离散数学方法—平面图

参考:

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

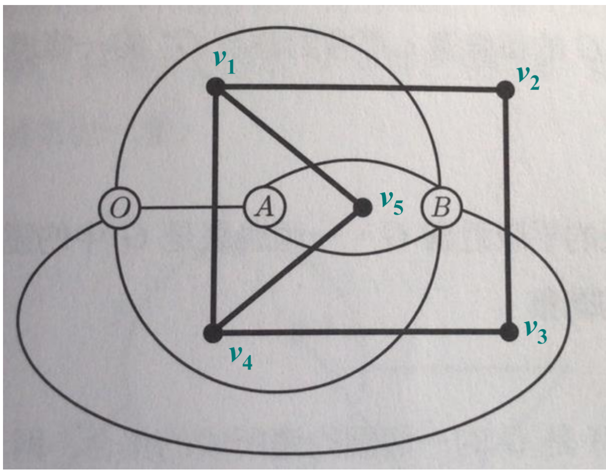
- 【定义】G无向图，如果可以把G的所有顶点和边都画在同一个平面上，而且使得任何两条边除了端点以外没有其他交点，则称G是**平面图**。如果一个图表面看上去不是平面图，但可以通过调整边的位置就变成平面图，则称是**可平面化的**
- 【定义】对偶图
  - G平面图，图中由边围成的区域（内部不含有顶点，也不含有边），称这样的区域为G的面（face）

    【注】每个平面图恰有一个无界的面，即外部分
  - 面的边界：围成一个面f的所有边组成的闭途，称为f的边界。这个闭途中边数称为f的度数，记为$d(f)$.

    【注】计算外部分的度时，割边要计算两次

    【记号】$F(G)$为G的面集，$r(G)=|F(G)|$为G的面数
  - $G=(V,E)$是平面图，定义$G^*=(V^*,E^*)$

    对G的每个面f，都有G^*的顶点f^*与之对应；对G的每个边e，都有G^*的顶点e^*与之对应；G^*中f^*和g^*有边相连当且仅当G中的面f和面g被e分隔，则称G^*是G的对偶图
- 【命题】
  - G^*必是平面图

  - G^*必然是连通图

    【证明】给定G^*的两个顶点，在平面内找一条恰好G的所有顶点的曲线，则曲线穿过的所有G的边和面序列对应的G^*的边和顶点的序列就是连接G^*中这两个顶点的一条路.
  - G^*是平面连通图$\Rightarrow G^{**}=G$.
  - $m(G^*)=m(G)$，$n(G^*)=r(G)$，$d(f^*)=d(f)$

    【证明】显然
  - 设C是平面图G的一个圈，S^*是C中各边e_i对应的G^*中边的集合，则S^*是G^*的一个割集.

【证明】C是圈⇒是一个Jordan曲线，设f是其内部一个面，g使其外部一个面，根据Jordan曲线定理可知，连接f^*和g^*的边对应的f和g的公共边必然在C上，因此去掉S^*之后f^*和g^*不再有边相连.

- 【定理】对偶版本的握手定理

  G平面图，则$\sum_{f\in F(G)} d(f) = 2m$

  【证明】取G^*，用握手定理

  $$\sum_{f^*\in V(G^*)} d(f^*) = 2e(G^*) = 2e(G) = 2m.$$

- 【命题】G简单平面图，有Hamilton圈C，$f_{i,1}$和$f_{i,2}$分别表示C内部的和外部的度为i的面数，则：

  $$\sum_{i=3}^{n}(i-2)f_{i,1} = \sum_{i=3}^{n}(i-2)f_{i,2}.$$

  【证明】G的边被分成三类，在C上、在C内部（内弦）、在C外部（外弦）

  则：

  $$\sum_{i=3}^{n} f_{i,1} = m_{\text{inner}} + 1,$$

  另一方面，每个内弦是两个内部面的边界，每个C上的边是一个内部面的边界，对面的度数和计数：

  $$\sum_{i=3}^{n} i f_{i,1} = 2m_{\text{inner}} + n = 2\left(\sum_{i=3}^{n} f_{i,1} - 1\right) + n \Rightarrow \sum_{i=3}^{n}(i-2)f_{i,1} = n-2.$$

  类似：

  $$\sum_{i=3}^{n} f_{i,2} = m_{\text{outer}} + 1, \quad \sum_{i=3}^{n} i f_{i,2} = 2m_{\text{outer}} + n.$$

  由此可知：

  $$\sum_{i=3}^{n}(i-2)f_{i,2} = n-2.$$

  两个式子比较即可得证.

- 【定理】平面Euler公式：G是连通平面图（不必是简单图），m, n, r分别是边数，顶点数，和面数，则$n-m+r=2$.

  【证明】对r归纳，$r=1$时G的每条边都是割边，又因为G是连通的，所以G是树（回忆树的等价定义：连通且每条边都是割边），所以$m=n-1$，进而有$n-m+r=1+1=2$.

  下面假设当G有$r \le k-1$个面时结论都是成立的，现在设G有$r=k$个面且是连通的，当$k \ge 2$时，至少有一个圈，去掉此圈中的一条边得到G'，G'有$k-1$个面，根据归纳假设可知

  $$n-(m-1)+(k-1)=2 \Rightarrow n-m+k=2$$

  由此可得证

  【推论】如果对任意平面图G，有$n-m+r \ge 2$.

- 【定理】设G是**简单**平面图（$n \ge 3$），则$m \le 3n-6$.

  【remark】这是一个非常好用的结论

【证明】只需要对连通图证明，如果不是连通图对每个连通分支证明即可.

因为G是连通图且是平面图，所以每个面的度数至少为3，根据握手定理以及Euler公式可得：

$$2m = \sum_{f\in F(G)} d(f) \geq 3r(G) = 3\cdot(2+m-n)$$

所以$m \leq 3n-6$.

【remark】根据证明过程可知，等号成立当且仅当G是一个三角形的三角剖分

【推论】设G简单图，且每个面的边界数至少是t，则有：

$$m \leq \frac{t(n-2)}{t-2}.$$

【推论】K_5，$K_{3,3}$和Peterson图都是非平面的.

（对于K_5，其边数为$\binom{5}{2}=10$，但是$3\times 5-6=9$；对于$K_{3,3}$，假设它是平面图，由于其中圈长度至少为4，其面的边界数至少为4，于是$m\leq 2n-4$，但是$n=6$，$m=9$，$2\times 6-4=8$
）

- 【命题】若G是简单连通平面图，则$\delta \leq 5$.

  【证明】

  $$\delta n \leq \sum_{v\in V} d(v) = 2m \leq 6n-12 \Rightarrow \delta \leq 5.$$

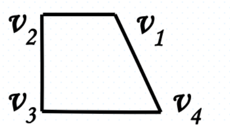
- 【命题】正多面体只有五种

  【证明】正多面体可以看成嵌入球面的图，因此可以看成平面图，根据平面Euler公式可得$(k-2)(l-2)<4$，其满足$k,l\geq 3$的整数解只有五种可能。

- 【定义】极大平面图：简单平面图在任何不相邻顶点加边都导致变为非平面的，则称该平面图是极大的.

- 【命题】任何n阶（$n\geq 3$）极大平面图的每个面度数都是3

  【证明】取反例图G'，则其至少有一个面的度数不是3，设该面为$v_1v_2\cdots v_3v_1$，不妨$s=4$：

  如果v_1和v_3、v_2和v_4中有一对没有边相连，因为这是个内部面，所以连结它们并不破坏平面性，矛盾于极大性；

  如果v_1和v_3、v_2和v_4都有边相连，由于这是内部面，所以$\{v_1,v_3\}$和$\{v_2,v_4\}$都在外部，根据Jordan曲线定理可知它们一定相交，这与G'是平面图矛盾.

  【remark】极大平面图一定为三角剖分，符合直观

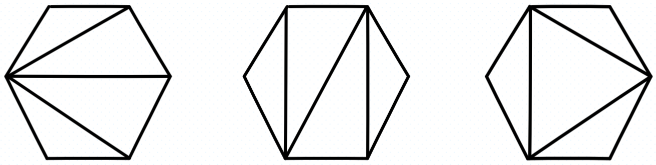
- 【命题】G为n（$n\geq 4$）阶极大平面图，则$\delta(G)\geq 3$.

  【证明】设$v\in V(G)$，$G-v$是平面图，v在$G-v$的一个面内，$G-v$中至少有3个顶点在这个面的边界上，根据极大平面图的定义可知G中v必须和这些点都是邻接的. 所以对任何$v\in V(G)$，$d(v)\geq 3$，所以$\delta(G)\geq 3$.

  【remark】极大平面图的性质：连通，不存在割边（都是显然的），都是三角面，$m=3n-6$，代入Euler公式可得$n-3n+6+r=2\Rightarrow r=2n-4$，比较可知$3r=2m$

- 【定义】外可平面图：若一个简单平面图G画成平图后，它的所有顶点在同一个面上，则称G为外可平面图

- 【定义】一个外可平面图是极大外可平面图， 若不能再加边而不失去外可平面性



- 【定理】设G是极大外可平面图，$n(\geq 3)$个点均在外部面上, 则G有$n-2$个内部面

  【证明】用归纳法，$n=3$显然成立，假设对n个顶点成立，令G有$n+1$个顶点和k个内部面

  断言：G有一个度为2的顶点v在外部面上. 事实上，取其对偶图，并考虑内部区域对应的那些顶点的导出子图，断言这个导出子图是树. 因为它连通，所以只需要说明它没有圈. 如果有圈，则G有一个内部顶点，这与外平面性矛盾. 考虑树中度是1的顶点，根据极大性，所有内部面都是三角面，特别地这个顶点对应的面也是三角面，由此可知这个三角面有两个边都只和外部面共用，不和内部面共用，考虑这两个边的共用顶点，它不和第三个顶点相连，因此度数为2

  考虑$G-v$，则$G-v$的内部面为$k-1$个，顶点为n个，根据归纳假设，$k-1=n-2$，所以$k=n-1$，有归纳法证明完成.

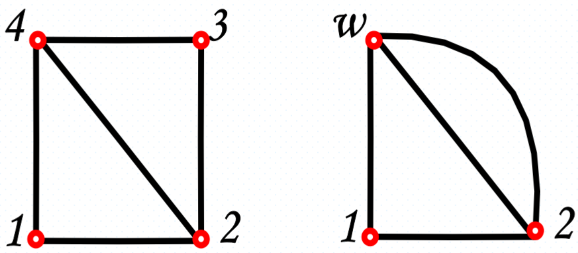
- 【命题】
  - $2-$连通的外平面图是Hamilton图

    【证明】显然
  - $2-$连通的外平面图满足$m\leq 2n-3$

    【证明】外部面度$=n$，根据$2-$连通可知面的度至少为3（如果有度为2的面，去掉这两条边后两个顶点不再有路相连），因此：

    $$3(r-1)+n\leq 2m\Rightarrow m\leq 2n-3.$$
  - 【推论】K_4和$K_{2,3}$虽然是平面图，但不是外平面图
- 【定义】G_1和G_2在允许插入和消去二度顶点的意义下同构，则称其同胚

- 【定义】如果图G'可以由G插入二度顶点得到，则称G'为G的细分图（subdivision of G）
- 【命题】图G是平面的，当且仅当其所有细分都是平面的.
- 【定义】如果图G'可以由G消去二度顶点得到，则称G'为G的初等收缩



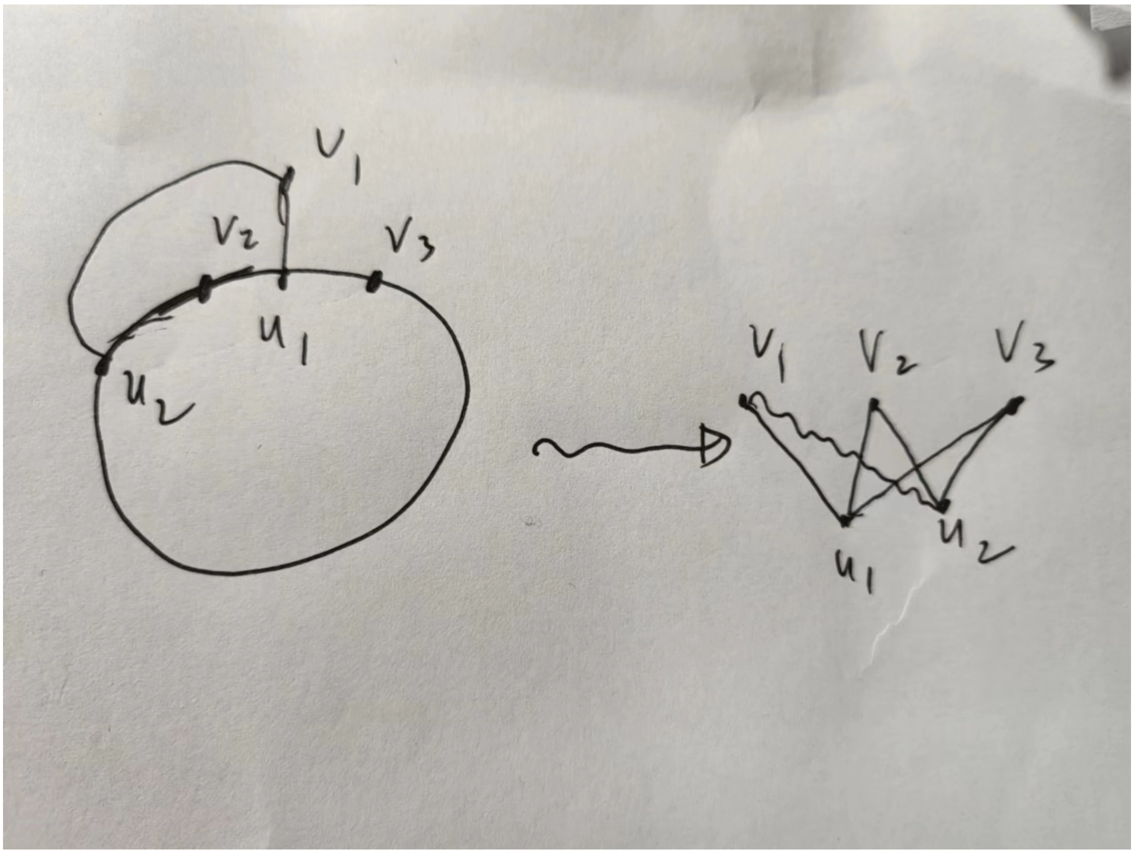
- 【定理】（Kuratowski's Theorem）一个图是平面图，当且仅当它不包含同胚于$K_{3,3}$或K_5的子图
- 【加强】一个图是平面图，当且仅当它不包含可以初等收缩为$K_{3,3}$或K_5的子图

- 【定理】G是外可平面的当且仅当不含有K_4或$K_{2,3}$细分图

  【证明】只需要证明充分性. 取反例图G，不妨设G是$2-$连通的，令C是G的最长圈，则C的长度至少为4

  如果C不是哈密顿圈，取$v_1 \notin V(C)$，$\{v_1, u_1\} \in E(C)$，根据$2-$连通可知存在$v_1 - u_2$路P使得$u_2 \in V(C)$且$V(C) \cap V(P) = \{u_2\}$

  根据C的最长性，如果v_2, v_3是C上与u相邻的两个点，则v_2和v_3都不是u_2，由此找到了$K_{2,3}$的细分图

  所以，C是哈密顿圈，因为G不是外可平面，所以如果把G的所有其他边都画在C的内部，一定会出现两条弦$\{u, v\}$和$\{x, y\}$使得四者在C上出现的次序为u, x, v, y，这样得到K_4的细分图.

- 【例题1】

  1. 设简单平面图的面的数目 $f < 12$，每个点的度 $d(v_i) \geq 3$，证明至少有一个面的度小于 5.

     证明. 根据握手定理

     $$2m \geq 2 \cdot 3n = 6n = \sum_{f \in F(G)} d(f) > 12d(f).$$

     用反证法，如果不存在度小于 5 的面，则 $12d(f) \geq 60$，于是：

     $$6n \geq 60 \Rightarrow n \geq 10,$$

     所以

     $$3n - 6 = 3 \times 10 - 6 = 24 \geq m \Rightarrow 6n \leq 2m \leq 48 \Rightarrow n \leq 8,$$

     这与 $n \geq 10$ 矛盾，因此至少存在一个面的度小于 5. □

- 【例题2】

2. 设 G 是顶点数大于 10 的简单图，证明 G 和 G 的补图 $\overline{G}$ 至少有一个是非平面的.

证明. 用反证法,假设两者都是平面图,并假设 G 和 $\overline{G}$ 的边数分别是 m 和 m^*,则 $m+m^*=|K_n|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ 根据简单非平面图的点边关系可知：

$$m_1 \leq 3n-6, \quad m_2 \leq 3n-6,$$

所以

$$6n-12 \geq \frac{n(n-1)}{2},$$

整理可得

$$n^2-13n+24 \leq 0$$

因为 $n \geq 0$，所以函数 $f(n)=n^2-13n+24$ 是递增函数，因为 $n \geq 11$，所以：

$$0 \geq n^2-13n+24 \geq 121+24-143=2,$$

矛盾！所以 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是非平面的. □

- 【例题3】

3. 设 G 是无割边的平面图，且每两个面之间最多有一条公共边，证明：

(1) G 中至少有两个面有相同的边界数;

(2) 若各面最小的边界数是 5，则 G 中至少有 12 个这样的面.

证明. (1) 因为 G 没有割边，所以不存在 G 中的边，使得其两侧为同一个面，于是 G 的对偶图 G^* 没有环.

因为 G 的每两个面之间最多只有一条公共边，所以 G^* 中每两个顶点之间至多有一条边相连，于是 G^* 没有重边. 所以，G^* 是简单图.

对于简单图 G^*，其最大度 $\Delta(G^*)$ 有一个上界 $n-1$，如果 G^* 所有顶点的度都不相同，那么其顶点度序列恰好就是 $(0,1,\cdots,n-1)$. 这意味着 G^* 有一个顶点是孤立点，G^* 非连通. 但是根据平面图的对偶图一定是连通的可得矛盾.

所以，G^* 至少存在两个顶点度相同，相应地 G 至少存在两个面度相同.

(2) 注意平面图的对偶图 G^* 仍然是平面图. 对 G^*，根据平面图的点边关系可知

$$m(G^*) \leq 3n(G^*)-6,$$

注意 $m(G^*) \geq n(G^*)\delta(G^*)$，而 G 中各面边界数最小为 $5 \Rightarrow \delta(G^*)=5$. 设 G^* 中具有度为 5 的顶点数为 x，则

$$5x+6(n(G^*)-x) \leq 3n(G^*)-6,$$

整理可得

$$x \geq 3n(G^*)+6 \geq 3\cdot 2+6=12,$$

这用到非空平面图至少有两个面，即 G^* 至少有 12 个度数为 5 的顶点，也就是 G 至少有 12 个度数为 5 的面. □

- 【例题4】

4. 试证：不存在这样的平面图，它有 5 个面，且任意两个面之间至少有一个公共的边界.

证明. 考虑其对偶图 G^*，则 $n(G^*)=5$，而且任意两个顶点之间至少有一条边相连，所以 K_5 是其子图. 而 K_5 是非平面的，因此再向其中加入其他重边一定也是非平面的，这与平面图的对偶图一定是平面图矛盾. □

- 【例题5】

5. 设简单平面图的顶点数 $n \geq 4$，证明 G 中至少有 4 个顶点的度不大于 5.

证明. 设 G 中只有 s（$s \leq 3$）个顶点的度不大于 5，设这 s 个顶点组成的集合是 $S \subset V(G)$，则 $V(G)-S$ 中所有顶点度大于 5，也就是 ≥ 6，所以有：

$$m(G) \geq \sum_{v \in V(G)-S} d_G(v) \geq (|V(G)|-|S|)6 = 6n(G)-6s,$$

另一方面根据 G 是简单平面图可知

$$m(G) \leq 3n(G)-6,$$

所以

$$3n(G)-6 \geq 6n(G)-6s \Rightarrow 2s \geq n(G)+3 \geq 4+3=7,$$

所以

$$s \geq 7/2 \Rightarrow s \geq 4,$$

这与 $s \leq 3$ 是矛盾的，由此可知 G 中至少有 4 个顶点的度不大于 5. □