离散数学方法—Euler问题与Hamilton问题

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

- 【定义】Euler迹：无向连通图G中一条迹，如果它经过图的每一条边一次且仅一次，则称为Euler迹
- 【定义】Euler图：G无向连通图，如果存在一条**闭迹**，经过图中的每一条边一次且仅一次，则称之为**Euler回路**

  称有Euler回路的图为Euler图

- 【定理】（Euler）非空连通图是Euler的，当且仅当其不包含奇数度的顶点

  【证明】

  - 设G是E图，C是其Euler回路，其起点（也是终点）为u，顶点v作为C的内部顶点，每出现一次就有两条与它关联的边出现（从一条边进，再从一条边出）；而对于顶点u，出去和回来的次数相同，所以度为偶数.
  - 用反证法，假设G是非Euler连通图而且没有奇度的顶点. 选择边数最少的反例图，由于G每个顶点的度都至少是2，则G包含一条闭迹，设C是最大闭迹，因为假设了G不是Euler图，所以C不是Euler回路，因此$G-E(C)$不是空图，取$G-E(C)$中边数最多的分支G'，则G'是G的子图且$E(G')>0$，而且$|E(G')|<|E(G)|$，根据G的选取可知G'有Euler回路C'，G连通$\Rightarrow$ 存在$v\in V(C)\cap V(C')$（否则，如果两者相交为空集，则$E(G')=E(C')$和$E(C)$中的边不共用任何顶点，因此导出子图$G[E(C)]$和$G[E(G')]$没有任何边相连，但是$E(G')\cup E(C)=E(G)$，说明$G=G[E(C)]\cup G[E(G')]$，这与G是连通的矛盾）

    设v是C和C'的起点和终点，则CC'是G的一条简单回路，与C的选择是矛盾的.

  【推论】一个非空连通图有Euler迹，当且仅当其最多有两个奇点（事实上有2个或者0个）

- 【定义】Hamilton路：G有一条路，通过G的每个顶点恰好一次，则称其为Hamilton路

  如果G有一个圈，通过G的每个顶点恰好一次，则称其为Hamilton圈. 称有Hamilton圈的图为Hamilton图

- 【定理】n阶无向简单图是H图，当且仅当存在$E_n=\{e_{t_1},\cdots,e_{t_n}\}\subset E(G)$，使得对任何$i(1\leq i\leq n)$，$G[E_n-\{e_{t_i}\}]$都是树.

  【证明】

  - 必要性：如果是H图，则不妨取E_n就是H圈上的n条边，则$G[E_n-\{e_{t_i}\}]$是一条长度为$n-1$的路（对任何$1\leq i\leq n$），因而当然是树.
  - 充分性：记$H=G[E_n]$，$H_i=G[E_n-\{e_{t_i}\}]$，根据假设可知H_i都是树，所以H是连通图，即$\delta(H)\geq 1$.

    如果$\delta(H)=1$，考虑$e_{t_i}=\{u,v\}$使得$d(u)=1$，则$H_i=G[E_n-\{e_{t_i}\}]$中u是孤立点，这与H_i是树矛盾.

    所以$\delta(H)\geq 2$，根据$2n=2|E(H)|=\sum_{v\in V(H)}d_V(v)\geq n\delta(H)=2n$，根据等号成立可知$H$的每个点度数都是$2$，也就是$H$是$2-$正则图（即圈），由此可知$H$是$G$的Hamilton圈.

  【remark】判断一个图是否是Hamilton图generally是一个NP-hard的问题

- 【定理】设G是至少三个点的完全图，则G是H图（显然）
- 【定理】G是简单图，$n\geq 3$，若对任何$\{u,v\}$不相邻，都有$d(u)+d(v)\geq n$，则G为H图

【证明】假设不成立. 设G是满足条件的边最多的不是Hamilton图，$n \geq 3 \Rightarrow G$不是完全图且G一定连通.

设$\{u,v\} \notin E(G)$，则根据G的取法，$G+\{u,v\}$是哈密顿图. G非H图$\Rightarrow$ $G+\{u,v\}$的每个H圈都包含$\{u,v\} \Rightarrow G$中有$uv_2v_3\cdots v_{n-1}v$这条H路（定义$u=v_1$，$v=v_n$）.

我们定义两个集合：

$$S=\{v_i : uv_{i+1} \in E(G)\}, \quad T=\{v_i : vv_i \in E(G)\}$$

则：$|S|=d(u)$，$|T|=d(v)$，所以根据假设可得$|S|+|T| \geq n$

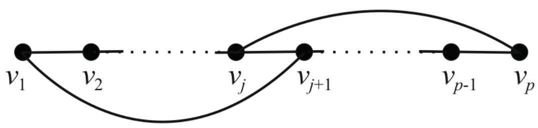
断言：$S \cap T = \varnothing$

[如果不然，则存在$v_j \in S \cap T$，于是$j \neq 1,n$，$2 \leq j \leq n-1$，这时候
$u \to v_j \to v \to v_{j+1} \to u$是$G$的一个H圈，矛盾]

所以：

$$n-1 \geq |S \cup T| = |S|+|T| \geq n,$$

矛盾，所以G为H图.



【推论】G简单图，$n \geq 3$，$\delta \geq \frac{n}{2}$，则G为H图

- 【定理】G简单图，$n \geq 2$，其对于任何不相邻u,v，$d(u)+d(v) \geq n-1$，则G有H路

  【证明】

  - 断言G是连通的，否则，存在两个子图H_1和H_2无边相连接，且对于$u \in H_1$，$v \in H_2$，$d(u) \leq |V(H_1)|-1$，$d(v) \leq |V(H_2)|-1$，所以$d(u)+d(v) \leq |V(G)|-2$，与$\geq n-1$矛盾
  - 设G没有H路，设$P=v_1\cdots v_k$是最长的路，则$k \leq n-1$，设$N(v_i)=\{u : uv_i \in E(G)\}$，于是
    - $N(v_1) \cup N(v_k) \subset V(P)$（否则还有更长的路）
    - G中没有包含$V(P)$所有顶点的圈，特别地$v_1v_k \notin E(G)$（否则G有圈C包含$V(P)$所有点，设$w \in V(G)-V(C)$，G连通$\Rightarrow$存在P'连接w和C中某个点，则从w经过P'再绕C走一圈得到的路是更长的路.）
  - 令$S=\{v_i : v_1v_{i+1} \in E(G)\}$，$T=\{v_i : v_iv_k \in E(G)\}$

    因为$v_1v_k \notin E(G)$，所以$v_1 \notin S \cup T$，所以$|S \cup T| \leq k-1 \leq n-2$

    如果$S \cap T \neq \varnothing$，则存在$v_j \in S \cap T$，$j \neq k$，$v_1v_k \notin E \Rightarrow j \neq 1$，所以按照与上一个定理相同的构造可以看出有包含$V(P)$所有点的圈，矛盾.

    所以$S \cap T = \varnothing$
  - $S \cap T = \varnothing \Rightarrow n-1 \leq |S|+|T| = d(u)+d(v) = |S \cup T| \leq n-2$，矛盾.

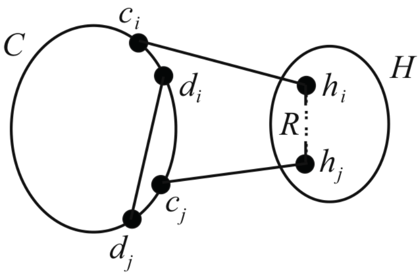
- 【定理】（Chvatal-Erdos）

  G为$n \geq 3$的图，独立数为α，点连通度为κ，如果$\alpha \leq \kappa$，则G有H图

  【证明】

  - $\alpha(G)=1$，显然成立

- $\alpha(G) \geq 2$，则$\kappa(G) \geq 2$，所以G有圈. 假设G不是H图，设C是其中最长的圈，根据G不是哈密顿图可知存在$v \in V(G)$使得$v \notin V(C)$. 设H是$G - V(C)$中v所在的那个连通分支. 设$c_1, \cdots, c_r$是C中那些与H相邻的顶点，假设标号按照顺时针顺序，对每个$i(1 \leq i \leq r)$，设h_i是H中与c_i邻接的顶点，令d_i是c_i按照顺时针排序的后继点.



- 我们有以下观察：
    - $r \geq \kappa(G)$. 如果将r个顶点全部移走，则H将不再与图的剩下部分相连，根据$\kappa(G)$的定义可知$r \geq \kappa(G)$，所以$r \geq 2$.
    - $c_1, \cdots, c_r$中不存在C中连续两个顶点. 不然，假设c_i和c_{i+1}都和H相连，设P是H中一条从h_i到h_{i+1}的路，考虑将$c_i c_{i+1}$换成$c_i P c_{i+1}$代替后得到的圈，则这个圈比C更长，矛盾. 特别地，$c_1, \cdots, c_r$和$d_1, \cdots, d_r$是无交的.
    - 最后，对任何$i(1 \leq i \leq r)$，d_i一定不和v相连. 如果不然，假设$d_i v \in E(G)$，令Q是H中从h_i到v的路，然后将C中的$c_i d_i$换成$c_i Q d_i$，则这个圈又比C更长，矛盾.
- 有了以上观察，我们定义$S = \{v, d_1, \cdots, d_r\}$，则第一个观察说明$|S| \geq \kappa(G) + 1 > \alpha(G)$，所以$S$不是独立集，也就是$S$中存在两点有边相连，第三个观察说明这两个点中不能有v，也就是存在$i < j$使得d_i和d_j是有边相连的. 此时$c_i R c_j d_i d_j c_i$是一个比C更长的圈，矛盾. 说明G是哈密顿图.

* 【命题】G有哈密顿圈，则对任何$S \subset V(G)$都有$w(G - S) \leq |S|$，其中$w(G - S)$代表连通分支数.

  【证明】设C是H圈，对任何非空子集$S = \{v_1, \cdots, v_k\}$，则删掉S中一个顶点v_1后，$C - v_1$仍然连通，因此$\omega(C - v_1 - v_2) \leq 2$，$\omega(C - v_1 - v_2 - v_3) \leq 3$，$\cdots$，$\omega(C - v_1 - v_2 - \cdots - v_k) \leq |S|$.

  因为C是H圈，所以C是G的生成子图，因此$C - S$也是$G - S$的生成子图，因此$w(G - S) \leq w(C - S)$，所以$w(G - S) \leq |S|$.

  【推论】哈密顿图一定是2-连通的

  【推论】二部图有哈密顿圈的必要条件是$|X| = |Y|$（如果$|X| < |Y|$，则去掉X的所有顶点，得到连通分支数为$w(G - X) = |Y| > |X|$，矛盾）

* 【命题】
    - 设G是2-连通，且不含有$K_{1,3}$和Z_1，则是哈密顿图.

$K_{1,3}$ Z_1

  【证明】G反例图中，根据2-连通知道有圈，设C是最长的圈，因为不是哈密顿圈，所以存在$v \notin V(C)$和$w \in V(C)$有边相连. 设a和b分别是w在C上的前驱和后继.

  断言：a和b都和v没有边相连（否则会有更长的圈）

  如果a和b没有边相连，则$\{w, v, a, b\}$的点导出子图是$K_{1,3}$，矛盾

  如果a和b有边相连，则$\{w, v, a, b\}$的导出子图是Z_1，又是矛盾

- 【定理】
  - $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$
  - 简单的界：$\delta n \le 2m \Rightarrow \delta \le [2m/n]$
- 【定理】设G是简单图，有度序列$d_1 \le \cdots \le d_n$，$d_r \ge r+k-1$，对任何$1 \le r \le d_{n-k+1}$，则G是k-连通的.
- 【定理】若$\operatorname{diam}(G) \le 2$，则$\lambda(G)=\delta$

  【证明】反证法，假设$\lambda(G)<\delta$，设E_1是G的最小边割集，则$G-E_1$有两个连通分支G_1和G_2，顶点数分别为s和t，不妨$s \le t$，加边使得$G_1=K_s$，$G_2=K_t$，得$G^\star$，则$\lambda(G) \le \delta(G) \le \delta(G^\star) \le s-1+[\lambda(G)/s]$，由此可得$\lambda(G)<s-1+\lambda(G)/s$，所以$(s-1)(s-\lambda(G))>0$，所以$s \ge \lambda(G)+1$，所以$t \ge s \ge \lambda(G)+1$.

  根据 抽屉原理，存在$u \in V(G_1)$，$v \in V(G_2)$使得$uv \notin E_1$，于是$d_{G^\star}(u,v) \ge 3$，所以$\operatorname{diam}(G^\star) \ge 3$.

  因为G是$G^\star$的生成子图，所以$\operatorname{diam}(G) \ge \operatorname{diam}(G^\star) \ge 3$. 矛盾.
- 【定理】设G是3-正则图，则$\kappa(G)=\lambda(G)$
- 【定理】（Menger）x,y是G中不相邻顶点，$p(x,y)$是从x到y顶点不相交的路，$c(x,y)$是x和y顶点分割的最小顶点数（也就是最小的子集$S \subset V(G)-\{x,y\}$使得$G-S$中x和y属于不同分支）

  则$p(x,y)=c(x,y)$

  【remark】$\kappa(G) \le c(x,y)$
- 【定理】设简单图G的点数$n \ge k+1$，则G是k连通的当且仅当G的任何两个点s和t之间存在k条不相交的路.

  【证明】$k=1$定理成立，以下设$k \ge 2$.
  - 先证明必要性.
    - $st \notin E(G)$，根据Menger定理可知，$p(s,t)=c(s,t) \ge k$，命题成立
    - $st \in E(G)$，假设s到t至多$k-1$条不相交路，则考虑$G'=G-\{s,t\}$，则G'中至多$k-2$条从s到t的不相交路，所以根据Menger定理可知：

      $$c(s,t) \le k-2 \Rightarrow \exists A \subset V-\{s,t\}, \quad |A| \le k-2, \quad \text{s.t.} s\text{和}t\text{在}G'-A\text{中没有路相连}.$$

      因为$|V-A| \ge k+1-(k-2)=3$，所以存在$u \in V-A$，使得u不是s或t.

      断言在$G'-A$中u和s有路相连.

      如果$su \notin E(G)$，则对G用Menger知存在k条不相交s-u路，所以G'中至少$k-1$条不相交s-u路，所以$G'-A$中至少1条不相交s-u路

      同理可得$G'-A$中u和t也有路相连，所以s和t有路相连，矛盾.
  - 再证充分性.

    注意s和t之间的k条不相交路中至多一条长度为1，其他$k-1$条至少含有一个不同于s,t的点，所以对顶点数有估计：

    $$|V| \ge k+2-1>k,$$

    如果G有顶点割A使得$|A|<k$，则$G-A$有两个分支G_1和G_2，取$s \in V(G_1)$和$t \in V(G_2)$，则$st \notin E$，$|A| \le k-1$.

    根据Menger定理可知，$p(s,t)=c(s,t) \le |A| \le k-1$，$s$和$t$在$G$中至多有$k-1$条不相交的$s$-$t$路，矛盾.

- 【定理】G为k连通，当且仅当$|V(G)| \geq k+1$且对任何k个顶点的子集V'，以及$v \in V(G)-V'$，存在$v-V'$扇.

  【证明】

  - 对于充分性，如果G不是k连通的，则$\kappa(G) \leq k-1$，取$u, w \in V$，$V'' \subset V$，$|V''| \leq k-1$使得u, w在$V-V''$没有路连接，则不存在$u-(V'' \cup \{w\})$扇，矛盾.
  - 对于必要性，根据上一个定理得$|V(G)| \geq k+1$，加入一个新的顶点w与每个V'中的点相连（设新图为G'），则G'也是k-连通的（注意V'含有k个顶点，去掉V'中所有的顶点导致G'不连通，但是如果去掉少于k个顶点就可以使得G'不连通，则对于原来的G也可以做到去掉少于k个顶点变得不连通），所以对G'用上个定理可得v到w有k条不相交的路，所以存在G中的$v-V'$扇.