# 离散数学方法—匹配

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

【定义】图的匹配指的是无公共顶点的边的集合. 即给定图$G$，$M \subset E(G)$，且满足$\forall e, g \in M$，都有$e \cap g = \varnothing$.

对于顶点$v \in V(G)$，如果存在$e \in M$使得$v \in e$，则称顶点$v$是$M$-饱和的，否则称为$M$-非饱和的.

如果匹配$M$饱和了$V(G)$中的所有点，则称之为完美匹配（perfect matching）.

如果$G$中不存在另外的匹配$M'$使得$|M'| > |M|$，则称$M$为最大匹配（maximum matching），最大匹配$M$中边的个数称为匹配数，记为$\beta_1$，显然$\beta_1 \leq \frac{|V(G)|}{2}$，且只有当$M$是最大匹配时才能取得等号.

【定义】$M$-交错路

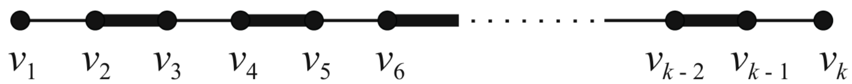
设$M$是图$G$的一个匹配，路$P$称为$G$中的$M$**-交错路**，如果其中的边是$M$-边和非$M$-边交替出现的.

$P$称为$G$中的$M$**-增广路**，如果它是$M$-交错路，而且其起点和终点都是$M$-非饱和的.（之后会解释为什么叫做$M$-增广路）

【定理】（Berge）$M$是$G$的匹配，则$M$是最大匹配当且仅当$G$没有$M$-增广路.

【证明】

- 设$M$是最大匹配，用反证法，假设$P = v_1 v_2 \cdots v_k$是一条$M$-增广路，因为$P$是交错路，而且$v_1 v_2$和$v_{k-1} v_k$都不是$M$中边，所以$k$一定是偶数而且$v_i v_{i+1}$是$M$中边当且仅当$i$是偶数.

  注意到$v_1$和$v_k$不是$M$-饱和的，所以如果定义$M' = M - \{v_2 v_3, v_4 v_5, \cdots, v_{k-2} v_{k-1}\} \cup \{v_1 v_2, v_3 v_4, \cdots, v_{k-1} v_k\}$，则$M'$仍然是$G$的一个匹配，而且里面的边数比$M$多$1$，这与$M$是最大匹配矛盾.

- 反过来，假设$G$没有$M$-增广路，$M$不是最大匹配，假设$M'$是比$M$边数更多的匹配，令$H = G[M \Delta M']$，因为$G$中的每个顶点的邻边中$M'$和$M$的边都至多只有一个，所以$H$的每个顶点在$H$中的度都是1或者2，这意味着$H$的连通分支要么是$M - M'$的交错路，要么是偶圈.

  如果有连通分支是偶圈，则其中$M$和$M'$的边数一样多. 因为$|M'| > |M|$，因此必然存在连通分支是路，而且其中$M'$的边比$M$中的多一条，这说明这是一条含有偶数个顶点的$M - M'$交错路，且起点和终点连接的是$M'$中的边. 由此可知起点和终点是$M$-非饱和的，因而是$M$-增广路，这与$G$没有$M$-增广路矛盾.

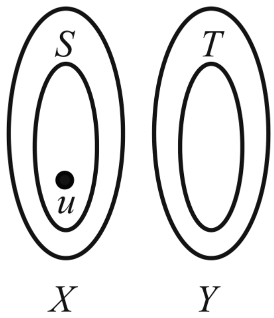
【定义】（关于二部图的匹配）设$G = G(X; Y)$是二部图.

设$M$为最大匹配，如果$|M| = \min\{|X|, |Y|\}$，则称此时$M$是$G$的一个**完全匹配**，或者称为**从$X$到$Y$的完全匹配**

【定理】（Hall，1935）$G$为二部图，$|X| \leq |Y|$，则$G$中存在从$X$到$Y$的完全匹配当且仅当对任何$S \subset X$，都有$|N(S)| \geq |S|$

【证明】

- 必要性：设$M$是从$X$到$Y$的完全匹配，所以$S$中每个顶点都是$M$饱和的，所以对于$S$的每个顶点，一定存在$N(S)$中某个点，这两个点在$M$中配对. 而且根据$M$是匹配可知与$S$中不同顶点配对的顶点是不同的，于是$|N(S)| \geq |S|$.
- 充分性：设$M^*$是最大匹配，用反证法，假设满足题给条件但是它不饱和$X$中的所有点. 设$u$是$X$中未被饱和的点，令$A$是那些可以用$M^*$交错路连接到$u$的点集合. 令$S = A \cap X$，$T = A \cap Y$，根据Berge定理可知$T$和$S - \{u\}$中的点必然是被$M^*$饱和的（否则$M^*$交错路终止在未被饱和的点，意味着存在$M^*$增广路，这与$M^*$是最大匹配矛盾）. 由此可知，$T$中的所有点都通过$M^*$的边与$S$中的某个点相连（取通往$T$中该点的交错路的最后一条边即可），而$S$中有且仅有$u$一个点不通过$M^*$中的边与$T$中的点相连，于是$|T| = |S| - 1$.




另一方面，对任何$s \in S$，如果存在$t$使得$st \in E(G)$，则$t \in Y$且$t \in A$（一条边不管是否是$M^*$中的边，都是$M^*$交错路），于是$t \in T$，所以$N(S) \subset T$. 因为$T$中所有顶点与$S$中某个点有边相连，所以$N(S) \supset T$，于是$N(S) = T$. 但是另一方面$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$，这与我们的假设$|N(S)| \geq |S|$矛盾，所以$X$的所有点一定被$M^*$饱和.

【推论】$G = (X; Y, E)$，如果对任何$x_i \in X$都有$d(x_i) \geq k$，任何$y_j \in Y$都有$d(y_j) \leq k$，则存在从$X$到$Y$的完全匹配.

【证明】对任何$S \subset X$，设与$S$关联的边数为$m$，$m \geq k|S|$. 而这$m$条边与$Y$中$|N(S)|$个顶点关联，而$N(S) \subset Y$，因此$m \leq k|N(S)|$，因此满足Hall条件.

【推论】任何$k$-正则的二部图一定有完美匹配

【证明】$k$-正则二部图一定满足$|X| = |Y|$，而且有完全匹配，所以有完美匹配.

【定理】任何非空二部图有最大匹配，且所有最大度的点都是$M$饱和点

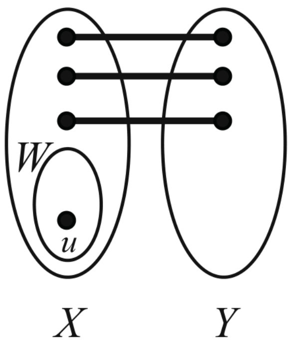
【证明】取$M^*$是包含尽可能多的最大度点的最大匹配，设$u$是最大度但不是$M^*$饱和点，令$A$是所有通过$M^*$交错路与$u$连接的顶点的集合，令$S = X \cap A$，$T = Y \cap A$. 同样可以推出$|T| = |S| - 1$.

令$m$是$S$关联的边数，如果$S \backslash \{u\}$中都是最大度点，则
$m = \Delta|S| = \Delta \cdot (|T| + 1) = \Delta|T| + 1 \geq m + \Delta$，矛盾，所以$S - \{u\}$存在非最大度点，将与$u$相连的$M^*$交错路颜色反转，则得到具有更多最大度点的最大匹配，与取法矛盾.

【定义】$V' \subset V(G)$，如果对$G$的任何边，其都有一个端点落在$V'$中，则称$V'$是$G$的一个覆盖. 点数最少的覆盖称为最小覆盖，点数称为覆盖数.

【定理】$G$是二部图，则最大匹配的匹配数等于最小覆盖的覆盖数

【证明】设$M$是最大匹配，设$W = \{x \in X : x\text{不是}M - \text{饱和的}\}$，则$|X| = |M| + |W|$.




设$A$是$G$中可以通过$M$-交错路连接到$W$中某个点的顶点集合，$S = X \cap A$，$T = Y \cap A$，则：

- $S - W$和$T$是配对的（$T$中每个点通过一条$M$-交错路连接，根据是最大匹配可知终点是$M$-饱和的，因此最后一步的边在$M$中，而最最后一步的边的前一个顶点显然也通过$M$-交错路与$W$中顶点相连，所以前一个顶点在$S - W$中；另一方面，$S - W$中每个顶点都是$M$-饱和的，所以它通过一个边和$T$中点相连）$\Rightarrow |W| = |S| - |T|$
- $N(S) = T$

令$C = (X - S) \cup T$，则$C$覆盖了$G$的边

（这是因为，如果是$S$关联的边，则根据$N(S) = T$可知被$T$覆盖了，如果是$S$未关联的边，则其一个顶点在$X - S$中，被$X - S$覆盖了）

所以：

$$|C| = |X| - |S| + |T| = |X| - |W| = |M|.$$

而另一方面，取任何一个其他的覆盖$C'$，因为$C'$的每个顶点至多覆盖$M$的一条边，所以$|C'| \geq |M|$，所以$C$是最小覆盖，因此最大匹配数等于最小覆盖数.

【命题】（关于完美匹配的一些简单性质）

- 如果$G$是$k$-正则二部图，则有完美匹配
- 如果$G$是$2n$阶图且$\delta(G) \geq n$，则有完美匹配

  【证明】因为是$2n$阶图且$\delta(G) \geq n$，所以$G$有Hamilton圈. 沿着Hamilton圈交替地取出边即可得到完美匹配.

【定理】（Tutte）

- 定义：$S \subset G$，定义$\omega_o(G - S)$为$G - S$中奇顶点连通分支的个数.
- （Tutte）$G$是$n \geq 2$的图，则$G$有完美匹配当且仅当$\forall S \subset V(G)$，$\omega_o(G - S) \leq 1$.

【证明】比较麻烦，此处略去.

【定理】（Peterson）无割边的3-正则图必然有完美匹配.

【证明】用反证法，假设没有完美匹配，则存在$S \subset G$，$G - S$的奇连通分支数大于$|S|$，记这些奇连通分支为$O_1, \cdots, O_k$.

- $O_i$至少有一个边连接到$S$中，如果不然，则$G$存在具有奇数个顶点且$3-$正则的子图，根据任何图必然有偶数个奇数度点可知不可能
- 因为$G$没有割边，所以至少有两个边从$O_i$连接到$S$，但是如果仅有2个，那么把这两条边去掉之后，$O_i$又会变成有奇数个奇数度顶点的图，不可能发生

综上所述，至少有3条边从每个$O_i$连接到$S$，因此至少有$3k$条边和$S$关联. 但是与$|S|$关联的边数最大只能为$3|S|$，与此同时$3|S| < 3k$，自相矛盾. 所以必然有完美匹配.

【例题】

证明：$2n$ 个结点的树中最多存在一个完美匹配.

证明. 反证法，假设有两个不同的完美匹配 $M_1$ 和 $M_2$，我们考虑 $M_1 \triangle M_2$. 考虑其边导出子图 $G^* = G[M_1 \triangle M_2]$，则对于任何 $v \in V(G^*)$，因为 $M_1$ 和 $M_2$ 是完美匹配，所以 $v$ 与 $M_1$ 中的某条边 $e_1$ 和 $M_2$ 中的某条边 $e_2$ 相邻. 如果 $e_1 = e_2$，则它不在 $E(G^*) = M_1 \triangle M_2$ 当中，所以此时 $v$ 作为 $G^*$ 的顶点的度为 0. 如果 $e_1 \neq e_2$，则两者都会出现在 $E(G^*)$ 中，且 $E(G^*)$ 中不会再有第三条边与 $v$ 相邻（否则会出现相交的边，与 $M_1, M_2$ 是匹配矛盾），所以 $d_{G^*}(v) = 2$. 综上所述，$G^*$ 的每个连通分支都是圈或者孤立点（根据度是 0 或 2），但是由于 $G$ 是树且 $G^*$ 是其子图，所以不可能有圈，所以 $G^*$ 的所有点都是孤立点，换句话说 $E(G^*) = \varnothing$，即 $M_1 \triangle M_2 = \varnothing$，所以 $M_1 = M_2$，即完美匹配若存在则是唯一的. $\square$