# 离散数学方法—极值图论

参考：

清华大学陆玫老师课程讲义

- 【定理（Mantel）】$G(V,E)$是没有三角形的$n$阶图，则$|E|\le \frac{n^2}{4}$

  【证明】我们证明，如果$|E|>n^2/4$，则一定有三角形.

  $n=1,2$不需要证明，下面用数学归纳法，假设对于所有$n<N$结论都是成立的，则

  对$n=N$，取$uv\in E$，$H$是导出子图$G[V\backslash\{u,v\}]$，则，$H$有$n-2$个顶点.

  - 如果$H$的边数$>\frac{(n-2)^2}{4}$，则根据归纳假设，$H$有三角形.
  - 如果$H$的边数$\le\frac{(n-2)^2}{4}$，则

    $$|E(\{u,v\},V(H))|=|E|-|E(H)|-1>\frac{n^2}{4}-\frac{(n-2)^2}{4}-1=n-2.$$

    因为$H$中只有$n-2$个顶点，所以，至少有一个$H$中顶点使得它既和$u$有边相连，又和$v$有边相连，此时再加上边$uv$，就得到一个$G$中的三角形.

- 【定理（Túran）】如果$G(V,E)$是不含有$K_r$的$n$阶图，则：

  $$|E|\le\frac{r-2}{2(r-1)}n^2.$$

- 【定理】记$g(G)$是$G$的最短圈的长度，$|V|=n$，$g(G)\ge 5$（也就是不含有$C_3,C_4$），则

  $$|E|\le\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}.$$

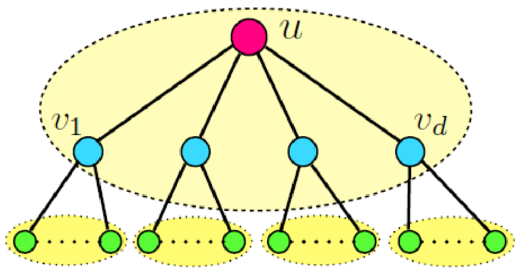
  【回忆】第一周作业题

  $$\sum_{u\in V}\sum_{v:vu\in E}d(v)=\sum_{v\in V}d(v)^2.$$

  (这相当于计算度和时，将$d(v)$计算了$d(v)$次，所以等于度的平方和)

  【证明】

  - 任选$u\in V$，设$S=N_G(u)=\{v_1,\cdots,v_d\}$，其中$d=d(u)$. 再设$S_i=\{v:vv_i\in E,v\neq u\}$.
  - 则$S_i\cap S_j=\varnothing$对$i\neq j$，否则$G$有正方形；而且$S_i\cap\{u,v_1,\cdots,v_d\}=\varnothing$，否则$G$有三角形.




  - 有了以上的集合不相交关系，我们有：

    $$(d+1)+\sum_{i=1}^{d}(d(v_i)=1)\le n\Rightarrow\sum_{v:vu\in E}d(v)\le n-1,\quad\forall u\in V$$

    对$u\in V$求和可得

    $$n(n-1)=\sum_{u\in V}\sum_{v:vu\in E}d(v)=\sum_{v\in V}d(v)^2\ge\frac{\left(\sum_{v\in V}d(v)\right)^2}{n}=\frac{4|E|^2}{n}.(\mathrm{Cauchy-Schwarz})$$

    也就是说

$$|E| \le \frac{1}{2}n\sqrt{n-1}.$$

- 【例题】$G(V,E)$是不含有$K_{1,3}$的简单图，则$|E| \le n.$

  【证明】根据握手定理可得

  $$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v),$$

  因为不含有$K_{1,3}$，所以对任何$v\in V(G)$都有$d(v)\le 2$，否则，如果存在$v$使得$d(v)\ge 3$，则取出与$v$有边相连的那三个点$u_1,u_2,u_3$，则$G(v,u_1,u_2,u_3;vu_1,vu_2,vu_3)$是$K_{1,3}$，所以：

  $$|E| \le \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \le \frac{1}{2}|V(G)|\cdot 2 = |V(G)|.$$

- 【例题】设$G=(V,E)$是不包含任何一棵具有$k$条边的树的$n$阶简单图，证明$|E|\le (k-1)n$

  【证明】对顶点数$n$归纳. $n=1$不用证明，下面假设对所有的$m<n$结论都是成立的，设$G$是一个$n$阶图而且不包含具有$k$条边的树，于是：

  - $\Delta(G)\le k-1$，否则存在一个顶点度数大于$k$，于是这个点与$k$个不同的点有边相连，于是$G$包含$K_{1,k}$作为子图，矛盾.
  - 取$v$使得$d(v)=\Delta$，则$d(v)\le k-1$，考虑$G-v$，则$|E(G-v)|=|E|-d(v)$，根据归纳假设：

    $$|E|-d(v)\le (k-1)(n-1)\Rightarrow |E|\le d(v)+(k-1)(n-1)\le k-1+(k-1)(n-1)=(k-1)n.$$

- 【例题】设$G=(V,E)$是不含有$P_{k+1}$的$n$阶简单连通图，则$|E|\le \frac{(k-1)n}{2}$.

  【证明】

  - 只需要对$k+1\le n$也就是$k\le n-1$证明. 因为$|E|\le \frac{n(n-1)}{2}$对任何简单图都成立.
  - 对顶点数$n$归纳，$n=1$不用证明，假设对$m<n$命题都成立，下面设$|V(G)|=n$.
  - 断言：$G$中存在度不超过$(k-1)/2$的点，设该点为$v$，则$G-v$是不包含$P_{k+1}$的$n-1$阶简单连通图，根据归纳假设

    $$|E(G-v)|\le \frac{(k-1)n}{2}-\frac{k-1}{2}\Rightarrow |E|=|E(G-v)|+d(v)\le \frac{(k-1)n}{2}.$$

    因此下面只需要证明$G$中存在度不超过$(k-1)/2$的点即可.
  - 用反证法，假设不成立，也就是$\delta(G)\ge k/2$，设$G$中最长的路为$P=v_1\cdots v_\ell$，根据不含有$P_{k+1}$可知$\ell\le k$.
    - 如果$v_1v_\ell\in E(G)$，则$G$存在子图$C_\ell$，由于$G$是连通图，所以必然存在$u\notin C_\ell$，以及$v_p\in C_\ell$，$v_pu\in C_\ell$，否则$C_\ell$的点将会是$G$的一个连通分支（由于$C_\ell$中顶点不和$G-C_\ell$中其他顶点相连），因此$\ell=n$，但是这又和$\ell\le k\le n-1$矛盾. 考虑路$uv_p\cdots v_\ell v_1\cdots v_{p-1}$. 这是一条长度是$\ell+1$的路，与$P$是最长路矛盾.
    - 如果$v_1v_\ell\notin E(G)$，设$S=\{v_i\in P: v_1v_{i+1}\in E(G)\}$，$T=\{v_i\in P: v_iv_\ell\in E(G)\}$，注意$v_1v_\ell\notin E(G)$以及$v_1,v_\ell$都只能和$P$中的点相连（否则能找到比$P$更长的路），由此可知$|S|=d_G(v_1)$，$T=d_G(v_\ell)$，所以：

      $$|S\cup T|=|S|+|T|-|S\cap T|\ge 2\delta(G)-|S\cap T|\ge k-|S\cap T|.$$

      另一方面

      $$|S\cup T|\le |V(P)|-1\le k-1,$$

      所以：

      $$k-|S\cap T|\le k-1\Rightarrow |S\cap T|\ge 1.$$

也就是存在$v_k \in S \cap T$（显然$k \neq 1, 2, \cdots, \ell-1, \ell$），使得$v_k \in S \cap T$，也就是$v_{k+1}v_1 \in E(G)$，而且$v_k v_\ell \in E(G)$，从$v_1$出发，考虑$v_1 v_{k+1} \cdots v_\ell v_k \cdots v_1$，则这是一个长为$\ell$的圈，也就是$G$存在子图$C_\ell$，根据$G$是连通图，由之前的论断可知可以找到$G$中长度为$\ell+1$的路，又与最长路的选取矛盾.