离散数学方法—染色

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

J M Harris, J L Hirst and M J Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed.

染色分为三个课题：边染色、点染色以及平面图的面染色，我们介绍这些课题的一些基本方法与重要结果。

【定义】边染色. 边染色是一个映射$c: E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$，其中$1, 2, \cdots, k$表示$k$种不同的颜色. 这称为$G$的一个边染色. 如果$c$满足对任何$e_1, e_2 \in E(G)$满足$e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$，都有$c(e_1) = c(e_2)$，则称该染色是一个**正常染色**，之后如果没有特别强调，染色就是指的正常染色.

称对图G进行正常边染色所需要的最少颜色数为G的**边染色数**，记为$\chi'(G)$.

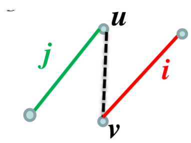
【命题】一个平凡的下界：$\chi'(G) \geq \Delta$.（所用的颜色不可能小于最大度数）

【定理】设G是二分的，则$\chi'(G) = \Delta$

【证明】对边数m归纳. 设G的一条边是$e = \{u, v\}$，根据归纳假设，$H = G - e$有一个$\Delta-$边染色，记为$\{M_1, \cdots, M_\Delta\}$

则，不妨设，每个颜色要么被u点的某个邻边使用，要么被v点的某个邻边使用（如果两者都不成立，则这个颜色可以被分配到e，从而得到G的一个正常边染色，这样就已经完成证明了）

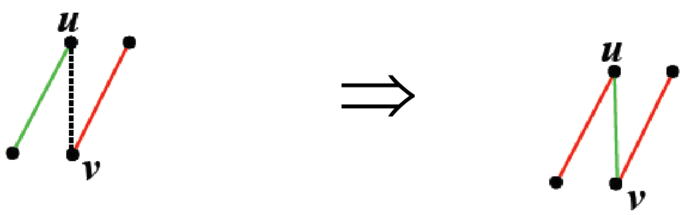
注意到$d_H(u) \leq \Delta - 1$，所以至少有一个颜色没有被u的任何邻边使用，我们记该颜色是i，从而根据我们前面的"不妨设"，i被v的某个邻边使用了. 同样地，存在一个颜色j（$j \neq i$），没有被v的任何邻边使用，但是被v的某个邻边使用了.



考虑子图$H_{ij} = H[M_i \cup M_j]$，则M_i和M_j都是H_{ij}的完美匹配，其中每个点的度都为1或者2，由此可知H_{ij}的每个连通分支要么是偶圈，要么是在M_i和M_j中交错的路.

注意到u和v都之和i和j中的一个颜色的边相连，所以它们在H_{ij}中的度数是1. 因此u所在的连通分支是一条M_i-M_j交错路P，断言P的终点不是v，否则，由于v相连的边是i色，u相连的边是j色，两种颜色又是在P上交替出现，所以P是偶数长度的路，所以$P + e$是G中奇数长度的圈，这和G是二部图矛盾.

我们现在把P中的颜色互换，这样就得到了一个新的H的Δ-边染色（P单独是H_{ij}中的一个连通分支，互换P的颜色之后这仍然是H的正常Δ-边染色），则这时候j没有被u的任何邻边使用，也没有被i的任何邻边使用，所以可以把j色分配给e得到G的一个正常Δ-边染色. 结合$\chi'(G) \geq \Delta$这个平凡的下界可知$\chi'(G) = \Delta$.



【定理】（Vizing定理）对任何简单图G，都有

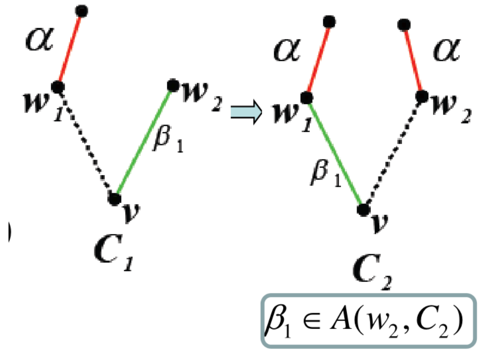
$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1.$$

【证明】只需要证$\chi'(G) \le \Delta + 1$即可. 对边数归纳. 设e_1是一条边，不妨设$\Delta(G - e_1) = \Delta(G) = \Delta$.（如果$\Delta(G - e_1) = \Delta(G) - 1$，则根据归纳假设可以得到$\chi'(G - e_1) \le \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$，于是根据$\chi'(G) \le \chi'(G - e_1) + 1$可得$\chi'(G) \le \Delta + 1$）

下面证明如果$G - e_1$是$\Delta + 1$边可染色的，那么G也是，从而由归纳法完成证明.

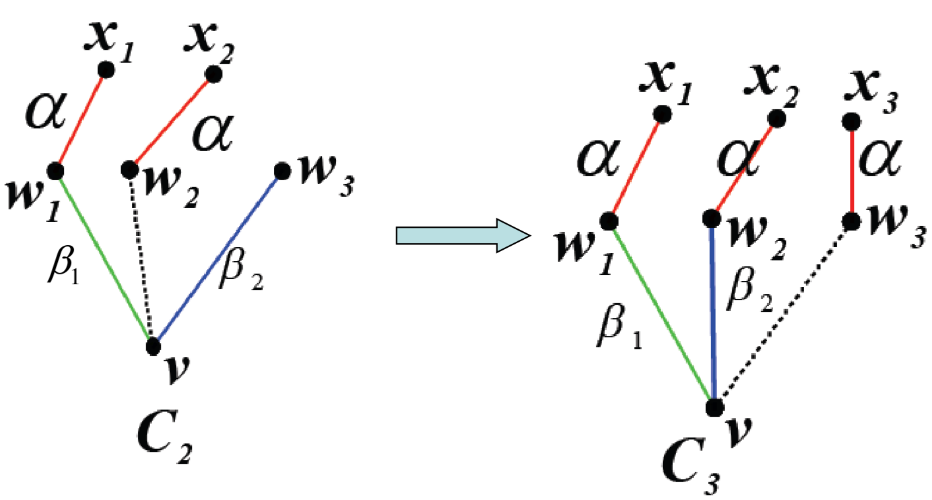
令$e_1 = \{v, w_1\}$，以及c_1是$G - e_1$的一个正常$\Delta + 1$-边染色. 设$A(v, c_1)$是v的邻边中没有被使用过的颜色集合，则由于$d_{G-e_1}(v) \le \Delta - 1$，$A(v, c_1) \ne \varnothing$，同理$A(w, c_1) \ne \varnothing$，不妨设$A(v, c_1) \cap A(w, c_1) = \varnothing$（否则如果不是空集，将该颜色分配给$e_1$就得到$G$的一个$\Delta + 1$-正常边染色）

令$\alpha \in A(v, c_1)$，$\beta_1 \in A(w_1, c_1)$，则根据我们的“不妨设”可知β_1被v的邻边使用了，设$e_2 = \{v, w_2\}$是β_1色的边，则去掉e_2的染色，把e_1染成β_1色，可以得到$G - e_2$的一个正常$\Delta + 1$-边染色，记为c_2



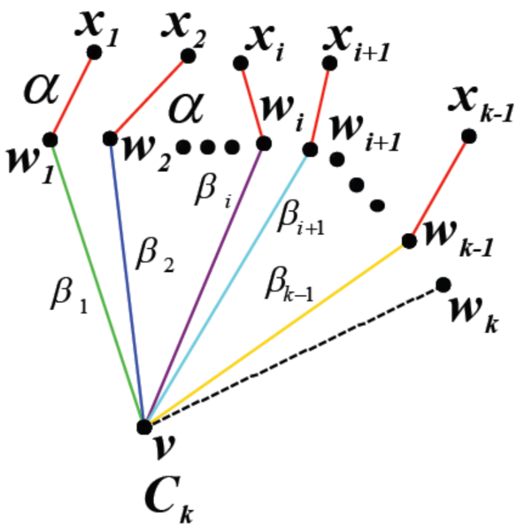
（我们不妨假设v, w_1, w_2属于$G[M_\alpha \cup M_{\beta_1}]$中的同一个连通分支，也就是存在一条$w_1$连接到$w_2$的$\alpha$-$\beta_1$交错路. 如果不然，则互换$w_1$所在连通分支中的颜色（这个操作不会影响正常染色，也不会影响w_2所在连通分支原本的着色），这个时候把$\{v, w_2\}$染成β_1色，就得到了G的一个$\Delta + 1$正常边染色. 在下面的证明中，我们也默认进行这样的假设）

在$G - e_2$中，$\beta_1 \in A(w_2, c_2)$，由于w_2处至多出现$\Delta - 1$种颜色，因此还存在$\beta_2 \ne \beta_1$使得$\beta_2 \in A(w_2, c_2)$. 我们不妨设β_2在v处出现（如果不出现，对$\{v, w_2\}$着β_2色就得到G的一个正常$\Delta + 1$边染色），也就是存在$\{v, w_3\}$是β_2色边，我们去除$\{v, w_3\}$并把$\{v, w_2\}$染成β_3色，得到$G - e_3$的一个正常$\Delta + 1$边染色c_3，且$\beta_2 \in A(w_3, c_3)$



如此这样重复下去，最终必然在某一步得到$G - e_k$的一个正常$\Delta + 1$边染色c_k，而且存在一个$i < k - 1$使得$\beta_i \in A(w_k, c_k)$，也就是$\beta_k = \beta_i$. 根据前面的已知条件可得，对每个β_i，都有$\beta_i \in A(w_{i+1}, c_k)$（$i = 1, \cdots, k - 1$）.

不妨假设：v, w_i, w_{i+1}属于$G[M_\alpha \cup M_{\beta_i}]$的同一个连通分支（**记该连通分支为$H$**），否则将$w_{i+1}$所在的那个连通分支的颜色互换（这个操作不会影响正常染色），然后把$\{v, w_{i+1}\}$染成α色，此时因为$\beta_{i+1} \in A(w_{i+2}, c_k)$，将$\{v, w_{i+2}\}$染成$\beta_1$色，以此类推下去，$\{v, w_{i+3}\}$染成$\beta_2$色，$\cdots$，$\{v, w_k\}$染成$\beta_{k-1}$色，这样就得到了$G$的一个$\Delta+1$-正常染色.



因为$\alpha \in A(v, c_k)$，$\beta_i \in A(w_{i+1}, c_k)$，所以$H$就是一条走过$w_i$的$v - w_{i+1}$的两种颜色的交错路. 因为$\beta_i \in A(w_k, c_k)$，所以$w_k \notin V(H)$，所以$w_k$所在$G[M_\alpha \cup M_{\beta_i}]$的连通分支不是$H$. 将$w_k$所在连通分支的两种颜色互换，得到$G - e_k$的新的$\Delta+1$边染色，记为$c'_k$，这时候可以对$\{v, w_k\}$着色$\alpha$，得到$G$的一个正常$\Delta+1$边染色.$\square$

【例题】

Show that

$$\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2),$$

(The Cartesian product of simple graphs G and H is the graph $G \times H$ whose vertex set is $V(G) \times V(H)$ and whose edge set is the set of all pairs (u_1, v_1) and (u_2, v_2) such that either $\{u_1, u_2\} \in E(G)$ and $v_1 = v_2$, **or** $\{v_1, v_2\} \in E(H)$ and $u_1 = u_2$.)

证明. Recalling Vizing's theorem, our task reduces to demonstrating that $\chi'(G \times K_2) \neq \Delta(G \times K_2) + 1$.

Let's denote $V(K_2) = \{a_0, a_1\}$. For any vertex $(v, a_i) \in G \times K_2$, the set of all vertices adjacent to (v, a_i) is given by:

$$\{(u, a_i) : u \in N_G(v)\} \cup \{(v, a_{i\oplus 1})\}.$$

Here, $N_G(v) = \{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$ and $\oplus$ represents addition modulo 2. Thus, $\Delta(G \times K_2)$ equals $\Delta(G) + 1$.

Regarding $\chi'(G \times K_2)$, if $\chi'(G) = \Delta(G)$, then at least one vertex $v \in V(G)$ exists such that all colors in $c(G)$ (an edge-coloring of G with $|c(G)| = \chi'(G) = \Delta(G)$) are already used on edges adjacent to v. Notably, the edge set of $G \times K_2$ can be partitioned into:

$$E(G)' \sqcup E(G)'' \sqcup J,$$

where

$$E(G)' = \{\{(v, a_0), (u, a_0)\} : \{u, v\} \in E(G)\}, \quad E(G)'' = \{\{(v, a_1), (u, a_1)\} : \{u, v\} \in E(G)\},$$

and

$$J = \{\{(v, a_0), (v, a_1)\} : v \in V(G)\}.$$

Now, we can color $E(G)'$ and $E(G)''$ following the pattern of $c(G)$. As for edges in J, since for v with $d_G(v) = \Delta(G)$, all colors in $c(G)$ are already utilized, we introduce an additional color to $c(G)$ and use it to color such edges in J. This ensures that the edges of $G \times K_2$ can be colored with at most $\chi'(G) + 1$ different colors. Clearly, this also holds true when $\chi'(G) > \Delta(G)$, where introducing an additional color is unnecessary.

Thus, $\chi'(G \times K_2) \geq \chi'(G) + 1 \geq \Delta(G) + 1 = \Delta(G \times K_2)$, indicating $\chi'(G \times K_2) \neq \Delta(G \times K_2) + 1$, thereby concluding the proof.

□

【例题】

Show that every Hamiltonian cubic graph is 3-edge-colorable.

证明. In fact, we can explicitly find a proper 3-edge coloring. First, we alternate colors along the Hamiltonian cycle using two colors. Then, for any $v \in G$, two of its neighboring edges are already colored. Clearly, we can introduce another color for the remaining edge. After that, we obtain a proper 3-edge coloring of G.

Figure 1 shows a proper 3-edge coloring of Q_3.

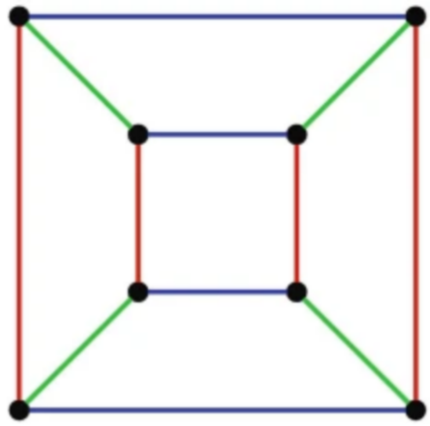


图 1: 3-edge-coloring Q_3

【remark】根据Vising定理可以看出，**简单图**边染色数情况只有两种：$\chi' = \Delta$和$\chi' = \Delta + 1$，前者称为第一类的，后者称为第二类的. 我们已经看到二部图都是第一类的. 但是，如果不限定图类，一般而言确定一个图的边染色是第一类还是第二类是一个NP-hard问题，没有好的算法.

【命题】若$m > \Delta[n/2]$，则G一定属于第二类的.

【命题】$\chi'(K_n) = n$（n为奇数），$\chi'(K_n) = n + 1$（n为偶数）

【定义】顶点染色、正常顶点染色（指的是有边相邻的顶点颜色相同）

【命题】顶点染色给出顶点集的分划$V = \bigsqcup_{i=1}^{k} V_i$，则每个$V_i$点导出子图为空图

【证明】显然

【例】K_n点色数为n，n个点的树T_n的点色数为2（树是二部图）

C_{2n}点色数为2，C_{2n+1}点色数为3

$K_{m,n}$点色数2（同一部用同一种颜色）

【命题】简单图的$\chi(G) = 2$，当且仅当其为二部图.

【证明】显然

【定理】G是任意图，我们有$\chi(G) \le \Delta + 1$

【证明】用数学归纳法. 设$|V(G)| = n$，当然当$n = 1$时$\Delta = 0$，定理成立. 假设定理对顶点个数$\le n - 1$时成立，设v是任何一个顶点，则根据归纳假设可知$\chi(G - v) \le \Delta(G - v) + 1 \le \Delta(G) + 1$. 设$G - v$有一个$\Delta + 1$-正常的点染色$c$，因为与$v$邻接的顶点至多有$\Delta$个，所以一定存在一种颜色没有被使用，对$v$染这个颜色，就得到$G$的一个正常$\Delta + 1$-点染色，根据归纳法可知成立.

【推论】如果G不是$\Delta(G)$正则的，则$\chi(G) \leq \Delta$

【证明】同上述证明过程，只不过选取一个度数不等于Δ的点去掉，然后把归纳假设中的$\Delta+1$改成Δ. 这样一来，在$G-v$中取一个Δ点染色，因为与v邻接的点至多有$\Delta-1$个，从而一定有一种颜色没有被使用，对v着该色再用数学归纳法即可.

【定理(Brooks)】设连通图G不是完全图或奇圈，则$\chi(G) \leq \Delta(G)$

【证明】只需要对k-正则图($3 \leq k \leq n-2$)说明$\chi(G) \leq \Delta(G)$即可. 不妨设G是$2-$连通图.

①如果G有顶点割$\{v_1, v_2\}$，G_1是$G-\{v_1,v_2\}$的一个分支，则令$H_1 = G[V(G_1) \cup \{v_1, v_2\}]$，$H_2 = G - V(G_1)$

如果边$v_1v_2 \notin E(G)$，可以设$d_{H_1}(v_1) > 1$（否则用$N_{H_1}(v_1)$中一个点代替即可），类似地，设$d_{H_2}(v) > 1$.

令$H_i' = \begin{cases} H_i + \{v_1, v_2\}, & v_1v_2 \notin E(G) \\ H_i, & v_1v_2 \in E(G) \end{cases}$

则每个H_i'都非正则图，所以$\chi(H_i) \leq k$. 所以H_i有k-正常染色，是的v_1, v_2染色不同，设v_i是i色点$(i=1,2)$，则由H_i的正常k-点染色可以得到G的正常k-点染色.

②如果G没有2-顶点割，换句话说，是3-连通的，因为G不是完全图，所以存在点v_1, v_{n-1}, v_n，使得$v_1v_{n-1} \in E(G)$，$v_1v_n \in E(G)$，但是$v_{n-1}v_n \notin E(G)$.

因$G-\{v_{n-1}, v_n\}$连通，可把G中点排列成$v_1, \cdots, v_n$，使得对任何$j \geq 2$，v_j都和前面的$\{v_1, \cdots, v_{j-1}\}$中至少一个点相连.

用k种颜色给G中的点染色. 首先用某种颜色染v_{n-1}和v_n，令$G_{n-1} = G[\{v_{n-1}, v_n\}]$，则$G_{n-1}$不是正则图，有正常$k$染色，一般地，对$G_j = G[\{v_n, \cdots, v_j\}]$有正常$k$染色，而且对$j \geq 2$，$A(v_{j-1}, G_j) \neq \varnothing$，所以可以得到$G_1 = G$的正常$k$染色.

【定理 (Mycielski)】对任何$k>0$的整数，存在不包含三角形的k-(vertex)chromatic图

【定理 (Dirac)】任何满足$\chi \geq 4$的图都包含K_4的细分图.

【证明】设G是反例图中点最少的，则$G \neq K_n$（否则$n \geq 4$，则包含了K_4作为子图）

设S为G的最小点割集，且$G-S$的分支为$H_1, \cdots, H_r$. 记$G_i = [V(H_i) \cup S]$，则G_i不包含K_4的细分图，根据G点最少的取法，每个G_i必是3-可着色的，取3-着色f_i.

如果$G[S]$是完全图，则调换颜色使得S中点在每个f_i中染色相同，拼起来就得到G的3-正常着色，矛盾

如果$|S|=2$，则设存在一个G_i使得其任何一个3-着色都有$f_i(x) = f_i(y)$（其中$S=\{x,y\}$）（否则在S中加入边xy就回到$G[S]$是完全图的情形），所以$G_i + xy$的色数至少是4，根据最小性可知$G_i + xy$包含一个K_4的细分图H. 如果H没有用到xy，则H也是G中的K_4细分图，矛盾. 如果H用到xy了，则另取一个G_j，根据连通性可知存在一个xy路，用xy路替换掉xy就又得到G中的K_4细分图，矛盾.

由此可知$|S| \geq 3$，于是G是3-连通图，任取$x \in V(G)$，则$G-x$是2-连通的，因此可以任取一个圈C，根据Menger定理可知G中存在$x-V(C)$扇，于是得到K_4一个细分图，矛盾.

【定义】平面图的平面染色.

【定理 (Tait)】3-连通的立方图是4-面可染的当且仅当是3-边可染的.

【证明】

- 假设G有正常4-面染色

  定义$\alpha_0 = (0,0)$，$\alpha_1 = (1,0)$，$\alpha_2 = (0,1)$，$\alpha_3 = (1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$是四种颜色.

按照这样的方式分配边的染色：将一条边分隔的两个面的颜色向量相加，分配给这个边（由于没有割边，所以α_0没有被用到），可以验证这是一个正常3-边染色.

- 另一方面，令$E_i = \{e \in E(G) : c(e) = i\}$，$G_{ij} = G[E_i \cup E_j]$，则$G_{ij}$是$2-$正则子图（圈），所以是2-面可染的
- 考虑G_{12}，G_{23}的2-面染色，用0，1两种颜色，则可以得到G的一个4-面染色（用以上$\alpha_0, \cdots, \alpha_3$），方式如下：

  给每个面$f = G_{12} \cap G_{23}$的颜色是G_{12}和G_{23}中对应颜色组成的二元组，可以验证这是一个正常4-面染色.

【推论】3-连通三角剖分图（极大平面图）是4-可染的.

【定理】任何平面图都是5-点可着色的（从而任何平面图都是5-面可着色的）

【证明】设$G = (V, E)$是平面图，对$|V| = n$归纳. $n = 1, 2, 3, 4, 5$不用证明.

假设$n = k$成立. 当$n = k + 1$的，因为G是平面图，$\delta \leq 5$，存在u，使得$d(u) \leq 5$. 由归纳假设$G - u$是5-顶点可着色，取其一个着色c，如果$d(u) < 5$，则可以对u用已有的这些颜色着色，就得到G的一个正常5-点染色.

如果$d(u) = 5$，设与u邻接的点是$v_1, \cdots, v_5$，不妨设$c(v_i) = i$，其中i表示颜色，用G_{ij}表示导出子图$G[c^{-1}(V_i) \cup c^{-1}(V_j)]$.

①如果存在v_i，v_j，使v_i与v_j属于G_{ij}的两个不同连通分支，则在v_i所在分支中交换颜色i和j，得到一个新的5着色，这时候空出一个新的颜色分配给u，得到G的一个正常5-点染色；

②如果不存在，则任何v_i和v_j都属于G_{ij}的同一个连通分支，记P_{ij}是G_{ij}中v_i到v_j的i, j交错路，不妨设v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在平面上按照逆时针排列， 考虑P_{13}和P_{24}，将$uv_1P_{13}v_3u$记为C，则C分隔了v_2和v_4，也就是$v_2 \in \mathrm{int}C$，$v_4 \in \mathrm{ext}(C)$，根据Jordan曲线定理可知P_{24}和C相交，因为是平面图，所以交点为顶点，而C和P_{24}的颜色都不相同，矛盾.

【猜想】任何平面图都是4-点可着色的（从而任何平面图都是4-面可着色的）

【定理】任何平面图都是4-点可着色的（从而任何平面图都是4-面可着色的）

【定理】如果平面图G有Hamilton圈, 则四色猜想成立.

【证明】在Hamilton圈内面，由于C包含了G的所有顶点，因此不会出现三个面互相邻接，因此C的内、外面都可以用两种颜色正常染色.

【定理】连通平面图G的面可2-着色当且仅当G中存在Euler回路。

【证明】

- 如果G有Euler回路，则每个顶点的度都是偶数，所以G^*的每个面边界数都是偶数，所以G^*的所有圈都是偶圈，所以G^*是二部图，所以其点色数为2，从而G的面色数为2
- 如果G是2-面可着色的，则G^*是2-点可着色的，所以G^*是二部图，所以G^*的所有圈都是偶圈，因此G^{**}的每个顶点度都是偶数. 因为是连通平面图，所以$G^{**} = G$，从而G的每个顶点的度都是偶数，从而G有Euler回路.