是偶数，而树中无圈，所以必是二分的。

【例子】设F是n阶森林，且有k个连通分支，问F的边数?

【解】回忆树的等价定义，树是点边数量满足$m=n-1$的连通（无圈）图。在此处，我们记k个连通分支分别为$T_1,\cdots,T_k$，则他们的点数和边数满足$m_i=n_i-1$，注意到$|E(F)|=\sum_i m_i$，$|V(F)|=\sum_i n_i$，对上面的式子求和可得$m=n-k$.

【命题】每个非平凡树至少有两片树叶

【证明】设片数为k，$m=n-1$，$\delta(T)\geq 1$，$\sum d(v)=2m$，所以带入可得$k+2(n-k)\leq 2(n-1)$，解得$k\geq 2$

【定义】（离心率）G是图，$u\in G$，则离心率定义为：

$$e_G(u):=\max\{d(u,v):v\in V(G)\}$$

【定义】（半径）$\operatorname{rad}(G)=\max_{u\in V(G)} e_G(u)$

【定义】（中心点）$e(u)=\operatorname{rad}(G)$，则称$u$是$G$的中心点（未必唯一），中心点构成的集合称为中心集。

【定理】任何树的中心集或者恰好包含一个点，或者恰好含有两个相邻点。

【证明】设T有两个不相邻的中心点x和y，则设$P(x,y)$是T中x-y的唯一路，取$z\in P(x,y)$，$z\neq x$，$z\neq y$，取w使得$e(z)=d(z,w)$

- 如果$P(z,w)$的第二点为$P(z,y)$的第二点，则$P(z,w)\cap P(z,x)=z$（如果不然，则T将有圈），所以$\mathrm{rad}(T)=e(x)\geq d(x,w)=d(x,z)+d(z,w)>d(z,w)=e(z)$.
- 若$P(z,w)$的第二点不是$P(z,y)$的第二点，则$P(z,w)\cap P(z,y)=z$，由此可知：

  $\mathrm{rad}(T)=e(y)\geq d(y,w)=d(y,z)+d(z,w)>d(z,w)=e(z)$，又矛盾。

【另一种构造性证明】考虑以下树的序列：T_0为T本身，T_1是T_0去掉所有叶子之后得到的新的树，T_2是T_1去掉所有叶子得到的新的树，依次做下去，则一定存在一个T_r使得T_r是K_1或K_2（因为图是有限的）

考虑T_i，在T_i中，设v是非叶子顶点，则与v相距最远的点必然是叶子点，这说明T_{i+1}中v的离心率比在T_i中小1，注意这对于T_i中所有非叶子点都对，所以T_{i+1}和T_i的中心必相同。

因此，T_r的中心就是T_{r-1}的中心，与此同时T_r是K_1或者K_2，所以它的中心就是它本身，因此T_r就是T_{r-1}的中心，因此也是T_{r-2}的中心，$\cdots$，最终是$T_0=T$的中心，这完成了证明。$\square$

【remark】构造性的证明直观意义更明显。

【定义】（生成树）图G的生成子图是树，则称为生成树

【定义】（基本关联矩阵）$G=(V,E)$是**有向、弱连通图**。其完全关联矩阵B划掉任何点v_k对应的行，得到$(n-1)\times m$矩阵B_k称为一个基本关联矩阵

【定理】$\mathrm{rank}\, B<n$

【证明】B的每一列恰好只有1和-1两个非零元，所以把B的1到$n-1$行全部加到第n行之后第n行全为0

【定理】B_0是B的任何一个k阶子阵，则$\det B_0=\pm 1$或0

【证明】对k归纳，$k=1$不用证明，假设$k-1$成立，设B_0是k阶子阵，每列最多只有2个非零元，如果某一列全为0，或者B_0中每一列恰好有两个非零元，则这时$\mathrm{rank}\, B_0<k$，$\det B_0=0$

如果存在一列有且只有1个非零元，则将行列式按这一列展开，用归纳法立刻得$\square$

【定理】B为有向弱连通图G的完全关联矩阵，则$\mathrm{rank}\, B\geq n-1$

【证明】设B中线性相关的最小行数为$\ell\leq n$，设$v_{i_1},\cdots,v_{i_\ell}$分别是对应的顶点，则有：

$$k_1b(i_1)+k_2b(i_2)+\cdots+k_\ell b(i_\ell)=0,\quad \forall j=1,2,\cdots,\ell,\quad k_j\neq 0.$$

B每一列仅有两个非零元$\Rightarrow$这ℓ行的第t（$t=1,\cdots,m$）个分量最多有之多有2个非零元，而且不可能只有一个非零元（否则上面式子左边的第t个分量不是0，矛盾）

由此可知，我们可以先做行变换将这ℓ行移到前面，然后再把前ℓ行中就有2个非零元的列（假设有r个）移到前r列，此时B具有如下形状：

$$B\to B'=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$$

其中，B'仍是关联矩阵（只是相当于行、列的指标发生了改变）。而且$\mathrm{rank}\, B'=\mathrm{rank}\, B$

下面我们断言$\ell=n$，否则$n-\ell>0$，则根据B'的形状可知B至少两个（弱）连通分支（其中r条边只与其中ℓ个点相关，另外$m-r$条边只与另外$n-\ell$个点相关），这和G是弱连通的矛盾。

因此$\ell=n$，所以B中至少需要n行才能线性相关，而任何$n-1$行都线性无关，所以$\mathrm{rank}\, B\geq n-1$.

【定理（Prim Algorithm）】设V'是赋权图$G=(V,E)$的顶点真子集，e是两个端点分别在V'和$V-V'$中权最小的边，则G中一定含有含e的最小生成树。

【证明】设T_0是G的一棵最小生成树，如果$e\notin E(T_0)$，则T_0+e是具有唯一的圈C，且包含e，同时也包含一个边$e'=\{u,v\}$使得$u\in V'$，$v\in V-V'$。由已知得$w(e)\leq w(e')$，所以$(T_0+e)-e'$是G的一棵最小生成树（是事实上此时e和e'的权是一样的）

【定理（矩阵树定理）】设G是无向连通图，B_k是其基本关联矩阵（注意，对于无向连通图，我们可以人为地构造其完全关联矩阵M如下，首先定义$n\times m$的矩阵N：

$$N_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果}v_i\text{和}e_j\text{关联}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

然后把N每一列的第一个1改成-1得到新的矩阵M，M删去第k行可以得到B_k）

则，其最小生成树的数量等于$\det\left(B_kB_k^T\right)$.

【例题】设T是树，有k条边，如果G是最小度$\geq k$的图，则T一定是G的某个子图。换句话说，一个图G包含所有阶不超过$\delta(G)+1$的树作为子图。

【证明】

- 我们对k用数学归纳法。
- 如果$k=0$，则$T=K_1$，结论显然成立。（K_1是任何图的子图）如果$k=1$，则$T=K_2$，对于所有最小度≥ 1的图，存在两个顶点u,v以及边$e=\{u,v\}$使得$e\in E(G)$，因此K_2是其子图。
- 假设对所有边数为$k-1$的树（$k\geq 2$）结论都是正确的，则考虑恰好有k条边的树T. 我们知道，T至少有两个叶子点。设v是其中一个，w是与v相邻的唯一的点，考虑$T-v$，则$T-v$恰好是有$k-1$条边的树。根据归纳假设可知，$T-v$是G的一个子图（不妨假设$T-v$已经嵌入在G当中）。现在G有$k+1$个顶点，因此存在G中不在$T-v$中的顶点。因为$\delta(G)\geq k$，所以必然存在$u\notin V(T-v)$，而$\{u,w\}\in E(G)$，显然u和$T-v$共同构成了一棵同构于T的树，因此T是G的一个子图。

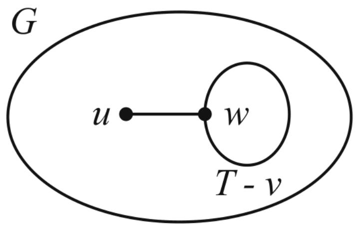
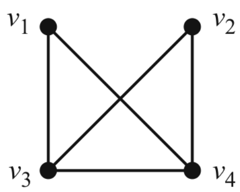
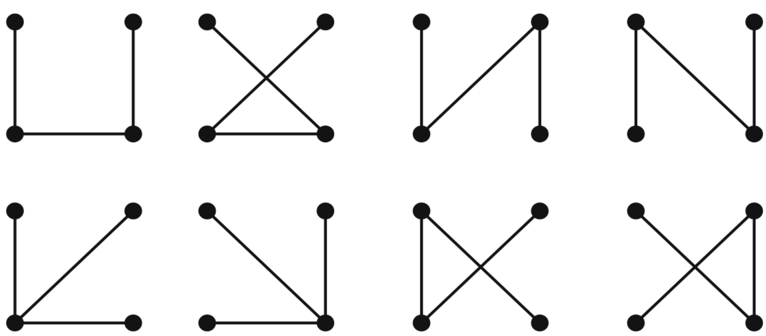


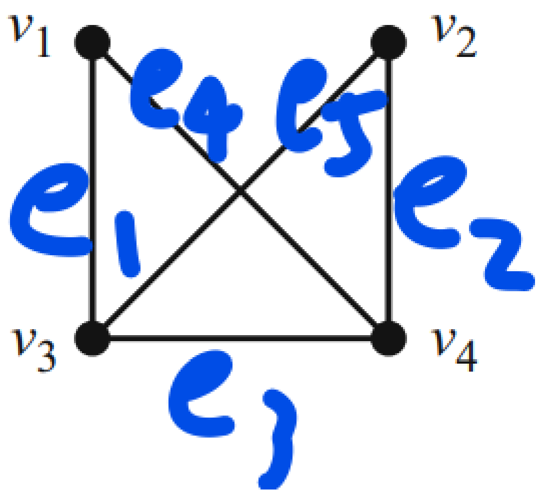
FIGURE 1.40. A copy of T inside G.

【例题】考虑下面的图G，问它的生成树计数?





【解】我们做如下标号，并人为地定义其基本关联矩阵如下（每一列第一个数非0数为-1）：



$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

我们划掉第一行得到B_1

$$B_1=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

计算$\det\left(B_1B_1^T\right)=8$，结果正确，score one for Kirchhoff!!